МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ – 1
ТЕОРІЯ ОЦІНЮВАННЯ ТА СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до проведення практичних занять
до розділу
„Статистичні методи аналізу випадкових величин”

для студентів спеціальності
„Автоматизоване управління технологічними процесами”

Рекомендовано Вченою радою інженерно-хімічного факультету

Київ
НТУУ “КПІ”
2013

Статистичні методи – 1. Теорія оцінювання та статистичні гіпотези: Метод. вказівки до провед. практ. занять для студентів спеціальності „Автоматизоване управління технологічними процесами” / Уклад.: Л.Д. Ярощук – К. : НТУУ ”КПІ“, 2013. – 61 с.

Гриф надано Вченою радою ІХФ

(Протокол № 3 від 3 квітня 2013 р.)

Навчальне видання

СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ – 1
ТЕОРІЯ ОЦІНЮВАННЯ ТА СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ

Методичні вказівки до проведення практичних занять для студентів спеціальності
„Автоматизоване управління технологічними процесами”

Укладач: Ярощук Людмила Дем’янівна, канд. техн. наук

Відповідальний редактор А.І. Жученко, докт. техн. наук, проф.

Рецензент Т.Б. Шилович, канд. техн. наук, доц.

Авторська редакція

Зміст Стор

Вступ

Основною метою проведення практичних занять з кредитного модуля “Статистичні методи – 1, Теорія оцінювання та статистичні гіпотези” є поглиблення знань, здобутих при вивченні теорії та отримання навичок у їх застосуванні до результатів експериментальних досліджень об’єктів та систем керування.

Оскільки статистика передбачає використання масивів даних, то при розрахунках рекомендовано використовувати обчислювальні засоби.

У відповідності до робочої програми кредитного модуля передбачено 8 годин практичних занять.

Розподіл їх за розділами і темами наступний.

Розділ 1. Статистичні методи аналізу випадкових величин.

Тема 1.1. Статистичні оцінки параметрів законів розподілу ймовірностей.

Заняття 1. Визначення точкових та інтервальних оцінок параметрів законів розподілу випадкових величин за експериментальними даними.

Тема 1.2. Статистичні гіпотези.

Заняття 2, 3.Статистичні дослідження із застосуванням гіпотез.

Розділ 2. Математико-статистичні методи дослідження зв′язків між випадковими величинами.

Тема 2.2. Кореляційний аналіз випадкових величин.

Заняття 4. Ідентифікація об’єктів та систем статистичними методами. Аналіз регресійних моделей.

У даному навчальному виданні наведено методичні матеріали до занять 1-3 тем 1.1 та 1.2 розділу 1.

Матеріал до обох тем подано за однаковою структурою:

- короткі відомості з теорії, які містять необхідні для розрахунків математичні вирази, та приклади загального характеру (не пов’язані з фахом);
- задачі за темою, які показують її зв’язок з фаховою предметною областю;
- перелік індивідуальних завдань;

ЗАНЯТТЯ 1

ВИЗНАЧЕННЯ ТОЧКОВИХ ТА ІНТЕРВАЛЬНИХ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ЗА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМИ ДАНИМИ

1.1. Короткі відомості з теорії та приклади

Точковою називають таку статистичну оцінку параметра, що визначається одним числом.

Вибіркова середня арифметична величина, M_x є незсуненою, обґрунтованою й ефективною оцінкою математичного сподівання генеральної сукупності μ_x. Її розраховують за формулою (1.1):

$$M_x = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}, \qquad (1.1)$$

де x_i – значення випадкової величини у i - у досліді, N - кількість дослідів.

Якщо значення x_1, x_2, ..., x_L мають відповідну кількість повторень N_1, N_2, ..., N_L, причому $N_1 + N_2 + ...+ N_L= N$, то можна застосувати формулу

$$M_x = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + \ldots + x_L N_L}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{L} x_i N_i}{N},$$

де L – кількість груп різних значень.

Незсунену (або виправлену) ***оцінку генеральної дисперсії*** σ_x^2, яку позначають S_x^2, обчислюють для малих вибірок за виразом:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - M_x\right)^2}{N-1} \qquad (1.2)$$

При великих вибірках у знаменнику ставлять N.

Середнім квадратичним відхиленням (***стандартним***) називають наступний параметр, який має розмірність *X*: $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$, його точкова оцінка, відповідно $S_x = \sqrt{S_x^2}$.

Інтервальною називають оцінку, що визначається двома числами – кінцями інтервалу. Інтервальні оцінки дозволяють встановити їх точність (як різницю між параметром і його оцінкою) і надійність *P*. Розрахунок інтервальної оцінки залежить від виду оцінки і певних умов. Розглянемо приклади визначення інтервальних оцінок.

1.1.1. Інтервальна оцінка математичного сподівання μ_x нормального розподілу при відомому значенні σ_x

Взявши до уваги, що довірча ймовірність задана й дорівнює *P*, запишемо її зв'язок з довірчим інтервалом

$$P[M_x - b\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} < \mu_x < M_x + b\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}] = 2\Phi(b) = P, \qquad (1.3)$$

де $\Phi(b)$ – функція Лапласа.

Зміст отриманого співвідношення такий: з надійністю *P* можна стверджувати, що довірчий інтервал

$$(M_x - b\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}},\ \ M_x + b\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}) \qquad (1.4)$$

включає оцінюване математичне сподівання μ_x генеральної сукупності, точність оцінки $\delta = b\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$.

Число *b* визначають з рівності $2\Phi(b) = P$, тобто $\Phi(b) = P/2$. За таблицею функції Лапласа знаходять аргумент *b*, якому відповідає значення функції Лапласа, що дорівнює $P/2$.

Приклад 1.1. Відомо, що випадкова величина *X* розподілена нормально. За вибіркою обсягом N=16 знайдена вибіркова середня M_x = 20,2. Дисперсія цієї випадкової величини відома і становить $\sigma_x^2 = 0{,}64$.

Потрібно оцінити невідоме математичне сподівання генеральної сукупності за допомогою довірчого інтервалу з надійністю P = 0,95.

Розв'язок. Визначимо значення функції Лапласа за заданою ймовірністю P = 0,95.

$$2\Phi(b) = 0{,}95;\ \Phi(b) = P/2 = 0{,}475.$$

За таблицею визначимо аргумент b = 1,96.

Розрахуємо нижню і верхню границі довірчого інтервалу, врахувавши, що у (1.4) використано не дисперсію, а середнє квадратичне відхилення $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = 0{,}8$:

$$M_x - b\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = 20{,}2 - 1{,}96\frac{0{,}8}{\sqrt{16}} = 19{,}808;$$

$$M_x + b\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = 20{,}2 + 1{,}96\frac{0{,}8}{\sqrt{16}} = 20{,}592;$$

$$19{,}808 < \mu_x < 20{,}592.$$

1.1.2. Інтервальна оцінка математичного сподівання μ_x нормального розподілу при невідомому значенні σ_x

Взявши до уваги, що довірча ймовірність задана й дорівнює P, запишемо її зв'язок з довірчим інтервалом наступним чином

$$P(M_x - t_{tabl}\frac{S_x}{\sqrt{N}} < \mu_x < M_x + t_{tabl}\frac{S_x}{\sqrt{N}}) = P,$$

де t_{tabl} – табличне значення критерію Стьюдента, яке визначають за числом степенів вільності k=N-1 і рівнем значущості α (або довірчою імовірністю P) для двобічної критичної області.

Таким чином, користуючись розподілом Стьюдента, визначають довірчий інтервал для параметра μ_x:

$$(M_x - t_{tabl}\frac{S_x}{\sqrt{N}} < \mu_x < M_x + t_{tabl}\frac{S_x}{\sqrt{N}}). \qquad (1.5)$$

Приклад 1.2. Нехай відомо, що випадкова величина X розподілена нормально. По вибірці обсягом N=16 знайдена вибіркова середня M_x = 20,2 і середнє квадратичне відхилення S_x = 0,8. Потрібно оцінити невідоме математичне сподівання генеральної сукупності за допомогою довірчого інтервалу з надійністю P=0,95.

Розв'язок. Знайдемо за таблицею значень двобічного критерію Стьюдента величину t_{tabl}, використовуючи величини P = 0,95; (α = 0,05); k = 15. Критерій дорівнює t_{tabl} = 2,13. Якщо в розпорядженні є таблиця однобічного критерію, то $\alpha = \frac{0,05}{2} = 0,025$. Якщо таблиця вимагає не α, а P, то P = 1 – 0,025 = 0,975.

Розрахуємо нижню і верхню границі довірчого інтервалу:

$$M_x - t_{tabl}\frac{S_x}{\sqrt{N}} = 20,2 - 2,13\frac{0,8}{\sqrt{16}} = 19,774;$$

$$M_x + t_{tabl}\frac{S_x}{\sqrt{N}} = 20,2 + 2,13\frac{0,8}{\sqrt{16}} = 20,626;$$

$$19,774 < \mu_x < 20,626.$$

1.1.3. Інтервальна оцінка ймовірності події

Інтервальну оцінку довірчої ймовірності можна розрахувати за формулою

$$P[|W_A - P_A| < \delta] = P[W_A - \delta < P_A < W_A + \delta] = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma_{W_A}}) = 2\Phi(b) = P.$$

де W_A, P_A , σ_{WA}– відносна частота, ймовірність події A, стандартне відхилення відносної частоти події A.

Цією формулою можна користуватися, якщо відомо σ_{W_A}. Для наближеного визначення довірчої ймовірності P_A або величини δ можна використовувати вираз

$$\sigma_{W_A} \to S_{W_A} = \sqrt{\frac{W_A(1-W_A)}{N}} \qquad (1.6)$$

де S_{W_A} – точкова оцінка стандартного відхилення W_A.

Отже, довірчий інтервал для ймовірності події такий

$$\left(W_A - bS_{W_A},\ W_A + bS_{W_A}\right). \qquad (1.7)$$

1.1.4. Інтервальні оцінки дисперсії σ_x^2 та середнього квадратичного відхилення σ_x

Запишемо вираз, який пов'язує довірчу ймовірність і довірчий інтервал для дисперсії випадкової величини

$$P[\chi_1^2 < \frac{NS_x^2}{\sigma^2} < \chi_2^2] = P[\frac{NS_x^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{NS_x^2}{\chi_1^2}] = 1 - \alpha\,. \qquad (1.8)$$

Нерівність (1.9) визначає довірчий інтервал для дисперсії:

$$\frac{NS_x^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{NS_x^2}{\chi_1^2}. \qquad (1.9)$$

Інтервальну оцінку середнього квадратичного відхилення σ_x визначають за допомогою виразу

$$P[\frac{S_x\sqrt{N}}{\chi_2} < \sigma < \frac{S_x\sqrt{N}}{\chi_1}] = 1 - \alpha\,. \qquad (1.10)$$

Приклад 1.3. Визначити довірчий інтервал з імовірністю P = 0,96 для дисперсії σ_x^2 випадкової величини X, розподіленої нормально. Згідно з отриманою вибіркою S_x^2 = 10, N = 20.

Розв'язок. Розрахуємо наступні показники:

- рівень значущості α = 1 – P = 1 – 0,96 = 0,04;
- імовірність P_2 = α/2 =0,02;
- імовірність P_1 = 1 - α/2 =0,98;
- кількість степенів вільності k = N – 1 = 20 – 1 =19;

З таблиці χ^2 – розподілу для P_2 та k визначимо χ_2^2= 33,7, а для P_1 та k - χ_1^2= 8,6. Тепер запишемо

$$(20\cdot10)/33{,}17 < \sigma_x^2 < (20\cdot10)/8{,}6;$$
$$5{,}935 < \sigma_x^2 < 23{,}256.$$

Розрахуємо інтервал для σ_x:

$$\sqrt{5{,}935} < \sigma_x < \sqrt{23{,}256};$$

$$2{,}43 < \sigma_x < 4{,}82.$$

1.1.5. Інтервальна оцінка коефіцієнта парної кореляції

Вибірковий коефіцієнт парної кореляції r_{xy} розраховують за виразом

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - M_x)(y_i - M_y)}{(N-1)\cdot S_x \cdot S_y}, \qquad (1.11)$$

Він є випадковою величиною, розподіл імовірностей якої можна вважати за нормальний або наближений до нього, якщо виконуються наступні умови:

- змінні X та Y мають сумісний нормальний або наближений до нього розподіл;
- коефіцієнт кореляції не дорівнює ± 1;
- обсяг вибірки досить великий.

У тих випадках, коли ці вимоги виконуються, можна визнати, що коефіцієнт парної кореляції підпорядкований нормальному закону розподілу ймовірностей з параметрами ρ_{xy} та $\sigma_{r_{xy}}$.

З наступного виразу знаходять довірчий інтервал для ρ_{xy}:

$$r_{xy} - b\sigma_{r_{xy}} \le \rho_{xy} \le r_{xy} + b\sigma_{r_{xy}}, \qquad (1.12)$$

де b – параметр функції Лапласа, що відповідає певній довірчій ймовірності P і пов'язаний з нею виразом $P = 2\Phi(b)$.

Оцінку $\sigma_{r_{xy}}$ називають стандартною похибкою коефіцієнта парної кореляції (позначимо її $S_{r_{xy}}$) розраховують за формулою

$$S_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1 - r_{xy}^2}{\sqrt{N-2}}}.$$

Отже (1.12) набуде вигляду

$$r_{xy} - b\frac{1-r_{xy}^2}{\sqrt{N}} \le \rho_{xy} \le r_{xy} + b\frac{1-r_{xy}^2}{\sqrt{N}} . \qquad (1.13)$$

При невеликій вибірці ($N < 30$) розподіл емпіричного коефіцієнта кореляції суттєво відрізняється від нормального. Тому для побудови довірчого інтервалу вибірковий r_{xy} перетворюють у величину z, що має приблизно нормальний розподіл.

Формула перетворення, яку названо z – перетворенням Фішера, має вигляд:

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{xy}}{1-r_{xy}}. \qquad (1.14)$$

Розподіл величини z не залежить від значень ρ_{xy} та N і при зростанні останнього швидко наближається до нормального.

Для статистично значущого коефіцієнта парної кореляції визначають довірчий інтервал за виразом

$$\left[z - b\sqrt{\frac{1}{N-3}}, z + b\sqrt{\frac{1}{N-3}} \right], \qquad (1.15)$$

де b – аргумент функції Лапласа, який визначають з виразу $2\Phi(b) = P$.

Наведемо алгоритм визначення довірчого інтервалу для ρ_{xy}:

- розрахувати вибірковий коефіцієнт r_{xy} за (1.11);
- перевірити значущість коефіцієнта ρ_{xy} за критерієм Стьюдента (див. заняття 3); у разі підтвердження значущості виконують наступні кроки алгоритму, інакше – дії припиняються;
- виконати z – перетворенням Фішера для вибіркового r_{xy} за (1.15);
- за відомою довірчою ймовірністю P визначити аргумент функції Лапласа b: $2\Phi(b) = P$;
- розрахувати половину довжини довірчого інтервалу для z – перетворення $b\sqrt{\frac{1}{N-3}}$;

- обчислити довірчі границі для z – перетворення як $z \pm b\sqrt{\dfrac{1}{N-3}}$;

- обчислити довірчі границі для ρ_{xy} за формулою зворотного z – перетворенням Фішера

$$g = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}.$$

Приклад 1.4. Виконано 60 експериментів. З імовірністю P = 0,95 визначити довірчий інтервал для коефіцієнта парної кореляції. Вибіркове значення коефіцієнта парної кореляції становить r_{xy} = -0,984. Коефіцієнт ρ_{xy} визнано значущим.

Розв'язок.

1. Виконаємо z – перетворенням Фішера для вибіркового r_{xy}:

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+(-0{,}984)}{1-(-0{,}984)} = -2{,}407.$$

2. Визначимо параметр b: $2\Phi(b) = 0{,}95;\ \Phi(b) = 0{,}475; b = 1{,}96.$

3. Розрахуємо половину довжини довірчого інтервалу для z – перетворення

$$\delta_z = b\sqrt{\frac{1}{N-3}} = 1{,}96\sqrt{\frac{1}{60-3}} = 0{,}259.$$

4. Обчислимо довірчі границі для z – перетворення:

а) ліва границя: -2,407 – 1,132 = -2,666;

б) права границя: -2,407 + 1,132 = -2,148.

5. Обчислимо довірчі границі для ρ_{xy} за формулою зворотного z – перетворенням Фішера

а) ліва границя: $g1 = \dfrac{e^{2\cdot(-2{,}666)} - 1}{e^{2\cdot(-2{,}666)} + 1} = -0{,}990$;

б) права границя: $g2 = \dfrac{e^{2\cdot(-2{,}148)} - 1}{e^{2\cdot(-2{,}148)} + 1} = -0{,}973$.

Отже, коефіцієнт ρ_{xy} з довірчою ймовірністю 0,95 обмежений наступним чином

$$-0{,}990 \le \rho_{xy} \le -0{,}973.$$

1.1.6. Визначення обсягу випадкової вибірки з поверненням для оцінки математичного сподівання

Розрахункова формула наступна

$$N = \left(\frac{b\sigma_x}{\delta} \right)^2. \qquad (1.16)$$

Приклад 1.5. Яким повинен бути обсяг випадкової вибірки для оцінки математичного сподівання μ, якщо відомо, що половина довірчого інтервалу дорівнює $\delta = 0{,}5$, а довірча ймовірність P = 0,95. Дисперсія досліджуваної випадкової величини становить σ^2 = 4.

Розв'язок. Визначимо значення функції Лапласа, яке відповідає заданій імовірності $\Phi(b) = \frac{1}{2} P = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$. З таблиці функції Лапласа знайдемо аргумент b, він має значення b = 1,96. Розрахуємо N:

$$N = \frac{1{,}96^2 \cdot 4}{0{,}5^2} \approx 61.$$

Отже, для заданої довірчої ймовірності й точності оцінки вибірка повинна складатися з 61 спостереження.

Якщо обчислений обсяг вибірки N занадто великий у порівнянні із наявними можливостями, то його можна знизити двома шляхами: зменшивши довірчу ймовірність або збільшивши довірчий інтервал.

Нехай P = 0,85, тоді $\Phi(b)$ = 0,425, b = 1,44. Розрахуємо N:

$$N = \frac{1{,}44^2 \cdot 4}{0{,}5^2} \approx 33.$$

1.2. Задачі оцінювання з предметної області “Автоматизація технологічних процесів”

Задача 1.1. Для оцінки частки бракованої продукції на виробництві вимірювачів рівня рідини отримано випадкову вибірку із 150 одиниць. 115 вимірювачів відповідали технічним вимогам. Отримати точкову оцінку частки бракованої продукції та 90% довірчий інтервал для ймовірності появи такої продукції (P_{br}).

Задача 1.2. На виході об’єкту керування вимірюють концентрацію речовини *A*. Відомо, що ця випадкова величина (позначимо її *X*) має нормальний розподіл з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma_x = 3$кг/дм^3. Знайти довірчі інтервали для оцінки невідомого математичного сподівання μ_x за вибірковим середнім M_x, якщо обсяг вибірки $N = 36$ і довірча імовірність $P = 0{,}95$

Задача 1.3. При розробці автоматичного вимірювача міцності твердого тіла на стискання були проведені експериментальні дослідження. За даними лабораторних дослідів 25 зразків піщаної глини було досліджено на границю їхньої міцності. Вибіркове середнє визначене як M=0,28 МПа. Відомо, що генеральне середнє квадратичне відхилення становить σ=0,15 МПа. Припускаючи, що результати вимірів розподілені нормально, визначити з надійністю 0,98 довірчий інтервал цього параметра.

Задача 1.4. В умовах задачі 1.3 визначити, яким повинен бути обсяг вибірки, якщо гранична похибка δ=0,0692 МПа була гарантована з надійністю $P = 0{,}997$.

Задача 1.5. За даними дев'яти незалежних рівноточних вимірів фізичної величини знайдене середнє арифметичне результатів окремих вимірів $M_x = 42{,}319$ і середнє квадратичне відхилення $S_x = 5$. Треба оцінити дійсне значення вимірюваної величини з надійністю $P = 0{,}95$.

Примітка. Дійсне значення величини дорівнює її математичному сподіванню. Тому слід знайти довірчий інтервал для цього параметра.

Задача 1.6. Виконано 12 вимірювань одним приладом (без систематичної похибки) певної фізичної величини. При цьому середнє квадратичне відхилення, розраховане для елементів вибірки, становить 0,6. Треба побудувати довірчий інтервал для дисперсії і середнього квадратичного відхилення випадкової похибки вимірювань з довірчою ймовірністю 0,95.

Задача 1.7. Було виконано експериментальне дослідження сушарки. За вибіркою, що складалася з 30 експериментів, визначено точкову оцінку коефіцієнта парної кореляції між витратою сушильного агента на вході в сушарку і вологістю сипкого матеріалу на її виході, r_{xy} = -0,974. Закон розподілу випадкових величин – нормальний. Коефіцієнт ρ_{xy} визнано значущим.

З імовірністю P = 0,95 визначити довірчий інтервал ρ_{xy} та стандартну похибку його оцінки.

Вимога. Розв'язати цей приклад, використавши формулу (1.13) та z – перетворення Фішера.

Задача 1.8. Досліджується процес осушення природного газу після газосховища. Отримана вибірка з 26 значень вологості газу на виході з абсорбера. Відомо, що вологість підпорядкована нормальному закону розподілу. За експериментальними даними розраховане середнє значення вологості 4,5% та дисперсія 0,16 $\%^2$. Визначити інтервальні оцінки математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення вологості газу. Довірча ймовірність становить 95%.

1.3. Індивідуальні завдання з оцінювання параметрів з самостійною обробкою експериментальних даних

Результати експериментальних досліджень об'єктів керування наведено у таблицях Додатку 1. Треба обчислити незсунені точкові оцінки математичного сподівання (M_{x1}) та дисперсії (S^2_{x1}) для фактора X_1 та інтервальну оцінку математичного сподівання, μ_{x1} при довірчій імовірності P=0,90 ($M_{x1}\pm\delta$). *Відповідь подати для* $\boldsymbol{M_{x1}}$**,** $\boldsymbol{S^2_{x1}}$ та $\boldsymbol{M_{x1}\pm\delta}$**.**

Приклад подання відповіді

$\boldsymbol{M_{x1}}$	$\boldsymbol{S^2_{x1}}$	$\boldsymbol{M_{x1}\pm\delta}$
9,51	3,26	9,51±1,163

ЗАНЯТТЯ 2

СТАТИСТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ГІПОТЕЗ

2.1. Короткі відомості з теорії та приклади

Перевірка статистичної гіпотези складається з наступних етапів:

1) формулювання основної H_0 та суперечної H_1 гіпотез;

2) задання рівня значущості α;

3) вибір критерію (статистики);

4) обчислення по вибірці значення критерію (тут позначимо K);

5) визначення типу критичної області за видом суперечної гіпотези;

6) визначення критичного значення критерію (по таблиці або у середовищі математичного пакету) згідно з рівнем значущості та степенями вільності (тут позначимо K_{kr});

7) порівняння розрахункового значення критерію з критичним;

8) ухвалення рішення: якщо значення статистики не входить в критичну область, то приймається гіпотеза H_0 і відкидається гіпотеза H_1, а якщо входить в критичну область, то відкидається гіпотеза H_0 і приймається гіпотеза H_1.

Розглянемо приклади використання статистичних гіпотез.

2.1.1. Порівняння дисперсій двох нормально розподілених генеральних сукупностей

Нехай генеральні сукупності випадкових величин X та Y розподілені нормально. За незалежними вибірками обсягів N_1 і N_2, отриманими із цих сукупностей, знайдені вибіркові дисперсії S_x^2 і S_y^2.

Потрібно за цими дисперсіями при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0, яка полягає в тому, що генеральні дисперсії розглянутих сукупностей ***однорідні***, тобто статистично однакові: $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

Суперечна гіпотеза H_1 може полягати або у тому, що одна з дисперсій буде визнана більшою за іншу, або у тому, що дисперсії будуть визнані різними. З огляду на сказане, порівняння дисперсій передбачає два види формулювань задачі дослідження:

$$\begin{matrix} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2; \\ H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2 \end{matrix}; \tag{2.1}$$

$$\begin{matrix} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2; \\ H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2 \end{matrix}, \tag{2.2}$$

причому позначення випадкових величин X або Y довільне. Для випадку (2.1) вибирають *однобічну критичну область* (α залишають заданим), а для (2.2) – *двобічну* (α = α/2).

Для перевірки H_0 використовують критерій Фішера F, який розраховують як співвідношення більшої з дисперсій до меншої. Цю гіпотезу приймають за умови, що F менший за F_{kr}.

Приклад 2.1. За двома незалежними вибірками обсягами N_x = 15 та N_y = 12, отриманими з нормальних генеральних сукупностей X и Y, знайдені вибіркові дисперсії: S_x^2=6,52 та S_y^2 = 11,41. При рівні значущості α = 0,05 перевірити $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ при суперечній $H_1 : \sigma_y^2 > \sigma_x^2$.

Розв'язок. Оскільки $S_y^2 > S_x^2$, то $F = \dfrac{S_y^2}{S_x^2} = \dfrac{11{,}41}{6{,}52} = 1{,}75$.

У зв'язку з тим, що $H_1 : \sigma_y^2 > \sigma_x^2$, критична область – правобічна.

Розрахуємо степені вільності: $k_x = N_x - 1 = 15 - 1 = 14$; та $k_y = N_y - 1 = 12 - 1 = 11$.

Критичне значення критерію, знайдене за таблицею, дорівнює $F_{kr} = F_{11,14,0{,}05} = 2{,}57$.

Виконується умова $F < F_{kr}$ (1,75 < 2,57), отже, немає підстав відкинути H_0.

Приклад 2.2. За двома незалежними вибірками обсягами $N_x = 10$ та $N_y = 18$, отриманими з нормальних генеральних сукупностей X і Y, розраховані $S_x^2 = 1{,}23$ і $S_y^2 = 0{,}41$. При рівні значущості α = 0,1 треба перевірити $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ при суперечній $H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

Розв'язок. $F = 1{,}23/0{,}41 = 3$; $\alpha = \alpha/2 = 0{,}1/2 = 0{,}05$; $k_x = 10 - 1 = 9$; $k_y = 18 - 1 = 17$.

Критичне значення $F_{9,17,0{,}05} = 2{,}5$. Оскільки $F > F_{kr}$, то H_0 прийняти не можна.

2.1.2. Порівняння дисперсій декількох нормальних генеральних сукупностей за вибірками однакового обсягу

Нехай елементи кожної з L генеральних сукупностей X_1, X_2, ..., X_L розподілені нормально.

Із цих сукупностей отримано вибірки однакового обсягу N і за ними знайдено вибіркові дисперсії S_1^2, S_2^2,..., S_L^2, які мають однакове кількість степенів вільності $k = N - 1$. Потрібно перевірити гіпотезу $H_0 : \sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_1}^2 = \ldots = \sigma_{x_L}^2$. Альтернативна гіпотеза передбачає визнання того, що дисперсії не можна визнати однорідними. Для перевірки H_0 використовують критерій Кохрена, який розраховують так

$$G = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{l=1}^{L} S_l^2}, \qquad (2.3)$$

де $S_{\max}^2$ - більша з дисперсій.

Зауваження. Якщо потрібно оцінити генеральну дисперсію σ_x^2 (за умови однорідності усіх дисперсій), то оцінці σ_x^2 надають значення середнього арифметичного всіх вибіркових дисперсій:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{l=1}^{L} S_l^2}{L}. \qquad (2.4)$$

Приклад 2.3. За чотирма незалежними вибірками однакового обсягу $N = 17$, отриманими з нормальних генеральних сукупностей, знайдені виправлені дисперсії S_1^2=0,26; S_2^2=0,36; S_3^2=0,40; S_4^2=0,42.

Треба перевірити $H_0 : \sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2 = \ldots = \sigma_{x_L}^2$ при α = 0,05 і, якщо дисперсії однорідні, оцінити генеральну дисперсію.

Розв'язок. Визначимо S_{max}^2 як S_4^2 = 0,42 і розрахуємо критерій Кохрена за вибірковими даними:

$$G = \frac{0{,}42}{0{,}26 + 0{,}36 + 0{,}40 + 0{,}42} = 0{,}29.$$

Кількість степенів вільності k = 17 – 1, кількість вибірок L = 4, критична точка, що знайдена за таблицею, дорівнює $G_{kr} = G_{16,4,\alpha}$ = 0,437. Оскільки $G < G_{kr}$, то гіпотезу H_0 про однорідність дисперсій приймаємо. Розрахуємо оцінку генеральної дисперсії S^2:

$$S^2 = \frac{0{,}26 + 0{,}36 + 0{,}40 + 0{,}42}{4} = 0{,}36.$$

2.1.3. Порівняння середніх значень двох довільно розподілених генеральних сукупностей (великі незалежні вибірки)

Якщо незалежні вибірки містять більше 30 елементів, то вибіркові середні арифметичні розподілені приблизно нормально, а вибіркові дисперсії є досить точними оцінками генеральних дисперсій. Нехай треба порівняти μ_x та μ_y, маючи їхні точкові оцінки M_x та M_y.

Гіпотези записують такими способами:

$$H_0: \mu_x = \mu_y; \quad H_1: \mu_x \neq \mu_y. \tag{2.5}$$

$$H_0: \mu_x = \mu_y; \quad H_1: \mu_x < \mu_y \text{ або } (\mu_x > \mu_y). \tag{2.6}$$

Для порівняння μ_x з μ_y скористаємося Z критерієм, який розраховують за формулою

$$Z = \frac{|M_x - M_y|}{\sqrt{\frac{S_x^2}{N_x} + \frac{S_y^2}{N_y}}}. \tag{2.7}$$

За таблицею функції Лапласа $\Phi(Z)$ знаходять критичне значення Z_{kr} для *двобічної критичної області* системи (2.5)з виразу (2.8)

$$\Phi(Z_{kr}) = \frac{1-\alpha}{2}, \tag{2.8}$$

а для *однобічної критичної області* системи (2.6) з виразу (2.9)

$$\Phi(Z_{kr}) = \frac{1-2\alpha}{2}. \tag{2.9}$$

Якщо виконується умова $Z < Z_{kr}$, то можна прийняти H_0.

Приклад 2.4. За двома незалежними вибірками обсягами $N_x = 100$ і $N_y = 120$ знайдені вибіркові середні $M_x = 32{,}4$ і $M_y = 30{,}1$ та дисперсії $S_x^2 = 15{,}0$ і $S_y^2 = 25{,}2$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ треба перевірити нульову гіпотезу H_0: $\mu_x = \mu_y$ при альтернативній гіпотезі H_1: $\mu_x > \mu_y$.

Розв'язок. Розрахуємо статистику Z:

$$Z = \frac{|32{,}4 - 30{,}1|}{\sqrt{\frac{15}{100} + \frac{25{,}2}{120}}} = \frac{2{,}3}{\sqrt{0{,}15 + 0{,}21}} = \frac{2{,}3}{\sqrt{0{,}36}} = 3{,}83.$$

Виходячи з альтернативної гіпотези H_1: $\mu_x > \mu_y$, визначимо, що *критична область – правобічна*.

Знайдемо Z_{kr}:

$$\Phi(Z_{kr}) = \frac{1 - 2\alpha}{2} = \frac{1 - 2 \cdot 0{,}05}{2} = 0{,}45.$$

За таблицею Лапласа знаходимо Z_{kr}=1,65. Оскільки $Z > Z_{kr}$, то нульову гіпотезу прийняти не можна, тобто математичні сподівання відрізняються суттєво.

Для двобічної критичної області Z_{kr} знаходять з виразу:

$$\Phi(Z_{kr}) = (1 - \alpha)/2.$$

За критерій використовують статистику t:

$$t = \frac{\left| M_x - M_y \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{N_x} + \frac{1}{N_y} \right) \frac{(N_x - 1)S_x^2 + (N_y - 1)S_y^2}{N}}}, \qquad (2.6)$$

де $N = N_x + N_y - 2$.

Доведено, що величина t при справедливості нульової гіпотези має розподіл Стьюдента (t – розподіл) з $k = N_x + N_y - 2$ степенями вільності. Критичне значення критерію знаходять за таблицями в залежності від того, одно- чи двобічна критична область.

Перш ніж застосувати (2.6), треба перевірити однорідність дисперсій випадкових величин X та Y за критерієм Фішера і лише при позитивній відповіді продовжувати дослідження.

Приклад 2.5. За двома незалежними малими вибірками обсягами $N_x = 5$ і $N_y = 6$, отриманими з нормальних генеральних сукупностей, знайдено вибіркові середні арифметичні значення $M_x = 3{,}3$ і $M_y = 2{,}48$ і виправлені дисперсії $S^2{}_x = 0{,}25$ і $S^2{}_y = 0{,}108$. При α =0,05 перевірити H_0: $\mu_x = \mu_y$ при H_1: $\mu_x \neq \mu_y$.

Розв'язок. Оскільки дисперсії S_x^2 та S_y^2 різні, то перевіримо спочатку за критерієм Фішера $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$:

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2} = \frac{0{,}25}{0{,}108} = 2{,}31.$$

Оскільки мова йде про перевірку математичних сподівань за умови однорідності дисперсій, то суперечна дисперсія така H_1: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

У цьому випадку критична область двобічна. Задамося α = 0,05 і розрахуємо $k_x = N_x - 1 = 4$ і $k_y = N_y - 1 = 5$. За таблицею знайдемо критичну точку $F_{4,5,0,025} = 7{,}39$. Оскільки $F < F_{kr}$, то H_0 не відкидають.

Тепер можна порівняти середні значення за критерієм Стьюдента:

$$t = \frac{|3{,}3 - 2{,}48|}{\sqrt{(4 \cdot 0{,}25 + 5 \cdot 0{,}108)}} \sqrt{\frac{5 \cdot 6 \cdot (5 + 6 - 2)}{5 + 6}} =$$

$$= \frac{0{,}82}{\sqrt{1 + 0{,}54}} \sqrt{\frac{270}{11}} = \frac{0{,}82}{1{,}24} 4{,}95 = 3{,}27.$$

Кількість степенів вільності $k = 5 + 6 - 2 = 9$. Критична точка критерію $t_{9,0.05} = 2{,}26$ (таблиця двобічного критерію).

Оскільки $t > t_{kr}$, то гіпотезу про однорідність математичних сподівань відкидаємо.

2.2. Задачі оцінювання з предметної області “Автоматизація технологічних процесів”

Задача 2.1. Фірма по виготовленню мікроконтролерів, спираючись на дослідження 100 одиниць своєї продукції гарантує, що середній час їхньої безвідмовної роботи становить 11000 годин з дисперсією 420 годин^2. Із закупленої для виробництва партії мікроконтролерів випробували 20, для них середній час безвідмовної роботи становив 9200 годин, а середнє квадратичне відхилення – 18 годин. Чи можна вважати, що закуплені мікроконтролери відповідають гарантії ? Рівень значущості дорівнює 0,05.

Задача 2.2. Для участі у конкурсі по розробці системи автоматизації одного з відділень нафтопереробного виробництва на конкурс подано заявки від двох організацій. Одна з них впровадила 16 систем автоматизації процесами, подібними до тих, які мають місце у відділені. Середня вартість системи становила 5,3 млн.грн зі стандартним відхиленням 12 тис. грн. Інша організація впровадила 9 систем з середньою вартістю 4,9 млн.грн при стандартному відхиленні 14 тис.грн. Зробити висновок про те, якій фірмі доцільно доручити розробку системи автоматизації.

Задача 2.3. Проектувальники розглядають економічну доцільність степеня резервування однієї з ланок автоматичної системи керування (АСК). Проведені дослідження трьох структур АСК дали такі результати:

Кількість резервних ланок	Середній наробіток на відмову, годин	Дисперсія наробітку на відмову, годин^2
Без резервування ланки	8 900	198
Одна резервна ланка	10 400	310
Дві резервні ланки	11 224	420

Кількість досліджень кожної структури становить відповідно 68, 80, 76.

Чи можна вважати, що усі структури однаково надійні? Рівень значущості - 0,1.

Задача 2.4. 16. У системі автоматизації запропоновано змінити структуру одного з контурів керування. Було проведено порівняльні дослідження обох структур. При початковій структурі середній вихід продукції, що відповідав вимогам стандарту, складав 230 м^3/с при стандартному відхиленні 12 м^3/с (було виконано 58 лабораторних аналізів). Після зміни структури контуру вихід стандартної продукції за даними такої самої кількості аналізів у середньому склав 244 м^3/с при стандартному відхиленні 10 м^3/с. Зробіть висновок про доцільність остаточного переходу до іншої структури контуру керування, якщо це вимагатиме додаткових витрат.

2.3. Індивідуальні завдання з перевірки статистичних гіпотез із самостійною обробкою експериментальних даних

Результати експериментальних досліджень об'єктів керування наведено у таблицях Додатку 1.

Увага! Перед умовою завдання вказано номер варіанту експериментальних даних.

1. **(№1)** Сформулювати та перевірити статистичну гіпотезу про однорідність математичних сподівань μ_y і μ_z двох показників якості (в'язкість) *Y* та *Z*. *My* визначити з таблиці, експериментальне дослідження величини *Z* дало такі результати: M_z=10,2, N_z=18, S^2_z=4,2. Рівень значущості α=0,10. Критична область однобічна. Для порівняння дисперсій критична область двобічна. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{M_y}$, $\boldsymbol{S^2_y}$, *критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$, *розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези або про неможливість розв'язування задачі за наведених умов*.

2. **(№2)** Перевірити статистичну гіпотезу про однорідність математичних сподівань μ_y і μ_z двох показників якості (концентрація O_2) Y та Z. M_y визначити з таблиці, експериментальне дослідження величини Z дало такі результати: M_z=3,2, N_z=15, S^2_z=3,2. Рівень значущості α=0,05. Критична область двобічна. Для порівняння дисперсій критична область також двобічна.
Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез H0, H1, My, S2y, критичного значення критерію $\boldsymbol{K_{tabl}}$*, розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези або про неможливість розв'язування задачі за наведених умов*.

3. **(№5)** Перевірити статистичну гіпотезу про однорідність математичних сподівань μ_y і μ_z двох показників якості (напруга на розрив) *Y* та *Z*. M_y визначити з таблиці, експериментальне дослідження величини Z дало такі результати: *Mz*=11,2, N_z=19, S^2_z=3,3. Рівень значущості α=0,05. Критична область однобічна. Для порівняння дисперсій критична область двобічна.
Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез $\boldsymbol{H_0}$*,* $\boldsymbol{H_1}$*,* $\boldsymbol{M_y}$*,* $\boldsymbol{S^2_y}$*, критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$*, розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези або про неможливість розв'язування задачі за наведених умов*.

4. **(№6)** Перевірити статистичну гіпотезу про однорідність математичних сподівань μ_y і μ_z двох показників якості (вологість) *Y* та *Z*. M_y визначити з таблиці, експериментальне дослідження величини *Z* дало такі результати: M_z=9,2, N_z=13, S^2_z=2,2. Рівень значущості α=0,02. Критична область двобічна. Для порівняння дисперсій критична область також двобічна.
Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез H_0*,* H_1*,* M_y*,* S^2_y*, критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$*, розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези або про неможливість розв'язування задачі за наведених умов*.

5. **(№10)** Дослідженню підлягав радіоізотопний прилад для вимірювання рівня рідини в технологічному апараті. Через визначені проміжки часу проводилися вимірювання одного і того ж рівня рідини, отримано 5 незалежних вибірок, для кожної з них розраховано дисперсію:

ВИБІРКА	1	2	3	4	5
ДИСПЕРСІЇ	0,27	0,32	0,40	0,42	0,48

У кожній вибірці 10 елементів. При рівні значущості α=0,05 визначити однорідність дисперсій. Критична область однобічна. У разі однорідності дисперсій визначити генеральну дисперсію.

Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_1}$, *критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$, *розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези. У разі підрахунку генеральної дисперсії подати її значення* $\boldsymbol{S^2_{ген}}$.

6. **(№11)** Перевірити статистичну гіпотезу про однорідність математичних сподівань μ_y і μ_z двох показників якості (в'язкість) *Y* та *Z*. M_y визначити з таблиці, експериментальне дослідження величини *Z* дало такі результати: M_z=3,2, N_z=20, S^2_z=0,2. Рівень значущості α=0,02. Критична область однобічна. Для порівняння дисперсій критична область двобічна.
Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{M_y}$, $\mathbf{S^2_y}$, *критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$, *розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези або про неможливість розв'язування задачі за наведених умов*.

7. **(№12)** Перевірити статистичну гіпотезу про однорідність математичних сподівань μ_y і μ_z двох показників якості (концентрація CO_2) *Y* та *Z*. M_y визначити з таблиці, експериментальне дослідження величини Z дало такі результати: M_z=6,2, N_z=21, S^2_z=3,8. Рівень значущості α=0,10. Критична область двобічна. Для порівняння дисперсій критична область також двобічна. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{M_y}$, $\mathbf{S^2_y}$, *критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$, *розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези або про неможливість розв'язування задачі за наведених умов*.

8. **(№15)** Перевірити статистичну гіпотезу про однорідність математичних сподівань μ_y і μ_z двох показників якості (напруга на розрив) *Y* та *Z*. M_y визначити з таблиці, експериментальне дослідження величини Z дало такі результати: M_z=9,8, N_z=16, S^2_z=5,9. Рівень значущості α=0,05. Критична область однобічна. Для порівняння дисперсій критична область двобічна.
Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{M_y}$, $\mathbf{S^2_y}$, *критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$, *розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези або про неможливість розв'язування задачі за наведених умов*.

9. **(№16)** Перевірити статистичну гіпотезу про однорідність математичних сподівань μ_y і μ_z двох показників якості (вологість) *Y* та *Z*. M_y визначити з таблиці, експериментальне дослідження величини *Z* дало такі результати: M_z=6,9, N_z=25, S^2_z=2,1. Рівень значущості α=0,01.Критична область двобічна. Для порівняння дисперсій критична область також двобічна.

Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{M_y}$, $\mathbf{S^2_y}$, *критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$, *розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези або про неможливість розв'язування задачі за наведених умов*.

10. **(№20)** За чотирма незалежними вибірками однакового обсягу (по 17 елементів), отриманими в результаті дослідження лабораторного гранулометра, визначені наступні дисперсії вимірювання дрібної фракції:

ВИБІРКА:	1	2	3	4
ДИСПЕРСІЇ:	2,12;	2,32;	3,24;	4,32.

При рівні значущості $\alpha=0{,}05$ перевірити, чи однорідні ці дисперсії, в разі однорідності визначити генеральну дисперсію. Критична область однобічна.

Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_1}$, *критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$, *розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези. У разі підрахунку генеральної дисперсії подати її значення* $\boldsymbol{S^2_{ген}}$.

11. **(№21)** Перевірити статистичну гіпотезу про однорідність математичних сподівань μ_y і μ_z двох показників якості (в'язкість) *Y* та *Z*. M_y визначити з таблиці, експериментальне дослідження величини *Z* дало такі результати: $M_z=5{,}6$, $N_z=9$, $S^2_z=1{,}2$. Рівень значущості $\alpha=0{,}05$. Критична область однобічна. Для порівняння дисперсій критична область двобічна. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{M_y}$, $\mathbf{S^2_y}$, *критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$, *розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези або про неможливість розв'язування задачі за наведених умов*.

12. **(№22)** Перевірити статистичну гіпотезу про однорідність математичних сподівань μ_y і μ_z двох показників якості (концентрація O_2) *Y* та *Z*. M_y визначити з таблиці, експериментальне дослідження величини *Z* дало такі результати: $M_z=7{,}8$, $N_z=19$, $S^2_z=2{,}9$. Рівень значущості $\alpha=0{,}10$. Критична область двобічна. Для порівняння дисперсій критична область також двобічна. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{M_y}$, $\mathbf{S^2_y}$, *критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$, *розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези або про неможливість розв'язування задачі за наведених умов*.

13. **(№25)** Перевірити статистичну гіпотезу про однорідність математичних сподівань μ_y і μ_z двох показників якості (напруга на розрив) *Y* та *Z*. M_y визначити з таблиці, експериментальне дослідження величини *Z* дало такі результати: M_z=4,8, N_z=22, S^2_z=2,1. Рівень значущості α=0,05. Критична область однобічна. Для порівняння дисперсій критична область двобічна. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{M_y}$, $\mathbf{S^2_y}$, *критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$, *розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези або про неможливість розв'язування задачі за наведених умов*.

14. **(№26)** Перевірити статистичну гіпотезу про однорідність математичних сподівань μ_y і μ_z двох показників якості (вологість) *Y* та *Z*. M_y визначити з таблиці, експериментальне дослідження величини *Z* дало такі результати: M_z=8,2, N_z=26, S^2_z=0,9. Рівень значущості α=0,02. Критична область двобічна. Для порівняння дисперсій критична область також двобічна. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{M_y}$, $\mathbf{S^2_y}$, *критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$, *розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези або про неможливість розв'язування задачі за наведених умов*.

15. **(№30)** За чотирма вибірками однакового обсягу (по 9 елементів), отриманими в результаті дослідження газоаналізатора, визначені наступні дисперсії вимірювання концентрації HS:

ВИБІРКА:	1	2	3	4
ДИСПЕРСІЇ:	3,12;	4,32;	3,04;	5,32.

При рівні значущості α=0,05 перевірити, чи однорідні ці дисперсії, в разі однорідності визначити генеральну дисперсію. Критична область однобічна.

Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_1}$, *критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$, *розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези. У разі підрахунку генеральної дисперсії подати її значення* $\boldsymbol{S^2_{ген}}$.

Приклад подання відповіді.

$\mathbf{H_0}$	$\mathbf{H_1}$	$\mathbf{M_y}$	$\mathbf{S^2_y}$	$\boldsymbol{F_p}$	$\boldsymbol{F_{tabl}}$	$\boldsymbol{K_{tabl}}$	$\boldsymbol{K_p}$	**Висновок**
$\mu_y=\mu_z$	$\mu_y<\mu_z$	4,61	6,74	1,604	2,102	1,318	5,92	$\mathbf{H_0}$ відхилити

ЗАНЯТТЯ 3

СТАТИСТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ГІПОТЕЗ (продовження)

3.1. Короткі відомості з теорії та приклади

3.1.1. Порівняння математичного сподівання з певною заданою величиною А

Сформулюємо гіпотези для двох випадків, які відрізняються суперечними гіпотезами:

$$\begin{aligned} &H_0 : \mu_x = A; \\ &H_1 : \mu_x \neq A. \end{aligned} \qquad (3.1)$$

$$\begin{aligned} &H_0 : \mu_x = A; \\ &H_1 : \mu_x < A. \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Для (3.1) *критична область двобічна*, для (3.2) – *однобічна*. При значній кількості спостережень або при відомій дисперсії σ_x^2 вибирають Z – критерій, який розраховують за формулою

$$Z = \frac{|M_x - A|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{N}}}. \qquad (3.3)$$

Критичне значення критерію Z_{kr} знаходять у таблиці функції Лапласа за визначеною довірчою ймовірністю P. Перевірка гіпотези H_0 виконують за такими ж правилами, які були описані у п.2.2.3.

При малій кількості дослідів та (або) не відомій дисперсії перевірку гіпотези H_0 виконують за допомогою t – критерію Стьюдента.

Розрахункове значення критерію визначають наступним чином

$$t = \frac{|M_x - A|}{S_{M_x}}, \tag{3.4}$$

де $S_{M_x} = \sqrt{S_x^2 / N}$ - для великої вибірки, або $S_{M_x} = \sqrt{S_x^2 /(N-1)}$ – для малої вибірки.

Кількість степенів вільності $k = N - 1$. Гіпотезу H_0 приймають, якщо виконується умова $t < t_{kr}$.

Приклад 3.1. Проведено 64 спостереження за випадковою величиною X. За результатами цих спостережень розраховано середню арифметичну $M_x = 23$ та середнє квадратичне відхилення $S_x = 4{,}1$. Перевірити, чи суттєвим є відхилення математичного сподівання μ_x від сталої величини 32 при $\alpha = 0{,}5$.

Розв’язок. Сформулюємо наступні гіпотези:

$$H_0 : \mu = 32;$$
$$H_1 : \mu \neq 32.$$

Оскільки вибірка велика, то можна вважати, що $M_x = \mu_x = 23$, $S_x = \sigma_x = 4{,}1$, та скористатися Z – критерієм. Згідно з (3.3) запишемо

$$Z = \frac{|23 - 32|}{\sqrt{\frac{16{,}81}{64}}} = 17{,}56.$$

Визначимо Z_{kr} для двобічної критичної області з (2.8):

$$\Phi(Z_{kr}) = \frac{1 - 0{,}05}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475,$$

з таблиці Лапласа $Z_{kr} = 1{,}96$.

Оскільки $Z > Z_{kr}$, то гіпотезу H_0 треба відхилити. Це означає, що відхилення математичного сподівання μ_x від сталої величини 32 треба визнати суттєвим.

3.1.2. Перевірка гіпотези про значущість коефіцієнта кореляції

Позначимо ρ_{xy} дійсне значення коефіцієнту парної кореляції між випадковими величинами X та Y. Сформулюємо гіпотези:

$$H_0 : \rho_{xy} = 0;$$
$$H_1 : \rho_{xy} \neq 0.$$

Якщо H_0 буде відкинуто, то варто визнати значущість ρ_{xy}. Це означає, що X і Y суттєво корельовані, причому між ними існує лінійний зв'язок.

За критерій перевірки H_0 використаємо випадкову величину t:

$$t = \left| r_{xy} \right| \sqrt{\frac{N-2}{1-r_{xy}^2}}\,, \qquad (3.5)$$

де r_{xy} – вибіркове значення коефіцієнта парної кореляції.

Величина t має розподіл Стьюдента з $k = N - 2$ степенями вільності. Оскільки H_1: $\rho_{xy} \neq 0$, то критична область – *двобічна*.

Якщо виконується умова $t < t_{kr}$, то немає підстав відкинути нульову гіпотезу.

Приклад 3.2. За вибіркою обсягом $N = 122$, отриманою з нормальної двовимірної сукупності (X, Y), знайдено вибірковий коефіцієнт кореляції $r_{xy} = 0{,}4$. При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ треба перевірити суттєвість кореляційного зв’язку (тобто ρ_{xy}).

Розв'язок. Розрахуємо вибіркове значення статистики t:

$$t = 0{,}4\sqrt{\frac{122-2}{1-0{,}4^2}} = \frac{0{,}4\cdot 10{,}95}{0{,}92} = 4{,}76.$$

Кількість степенів вільності k = 122 – 2 = 120. Знаходимо критичне значення t_{kr}, тобто $t_{k,\alpha} = t_{120,0.05}$. Для двобічної критичної області $t_{120,0.05}$ = 1,98.

Оскільки $t > t_{kr}$, то нульову гіпотезу відкидаємо і коефіцієнт кореляції ρ_{xy} визнаємо суттєвим. Таким чином, визнаємо наявність лінійного кореляційного зв'язку між випадковими величинами X та Y.

3.1.3. Перевірка гіпотези про вид закону розподілу ймовірностей

Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити гіпотезу H_0: **генеральна сукупність випадкової величини *X* розподілена за законом *A***, треба визначити розрахункове значення ***критерію Пірсона*** за формулою

$$\chi^2 = \sum_{l}^{L} \frac{(N_l - N_l^*)^2}{N_l^*}, \qquad (3.6)$$

де L –кількість інтервалів (груп), на які розділено вибіркові дані;
N_l – емпірична (експериментальна) частота (кількість) ознак, що належать до l-ї групи; N_l^* – теоретична частота ознак, розрахована для теоретичного закону розподілу ***A***.

Ця статистика підпорядковується розподілу χ^2 із кількістю степенів вільності

$$k = L - 1 - U,$$

де U – кількість параметрів закону розподілу ***A***, які оцінюють за даними вибірки.

За таблицею значень критерію Пірсона, виходячи зі степенів вільності k і рівня значущості α, знаходимо критичне значення критерію $\chi^2_{kr} = \chi^2_{kr,\alpha}$. Гіпотезу H_0 приймають, якщо виконується умова $\chi^2 < \chi^2_{kr}$.

Приклад 3.3. Треба перевірити гіпотезу про підпорядкування емпіричного розподілу нормальному закону. Обсяг вибірки N = 200, рівень значущості α = 0,05. Вибіркові дані у вигляді таблиці 3.1.

Розв'язок. Наведемо алгоритм перевірки гіпотези, а емпіричну та розраховану по теорії інформацію занесемо до табл. 3.1.

1. Розрахуємо кількість інтервалів:

$$L = 1 + 3{,}322 lg 200 \approx 9.$$

2. Визначимо границі кожного інтервалу. Заповнимо пп. 2,3 табл. 2.1.

3. Знайдемо середини інтервалів:

$$\delta_1^* = \frac{40+60}{2} = 50;\ \delta_2^* = \frac{60+80}{2} = 70$$

та емпіричні частоти, N_l, що відповідають цим величинам. Заповнимо пп.4,5 табл.2.1.

4. Розрахуємо вибіркові M_x і S_x:

$$M_x = \frac{\sum_{l=1}^{L} x_l^* N_l}{N} = 125{,}10;\ S_x = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^{L}(x_l - x_l^*)^2 N_l}{N}} = 30{,}68.$$

Розрахунки – у п.6 та під цим пунктом за межами табл.2.1

5. Знайдемо нові границі інтервалів $\overline{z_l, z_{l+1}}$ і заповнимо пп. 7, 8 таблиці.

6. За таблицею функції Лапласа визначимо $\Phi(Z_l)$ і заповнимо пп. 9,10.

7. Знайдемо теоретичні ймовірності P_l і заповнимо п.11:

$P_1 = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \Phi(-2{,}12) - \Phi(-\infty) = -\Phi(2{,}12) + \Phi(\infty) =$

$= 0{,}4831 + 0{,}5 = 0{,}0169;$

$P_2 = \Phi(-1{,}47) - \Phi(-2{,}12) = -0{,}4292 + 0{,}4831 = 0{,}0539;$

(далі аналогічно).

8. Розрахуємо теоретичні частоти $N_l^* = N \cdot P_l$ і заповнимо п.12:

$$N_1^* = 200P_1 = 200 \cdot 0{,}0169 = 3{,}3846;$$
$$N_2^* = 200P_2 = 200 \cdot 0{,}0539 = 10{,}7712,$$

(далі аналогічно).

9. Розрахуємо вибіркове значення критерію χ^2 (для зменшення обсягу формули будемо округлювати теоретичні частоти до другого знаку після коми):

$$\chi^2 = \sum_{l=1}^{L} \frac{(N_l - N_l^*)^2}{N_l^*} = \frac{(16-3{,}38)^2}{3{,}38} + \frac{(26-10{,}77)^2}{10{,}77} + \frac{(27-27{,}17)^2}{27{,}17} +$$
$$+ \frac{(29-45{,}47)^2}{45{,}47} + \frac{(26-50{,}48)^2}{50{,}48} + \frac{(21-37{,}19)^2}{37{,}19} + \frac{(23-18{,}18)^2}{18{,}18} +$$
$$+ \frac{(19-5{,}89)^2}{5{,}89} + \frac{(13-1{,}46)^2}{1{,}46} = 214{,}84.$$

10. Визначимо кількість степенів вільності: $k = 9 - 1 - 2 = 6$.

11. Знайдемо табличне значення критерію Пірсона при рівні значущості

$\alpha = 0{,}05$: $\chi^2_{6,0,05} = 12{,}59$.

Оскільки $\chi^2 > \chi^2_{6,0,05}$, то варто відкинути гіпотезу H_0 про нормальність закону розподілу ймовірностей.

Таблиця 3.1. Розрахункова таблиця для прикладу 2.8

Номер інтервалу	Границі інтервіалу		Середина інтервалу	Частота	Розрахунок середнього	Нові границі інтервалу		Функція Лапласа		Імовірність	Теорет. частота
l	δl	$\delta l+1$	δl^*	N_l	$\delta l^* N_l$	z_l	z_{l+1}	$\Phi(z_l)$	$\Phi(z_{l+1})$	P_l	N_l^*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	40,0	60,0	50	16	800,00	-(нескнч.)	-2,12	-0,5000	-0,4831	0,0169	3,3846
2	60,0	80,0	70	26	1820,00	-2,12	-1,47	-0,4831	-0,4292	0,0539	10,7712
3	80,0	100,0	90	27	2430,00	-1,47	-0,82	-0,4292	-0,2934	0,1359	27,1729
4	100,0	120,0	110	29	3190,00	-0,82	-0,17	-0,2934	-0,0660	0,2273	45,4687
5	120,0	140,0	130	26	3380,00	-0,17	0,49	-0,0660	0,1864	0,2524	50,4816
6	140,0	160,0	150	21	3150,00	0,49	1,14	0,1864	0,3723	0,1860	37,1900
7	160,0	180,0	170	23	3910,00	1,14	1,79	0,3723	0,4632	0,0909	18,1765
8	180,0	200,0	190	19	3610,00	1,79	2,44	0,4632	0,4927	0,0295	5,8911
9	200,0	220,0	210	13	2730,00	2,44	+(нескнч.)	0,4927	0,5000	0,0073	1,4633
				$\Sigma\delta l^* N_l =$	25020,00					1,0000	200,00
				$Mx =$	125,10						
				$Sx =$	30,68						

3.2. Задачі оцінювання з предметної області “Автоматизація технологічних процесів”

Задача 3.1. На початку року погодинний виробіток продукції на підприємстві по виробництву добрив складав 40 т на годину. Фактичний виробіток відповідав встановленій нормі. При переході на іншу сировину в кінці року умови виробництва ускладнились. Для перевірки обґрунтованості норми у нових умовах було проведено дослідження роботи дев’яти операторів. Середній погодинний виробіток цих операторів склав 37 т на годину, дисперсія вимірювань становила 16 відповідних одиниць. Треба зробити висновок про необхідність зміни норм виробітку на одного оператора. Розгляньте рівні значущості 0,05 та 0,1.

Задача 3.2. Проектна організація пропонує створити документацію на систему автоматизації виробництва за 98 тис. грн. (±3 тис. грн., цей параметр організація розглядає як стандартне відхилення). Дирекція виробничого об’єднання, яке виступає як замовник проекту, виділяє 94 тис. грн. (±4 тис. грн.). Чи можна дирекції пристати на пропозицію проектувальників, вважаючи їх фінансові пропозиції сувимірними з виділеними коштами? Розгляньте рівні значущості 0,05 та 0,1.

Задача 3.3. Було виконано експериментальне дослідження сушарки. За вибіркою, що складалася з 30 експериментів, визначено точкову оцінку коефіцієнта парної кореляції між витратою сушильного агента на вході в сушарку і вологістю сипкого матеріалу на її виході, r_{xy} = -0,974. Закон розподілу випадкових величин – нормальний. Перевірити, чи можна визнати кореляційний зв’язок між витратою сушильного агента на вході в сушарку і вологістю сипкого матеріалу суттєвим.

Задача 3.4. Виконані експериментальні дослідження роботи одношнекового екструдера (обсяг вибірки − 16). З'ясовано, що коефіцієнт парної кореляції між перепадом тиску на формувальному пристрої і температурою у середній зоні нагріву складає 0,51, а між перепадом тиску і частотою обертів шнека складає 0,74. Усі зазначені випадкові величини підпорядковуються нормальному закону розподілу.

Перевірити, чи можна вважати кореляційний зв'язок в обох випадках суттєвим, а також співставити довірчі границі цих коефіцієнтів.

Задача 3.5. При дослідженні властивостей вологої маси на сітці папероробної машини за даними сканувального пристрою отримано наступну інформацію про масу 1м^2 паперу:

Маса, г	160-168	168-176	176-185	185-194	194-202
Кількість вимірів	5	10	16	7	6

При заповненні таблиці у стовпець включали ті дані, значення яких не перебільшували верхньої межі інтервалу. Так, наприклад значення 168 г/м^2 внесено у перший стовпець, а значення 168,02 г/м^2 – у другий.

При рівні значущості α=0,05 перевірити гіпотезу про нормальність закону розподілу ймовірностей маси 1м^2 паперу, якщо визначено, що середнє значення становить 179,8 г/м^2, а стандартне відхилення – 8,4 г/м^2.

3.3. Індивідуальні завдання з перевірки статистичних гіпотез із самостійною обробкою експериментальних даних

Виконати завдання згідно з варіантом. Результати експериментальних досліджень об'єктів керування наведено у таблицях Додатку 1.

Увага! Перед умовою завдання вказано номер варіанту експериментальних даних.

1. **(№3)** Порівняти математичне сподівання μ_y показника якості (щільність) із заданою для системи керування величиною $Y_{задане}$=7. Числові характеристики Y визначити за табличними даними.

Рівень значущості α=0,10. Критична область двобічна. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$*,* $\boldsymbol{H_1}$*,* $\boldsymbol{M_y}$*,* $\boldsymbol{S^2_y}$*, критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$*, розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези*.

2. **(№4)** Перевірити статистичну гіпотезу про суттєвість кореляційного зв'язку між величинами Y та X_1.Рівень значущості α=0,10. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$*,* $\boldsymbol{H_1}$*, вибіркового коефіцієнта парної кореляції* $\boldsymbol{r_{x1,y}}$*, критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$*, розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези*.

3. **(№7)** Порівняти математичне сподівання μ_y показника якості (pH) із заданою для системи керування величиною $Y_{\text{задане}}$=10. Числові характеристики Y визначити за табличними даними. Рівень значущості α=0,05. Критична область однобічна. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* H_0*,* H_1*,* $\boldsymbol{M_y}$*,* $\mathbf{S^2_y}$*, критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$*, розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези*.

4. **(№8)** Перевірити статистичну гіпотезу про суттєвість кореляційного зв'язку між величинами Y та X_1.Рівень значущості α=0,05. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$*,* $\boldsymbol{H_1}$*, вибіркового коефіцієнта парної кореляції* $\boldsymbol{r_{x1,y}}$*, критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$*, розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези*.

5. **(№9)** При рівні значущості α=0,05 перевірити гіпотезу про нормальність закону розподілу ймовірностей випадкової величини, якщо відомі такі емпіричні та теоретичні частоти у відповідних інтервалах:

емпіричні частоти	6	12	16	40	13	8	5
теоретичні частоти	4	11	15	43	15	6	6

Критична область однобічна. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$*,* $\boldsymbol{H_1}$*, критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$*, розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези*.

6. **(№13)** Порівняти математичне сподівання μ_y показника якості (густина) із заданою для системи керування величиною $Y_{\text{задане}}$=6. Числові характеристики Y визначити за табличними даними. Рівень значущості α=0,05. Критична область двобічна.

Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез $\boldsymbol{H_0}$*,* $\boldsymbol{H_1}$*,* $\boldsymbol{M_y}$*,* $\mathbf{S^2}_{y}$*, критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$*, розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези.*

7. **(№14)** Перевірити статистичну гіпотезу про суттєвість кореляційного зв'язку між величинами Y та X_1.Рівень значущості α=0,02. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$*,* $\boldsymbol{H_1}$*, вибіркового коефіцієнта парної кореляції* $\boldsymbol{r_{x1,y}}$*, критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$*, розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези.*

8. **(№17)** Порівняти математичне сподівання μ_y показника якості (концентрація дрібної фракції) із заданою для системи керування величиною $Y_{задане}$=4. Числові характеристики Y визначити за табличними даними. Рівень значущості α=0,02. Критична область однобічна. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$*,* $\boldsymbol{H_1}$*,* $\boldsymbol{M_y}$*,* $\mathbf{S^2}_{y}$*, критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$*, розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези.*

9. **(№18)** Перевірити статистичну гіпотезу про суттєвість кореляційного зв'язку між величинами Y та X_1.Рівень значущості α=0,01. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$*,* $\boldsymbol{H_1}$*, вибіркового коефіцієнта парної кореляції* $\boldsymbol{r_{x1,y}}$*, критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$*, розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези.*

10. **(№19)** При рівні значущості α=0,05 перевірити гіпотезу про нормальність закону розподілу ймовірностей випадкової величини, якщо відомі такі емпіричні та теоретичні частоти у відповідних інтервалах:

емпіричні частоти	6	14	32	43	39	30	20
теоретичні частоти	7	12	29	48	35	34	18

Критична область однобічна. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$*,* $\boldsymbol{H_1}$*, критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$*, розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези.*

11. **(№23)** Порівняти математичне сподівання μ_y показника якості (концентрація дрібної фракції) із заданою для системи керування величиною $Y_{задане}$=9. Числові характеристики Y визначити за табличними даними. Рівень значущості α=0,02. Критична область двобічна. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$*,* $\boldsymbol{H_1}$*,* $\boldsymbol{M_y}$*,* $\mathbf{S^2}_{y}$*, критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$*, розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези.*

12. **(№24)** Перевірити статистичну гіпотезу про суттєвість кореляційного зв’язку між величинами *Y* та X_1.Рівень значущості α=0,10. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* **H_0, H_1**, *вибіркового коефіцієнта парної кореляції* $\boldsymbol{r_{x1,y}}$, *критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$, *розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези*.

13. **(№27)** Порівняти математичне сподівання μ_y показника якості (концентрація дрібної фракції) із заданою для системи керування величиною $Y_{задане}$=5. Числові характеристики *Y* визначити за табличними даними. Рівень значущості α=0,05. Критична область однобічна. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_1}$, $\boldsymbol{M_y}$, $\mathbf{S^2}_y$, *критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$, *розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези*.

14. **(№28)** Перевірити статистичну гіпотезу про суттєвість кореляційного зв’язку між величинами *Y* та X_1.Рівень значущості α=0,05. *Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез* $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_1}$, *вибіркового коефіцієнта парної кореляції* $\boldsymbol{r_{x1,y}}$, *критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$, *розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези*.

15. **(№30)** При рівні значущості α=0,05 перевірити гіпотезу про нормальність закону розподілу ймовірностей випадкової величини, якщо відомі такі емпіричні та теоретичні частоти у відповідних інтервалах:

емпіричні частоти	5	13	12	44	8	12	6
теоретичні частоти	2	20	12	35	15	10	6

Відповідь подати у вигляді основної та альтернативної гіпотез $\boldsymbol{H_0}$, $\boldsymbol{H_1}$, *критичного значення критерію* $\boldsymbol{K_{tabl}}$, *розрахованого значення критерію* $\boldsymbol{K_p}$ *та висновку про прийняття чи відхилення нульової гіпотези*.

Приклади подання відповідей

H_0	H_1	K_{tabl}	K_p	Висновок
Закон норм.	Закон не норм.	9,488	2,48	**H_0** прийняти

H_0	H_1	r_{yx1}	K_{tabl}	K_p	Висновок
$\rho_{yx1}=0$	$\rho_{yx1}\neq0$	0,556	3,143	1,799	**H_0** прийняти

H_0	H_1	M_y	S^2_y	K_{tabl}	K_p	Висновок
$\mu_y=21$	$\mu_y\neq21$	4,61	6,74	2,365	1,417	**H_0** прийняти

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. **Гмурман, В. Е**. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебн.пособ. для вузов / В. Е Гмурман. – М.: Высш. шк., 2000. – 479 с. – 20 000 экз. – ISBN 5-06-004214-6.

2. **Жученко, А. І.** Спеціальні розділи математики для дослідження комп′ютерних систем [Текст]: навч. посіб. / А. І. Жученко, Л. Д. Ярощук. – К.: ІВЦ «Видавництво “Політехніка”», 2002. – 208 с. – Бібліогр.: с. 204. – 200 прим. – ISBN 996-622-084-9.

3. **Жученко, А. І.** Оцінювання параметрів та перевірка статистичних гіпотез. Теорія та практика роботи з *MathCAD*, та *MatLab MS Excel* [Текст]: навч. посіб. / А. І. Жученко, Л. Д. Ярощук. – К.: НТУУ «КПІ», 2012. – 156 с. – Бібліогр.: с. 152 – 154. – 200 прим. – ISBN 978-966-622-524-8.

Д О Д А Т К И

Додаток 1.

Таблиці експериментальних даних

Варіант 1

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	6,5	7,0	9,5	9,8	10,5	12,4	9,7	9,9
X_2	9,7	9,9	10,8	9,0	8,3	8,9	9,6	9,6

Варіант 2

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	9,7	9,9	10,8	9,0	8,3	8,9	9,6	9,6
X_2	12,5	15,5	20,2	11,9	16,5	13,0	18,6	17,5

Варіант 3

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	12,5	15,5	20,2	11,9	16,5	13,0	18,6	17,5
X_2	11,6	12,0	10,9	11,8	9,8	10,2	11,4	10,5

Варіант 4

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	11,6	12,0	10,9	11,8	9,8	10,2	11,4	10,5
X_2	2,0	2,4	2,8	2,7	2,5	2,1	2,2	2,7

Варіант 5

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	2,0	2,4	2,8	2,7	2,5	2,1	2,2	2,7
X_2	2,2	2,4	2,7	2,5	2,1	2,0	2,2	3,0

Варіант 6

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	2,2	2,4	2,7	2,5	2,1	2,0	2,2	3,0
X_2	15,8	15,5	14,9	15,3	15,0	15,1	15,4	17,0

Варіант 7

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	15,8	15,5	14,9	15,3	15,0	15,1	15,4	17,0
X_2	15,4	15,6	15,7	15,5	15,2	15,1	14,9	16,3

Варіант 8

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	15,4	15,6	15,7	15,5	15,2	15,1	14,9	16,3
X_2	7,9	8,2	8,5	8,1	8,3	7,8	8,1	7,1

Варіант 9

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	7,9	8,2	8,5	8,1	8,3	7,8	8,1	7,1
X_2	8,1	8,4	8,7	8,2	7,9	7,8	7,6	8,2

Варіант 10

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	8,1	8,4	8,7	8,2	7,9	7,8	7,6	8,2
X_2	3,8	3,7	3,5	3,6	3,4	3,7	3,8	3,6

Варіант 11.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	3,8	3,7	3,5	3,6	3,4	3,7	3,8	3,6
X_2	3,8	4,0	4,2	3,9	3,6	3,5	3,6	3,4

Варіант 12.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	3,8	4,0	4,2	3,9	3,6	3,5	3,6	3,4
X_2	10,3	14,3	7,7	15,8	14,4	16,7	15,3	15,8

Варіант 13.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	10,3	14,3	7,7	15,8	14,4	16,7	15,3	15,8
X_2	20,2	17,1	17,7	18,6	14,3	19,9	24,4	39,1

Варіант 14.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	20,2	17,1	17,7	18,6	14,3	19,9	24,4	39,1
X_2	16,5	17,0	19,5	19,8	20,5	22,4	19,7	19,9

Варіант 15.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	16,5	17,0	19,5	19,8	20,5	22,4	19,7	19,9
X_2	19,7	19,9	20,8	19,0	18,3	18,9	19,6	19,6

Варіант 16.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	19,7	19,9	20,8	19,0	18,3	18,9	19,6	19,6
X_2	22,5	25,5	30,2	21,9	26,5	23,0	28,6	27,5

Варіант 17.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	22,5	25,5	30,2	21,9	26,5	23,0	28,6	27,5
X_2	21,6	22,0	20,9	21,8	19,8	20,2	21,4	20,5

Варіант 18.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	21,6	22,0	20,9	21,8	19,8	20,2	21,4	20,5
X_2	12,0	12,4	12,8	12,7	12,5	12,1	12,2	12,7

Варіант 19.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	12,0	12,4	12,8	12,7	12,5	12,1	12,2	12,7
X_2	12,2	12,4	12,7	12,5	12,1	12,0	12,2	13,0

Варіант 20.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	12,2	12,4	12,7	12,5	12,1	12,0	12,2	13,0
X_2	25,8	25,5	24,9	25,3	25,0	25,1	25,4	27,0

Варіант 21.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	25,8	25,5	24,9	25,3	25,0	25,1	25,4	27,0
X_2	25,4	25,6	25,7	25,5	25,2	25,1	24,9	26,3

Варіант 22.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	25,4	25,6	25,7	25,5	25,2	25,1	24,9	26,3
X_2	17,9	18,2	18,5	18,1	18,3	17,8	18,1	17,1

Варіант 23.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	17,9	18,2	18,5	18,1	18,3	17,8	18,1	17,1
X_2	18,1	18,4	18,7	18,2	17,9	17,8	17,6	18,2

Варіант 24.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	18,1	18,4	18,7	18,2	17,9	17,8	17,6	18,2
X_2	13,8	13,7	13,5	13,6	13,4	13,7	13,8	13,6

Варіант 25.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	13,8	13,7	13,5	13,6	13,4	13,7	13,8	13,6
X_2	13,8	14,0	14,2	13,9	13,6	13,5	13,6	13,4

Варіант 26.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	13,8	14,0	14,2	13,9	13,6	13,5	13,6	13,4
X_2	20,3	24,3	17,7	25,8	24,4	26,7	25,3	25,8

Варіант 27.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	20,3	24,3	17,7	25,8	24,4	26,7	25,3	25,8
X_2	30,2	27,1	27,7	28,6	24,3	29,9	34,4	49,1

Варіант 28.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	30,2	27,1	27,7	28,6	24,3	29,9	34,4	49,1
X_2	2,5	5,0	7,5	7,8	8,5	10,4	7,7	7,9

Варіант 29.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	2,5	5,0	7,5	7,8	8,5	10,4	7,7	7,9
X_2	5,7	5,9	6,8	5,0	4,3	4,9	5,6	5,6

Варіант 30.

Y	0,5	3,0	4,0	2,5	5,0	6,8	7,0	8,1
X_1	5,7	5,9	6,8	5,0	4,3	4,9	5,6	5,6
X_2	8,5	11,5	16,2	7,9	12,5	9,0	14,6	13,5

Додаток 2

Таблиця Д2. Критичні значення для *t*–критерію (Стьюдента)

Кількість степенів вільності *k*	**Рівень значущості α (двобічна критична область)**					
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
1	**6.314**	**12.706**	**31.821**	**63.657**	**318.309**	**636.619**
2	**2.920**	**4.303**	**6.965**	**9.925**	**22.327**	**31.599**
3	**2.353**	**3.182**	**4.541**	**5.841**	**10.215**	**12.924**
4	**2.132**	**2.776**	**3.747**	**4.604**	**7.173**	**8.610**
5	**2.015**	**2.571**	**3.365**	**4.032**	**5.893**	**6.869**
6	**1.943**	**2.447**	**3.143**	**3.707**	**5.208**	**5.959**
7	**1.895**	**2.365**	**2.998**	**3.499**	**4.785**	**5.408**
8	**1.860**	**2.306**	**2.896**	**3.355**	**4.501**	**5.041**
9	**1.833**	**2.262**	**2.821**	**3.25**	**4.297**	**4.781**
10	**1.812**	**2.228**	**2.764**	**3.169**	**4.144**	**4.587**
11	**1.796**	**2.201**	**2.718**	**3.106**	**4.025**	**4.437**
12	**1.782**	**2.179**	**2.681**	**3.055**	**3.930**	**4.318**
13	**1.771**	**2.160**	**2.650**	**3.012**	**3.852**	**4.221**
14	**1.761**	**2.145**	**2.624**	**2.977**	**3.787**	**4.140**
15	**1.753**	**2.131**	**2.602**	**2.947**	**3.733**	**4.073**
16	**1.746**	**2.120**	**2.583**	**2.921**	**3.686**	**4.015**
17	**1.740**	**2.110**	**2.567**	**2.898**	**3.646**	**3.965**
18	**1.734**	**2.101**	**2.552**	**2.878**	**3.610**	**3.922**
19	**1.729**	**2.093**	**2.539**	**2.861**	**3.579**	**3.883**
20	**1.725**	**2.086**	**2.528**	**2.845**	**3.552**	**3.850**
21	**1.721**	**2.080**	**2.518**	**2.831**	**3.527**	**3.819**
22	**1.717**	**2.074**	**2.508**	**2.819**	**3.505**	**3.792**
23	**1.714**	**2.069**	**2.500**	**2.807**	**3.485**	**3.768**
24	**1.711**	**2.064**	**2.492**	**2.797**	**3.467**	**3.745**
25	**1.708**	**2.060**	**2.485**	**2.787**	**3.450**	**3.725**
26	**1.706**	**2.056**	**2.479**	**2.779**	**3.435**	**3.707**
27	**1.703**	**2.052**	**2.473**	**2.771**	**3.421**	**3.690**
28	**1.701**	**2.048**	**2.467**	**2.763**	**3.408**	**3.674**
29	**1.699**	**2.045**	**2.462**	**2.756**	**3.396**	**3.659**
30	**1.697**	**2.042**	**2.457**	**2.75**	**3.385**	**3.646**
31	**1.696**	**2.040**	**2.453**	**2.744**	**3.375**	**3.633**
32	**1.694**	**2.037**	**2.449**	**2.738**	**3.365**	**3.622**
33	**1.692**	**2.035**	**2.445**	**2.733**	**3.356**	**3.611**
34	**1.691**	**2.032**	**2.441**	**2.728**	**3.348**	**3.601**
35	**1.690**	**2.030**	**2.438**	**2.724**	**3.340**	**3.591**
36	**1.688**	**2.028**	**2.434**	**2.719**	**3.333**	**3.582**
37	**1.687**	**2.026**	**2.431**	**2.715**	**3.326**	**3.574**
38	**1.686**	**2.024**	**2.429**	**2.712**	**3.319**	**3.566**
39	**1.685**	**2.023**	**2.426**	**2.708**	**3.313**	**3.558**
40	**1.684**	**2.021**	**2.423**	**2.704**	**3.307**	**3.551**
41	**1.683**	**2.020**	**2.421**	**2.701**	**3.301**	**3.544**
42	**1.682**	**2.018**	**2.418**	**2.698**	**3.296**	**3.538**
43	**1.681**	**2.017**	**2.416**	**2.695**	**3.291**	**3.532**
44	**1.680**	**2.015**	**2.414**	**2.692**	**3.286**	**3.526**
45	**1.679**	**2.014**	**2.412**	**2.69**	**3.281**	**3.520**
46	**1.679**	**2.013**	**2.410**	**2.687**	**3.277**	**3.515**
47	**1.678**	**2.012**	**2.408**	**2.685**	**3.273**	**3.510**
48	**1.677**	**2.011**	**2.407**	**2.682**	**3.269**	**3.505**
49	**1.677**	**2.010**	**2.405**	**2.68**	**3.265**	**3.500**
50	**1.676**	**2.009**	**2.403**	**2.678**	**3.261**	**3.496**
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Продовження табл.Д2.

Кількість степенів вільності *k*	**Рівень значущості α (двобічна критична область**					
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
51	**1.675**	**2.008**	**2.402**	**2.676**	**3.258**	**3.492**
52	**1.675**	**2.007**	**2.400**	**2.674**	**3.255**	**3.488**
53	**1.674**	**2.006**	**2.399**	**2.672**	**3.251**	**3.484**
54	**1.674**	**2.005**	**2.397**	**2.670**	**3.248**	**3.480**
55	**1.673**	**2.004**	**2.396**	**2.668**	**3.245**	**3.476**
56	**1.673**	**2.003**	**2.395**	**2.667**	**3.242**	**3.473**
57	**1.672**	**2.002**	**2.394**	**2.665**	**3.239**	**3.470**
58	**1.672**	**2.002**	**2.392**	**2.663**	**3.237**	**3.466**
59	**1.671**	**2.001**	**2.391**	**2.662**	**3.234**	**3.463**
60	**1.671**	**2.000**	**2.390**	**2.660**	**3.232**	**3.460**
61	**1.670**	**2.000**	**2.389**	**2.659**	**3.229**	**3.457**
62	**1.670**	**1.999**	**2.388**	**2.657**	**3.227**	**3.454**
63	**1.669**	**1.998**	**2.387**	**2.656**	**3.225**	**3.452**
64	**1.669**	**1.998**	**2.386**	**2.655**	**3.223**	**3.449**
65	**1.669**	**1.997**	**2.385**	**2.654**	**3.220**	**3.447**
66	**1.668**	**1.997**	**2.384**	**2.652**	**3.218**	**3.444**
67	**1.668**	**1.996**	**2.383**	**2.651**	**3.216**	**3.442**
68	**1.668**	**1.995**	**2.382**	**2.650**	**3.214**	**3.439**
69	**1.667**	**1.995**	**2.382**	**2.649**	**3.213**	**3.437**
70	**1.667**	**1.994**	**2.381**	**2.648**	**3.211**	**3.435**
71	**1.667**	**1.994**	**2.380**	**2.647**	**3.209**	**3.433**
72	**1.666**	**1.993**	**2.379**	**2.646**	**3.207**	**3.431**
73	**1.666**	**1.993**	**2.379**	**2.645**	**3.206**	**3.429**
74	**1.666**	**1.993**	**2.378**	**2.644**	**3.204**	**3.427**
75	**1.665**	**1.992**	**2.377**	**2.643**	**3.202**	**3.425**
76	**1.665**	**1.992**	**2.376**	**2.642**	**3.201**	**3.423**
77	**1.665**	**1.991**	**2.376**	**2.641**	**3.199**	**3.421**
78	**1.665**	**1.991**	**2.375**	**2.640**	**3.198**	**3.420**
79	**1.664**	**1.990**	**2.374**	**2.640**	**3.197**	**3.418**
80	**1.664**	**1.990**	**2.374**	**2.639**	**3.195**	**3.416**
81	**1.664**	**1.990**	**2.373**	**2.638**	**3.194**	**3.415**
82	**1.664**	**1.989**	**2.373**	**2.637**	**3.193**	**3.413**
83	**1.663**	**1.989**	**2.372**	**2.636**	**3.191**	**3.412**
84	**1.663**	**1.989**	**2.372**	**2.636**	**3.190**	**3.410**
85	**1.663**	**1.988**	**2.371**	**2.635**	**3.189**	**3.409**
86	**1.663**	**1.988**	**2.370**	**2.634**	**3.188**	**3.407**
87	**1.663**	**1.988**	**2.370**	**2.634**	**3.187**	**3.406**
88	**1.662**	**1.987**	**2.369**	**2.633**	**3.185**	**3.405**
89	**1.662**	**1.987**	**2.369**	**2.632**	**3.184**	**3.403**
90	**1.662**	**1.987**	**2.368**	**2.632**	**3.183**	**3.402**
91	**1.662**	**1.986**	**2.368**	**2.631**	**3.182**	**3.401**
92	**1.662**	**1.986**	**2.368**	**2.630**	**3.181**	**3.399**
93	**1.661**	**1.986**	**2.367**	**2.630**	**3.180**	**3.398**
94	**1.661**	**1.986**	**2.367**	**2.629**	**3.179**	**3.397**
95	**1.661**	**1.985**	**2.366**	**2.629**	**3.178**	**3.396**
96	**1.661**	**1.985**	**2.366**	**2.628**	**3.177**	**3.395**
97	**1.661**	**1.985**	**2.365**	**2.627**	**3.176**	**3.394**
98	**1.661**	**1.984**	**2.365**	**2.627**	**3.175**	**3.393**
99	**1.660**	**1.984**	**2.365**	**2.626**	**3.175**	**3.392**
100	**1.660**	**1.984**	**2.364**	**2.626**	**3.174**	**3.39**
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Продовження табл.Д2.

Кількість степенів вільності *k*	Рівень значущості α (двобічна критична область					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
101	**1.660**	**1.984**	**2.364**	**2.625**	**3.173**	**3.389**
102	**1.660**	**1.983**	**2.363**	**2.625**	**3.172**	**3.388**
103	**1.660**	**1.983**	**2.363**	**2.624**	**3.171**	**3.388**
104	**1.660**	**1.983**	**2.363**	**2.624**	**3.170**	**3.387**
105	**1.659**	**1.983**	**2.362**	**2.623**	**3.170**	**3.386**
106	**1.659**	**1.983**	**2.362**	**2.623**	**3.169**	**3.385**
107	**1.659**	**1.982**	**2.362**	**2.623**	**3.168**	**3.384**
108	**1.659**	**1.982**	**2.361**	**2.622**	**3.167**	**3.383**
109	**1.659**	**1.982**	**2.361**	**2.622**	**3.167**	**3.382**
110	**1.659**	**1.982**	**2.361**	**2.621**	**3.166**	**3.381**
111	**1.659**	**1.982**	**2.360**	**2.621**	**3.165**	**3.380**
112	**1.659**	**1.981**	**2.360**	**2.620**	**3.165**	**3.380**
113	**1.658**	**1.981**	**2.360**	**2.620**	**3.164**	**3.379**
114	**1.658**	**1.981**	**2.360**	**2.620**	**3.163**	**3.378**
115	**1.658**	**1.981**	**2.359**	**2.619**	**3.163**	**3.377**
116	**1.658**	**1.981**	**2.359**	**2.619**	**3.162**	**3.376**
117	**1.658**	**1.980**	**2.359**	**2.619**	**3.161**	**3.376**
118	**1.658**	**1.980**	**2.358**	**2.618**	**3.161**	**3.375**
119	**1.658**	**1.980**	**2.358**	**2.618**	**3.160**	**3.374**
120	**1.658**	**1.980**	**2.358**	**2.617**	**3.160**	**3.373**
121	**1.658**	**1.980**	**2.358**	**2.617**	**3.159**	**3.373**
122	**1.657**	**1.980**	**2.357**	**2.617**	**3.158**	**3.372**
123	**1.657**	**1.979**	**2.357**	**2.616**	**3.158**	**3.371**
124	**1.657**	**1.979**	**2.357**	**2.616**	**3.157**	**3.371**
125	**1.657**	**1.979**	**2.357**	**2.616**	**3.157**	**3.370**
126	**1.657**	**1.979**	**2.356**	**2.615**	**3.156**	**3.369**
127	**1.657**	**1.979**	**2.356**	**2.615**	**3.156**	**3.369**
128	**1.657**	**1.979**	**2.356**	**2.615**	**3.155**	**3.368**
129	**1.657**	**1.979**	**2.356**	**2.614**	**3.155**	**3.368**
130	**1.657**	**1.978**	**2.355**	**2.614**	**3.154**	**3.367**
131	**1.657**	**1.978**	**2.355**	**2.614**	**3.154**	**3.366**
132	**1.656**	**1.978**	**2.355**	**2.614**	**3.153**	**3.366**
133	**1.656**	**1.978**	**2.355**	**2.613**	**3.153**	**3.365**
134	**1.656**	**1.978**	**2.354**	**2.613**	**3.152**	**3.365**
135	**1.656**	**1.978**	**2.354**	**2.613**	**3.152**	**3.364**
136	**1.656**	**1.978**	**2.354**	**2.612**	**3.151**	**3.364**
137	**1.656**	**1.977**	**2.354**	**2.612**	**3.151**	**3.363**
138	**1.656**	**1.977**	**2.354**	**2.612**	**3.150**	**3.362**
139	**1.656**	**1.977**	**2.353**	**2.612**	**3.150**	**3.362**
140	**1.656**	**1.977**	**2.353**	**2.611**	**3.149**	**3.361**
141	**1.656**	**1.977**	**2.353**	**2.611**	**3.149**	**3.361**
142	**1.656**	**1.977**	**2.353**	**2.611**	**3.149**	**3.360**
143	**1.656**	**1.977**	**2.353**	**2.611**	**3.148**	**3.360**
144	**1.656**	**1.977**	**2.353**	**2.61**	**3.148**	**3.359**
145	**1.655**	**1.976**	**2.352**	**2.61**	**3.147**	**3.359**
146	**1.655**	**1.976**	**2.352**	**2.61**	**3.147**	**3.358**
147	**1.655**	**1.976**	**2.352**	**2.61**	**3.147**	**3.358**
148	**1.655**	**1.976**	**2.352**	**2.609**	**3.146**	**3.357**
149	**1.655**	**1.976**	**2.352**	**2.609**	**3.146**	**3.357**
150	**1.655**	**1.976**	**2.351**	**2.609**	**3.145**	**3.357**
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Додаток 3

Таблиця Д3. Критичні значення для χ^2–критерію (Пірсона)

k	Імовірність, (%)								
	99,95	99,9	99,5	99,0	97,5	95,0	90,0	80,0	70,0
1	0,0393	0,0157	0,0393	0,0157	0,0982	0,0393	0,0158	0,0642	0,148
2	0,0100	0,0200	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,713
3	0,0153	0,0243	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,005	1,424
4	0,0639	0,0908	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,649	2,195
5	0,158	0,210	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,343	3,000
6	0,299	0,381	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,070	3,828
7	0,485	0,598	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	3,822	4,671
8	0,710	0,857	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	4,594	5,527
9	0,972	1,153	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,380	6,393
10	1,265	1,479	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,179	7,267
11	1,587	1,834	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	6,989	8,148
12	1,934	2,214	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	7,807	9,034
13	2,305	2,617	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	8,634	9,926
14	2,697	3,041	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	9,467	10,821
15	3,108	3,483	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	10,307	11,721
16	3,536	3,942	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,152	12,624
17	3,980	4,416	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,002	13,531
18	4,439	4,905	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	12,857	14,440
19	4,912	5,407	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	13,716	15,352
20	5,398	5,921	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	14,578	16,266
21	5,896	6,447	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	15,445	17,182
22	6,404	6,983	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	16,314	18,101
23	6,924	7,529	9,260	10,196	11,688	13,091	14,848	17,187	19,021
24	7,453	8,085	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	18,062	19,943
25	7,991	8,649	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	18,940	20,867
26	8,538	9,222	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	19,820	21,792
27	9,093	9,803	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	20,703	22,719
28	9,656	10,391	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	21,588	23,647
29	10,227	10,986	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	22,475	24,577
30	10,804	11,588	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	23,364	25,508
31	11,389	12,196	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	24,255	26,440
32	11,979	12,811	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	25,148	27,373
33	12,576	13,431	15,815	17,073	19,047	20,867	23,110	26,042	28,307
34	13,179	14,057	16,501	17,789	19,806	21,664	23,952	26,938	29,242
35	13,788	14,688	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	27,836	30,178
36	14,401	15,324	17,887	19,233	21,336	23,269	25,643	28,735	31,115
37	15,020	15,965	18,586	19,960	22,106	24,075	26,492	29,635	32,053
38	15.644	16,611	19,289	20,691	22,878	24,884	27,343	30,537	32,992
39	16,273	17,262	19,996	21,426	23,654	25,695	28,196	31,441	33,932
40	16,906	17,916	20,707	22,164	24,453	26,509	29,051	32,345	34,872

Продовження табл.Д3.

k	Імовірність, (%)											
	60,0	50,0	40,0	30,0	20,0	10,0	5,0	2,5	1,0	0,5	0,1	0,05
1	0,275	0,455	0,708	1,074	1,642	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828	12,116
2	1,022	1,386	1,833	2,408	3,219	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816	15,202
3	1,869	2,366	2,946	3,665	4,642	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266	17,730
4	2,753	3,357	4,045	4,878	5,989	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467	19,997
5	3,655	4,351	5,132	6,064	7,289	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750	20,515	22,105
6	4,570	5,348	6,211	7,231	8,558	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	22,458	24,103
7	5,493	6,346	7,283	8,383	9,803	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	24,322	26,018
8	6,423	7,344	8,351	9,524	11,030	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	26,125	27,868
9	7,357	8,343	9,414	10,656	12,242	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	27,877	29,666
10	8,295	9,342	10,473	11,781	13,442	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	29,588	31,420
11	9,237	10,341	11,530	12,899	14,631	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	31,264	33,136
12	10,182	11,340	12,584	14,011	15,812	18,549	21,026	23,336	26,217	28,300	32,909	34,821
13	11,129	12,340	13,636	15,119	16,985	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	34,528	36,478
14	12,079	13,339	14,685	16,222	18,151	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	36,123	38,109
15	13,030	14,339	15,733	17,322	19,311	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	37,697	39,719
16	13,983	15,338	16,780	18,418	20,465	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	39,252	41,308
17	14,937	16,338	17,824	19,511	21,615	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	40,790	42,879
18	15,893	17,338	18,868	20,601	22,760	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	42,312	44,434
19	16,850	18,338	19,910	21,689	23,900	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	43,820	45,973
20	17,809	19,337	20,951	22,775	25,038	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997	45,315	47,498
21	18,768	20,337	21,991	23,858	26,171	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401	46,797	49,010
22	19,729	21,337	23,031	24,939	27,301	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796	48,268	50,511
23	20,690	22,337	24,069	26,018	28,429	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181	49,728	52,000
24	21,652	23,337	26,106	27,096	29,553	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558	51,179	53,479
25	22,616	24,337	26,143	28,172	30,675	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928	52,620	54,947
26	23,579	25,336	27,179	29,246	31,795	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290	54,052	56,407
27	24,544	26,336	28,214	30,319	32,912	36,741	40,113	43,194	46,963	49,645	55,476	57,858
28	25,509	27,336	29,249	31,391	34,027	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993	56,892	59,300
29	26,475	28,336	30,283	32,461	35,139	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336	58,301	60,735
30	27,442	29,336	31,316	33,530	36,250	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672	59,703	62,162
31	28,409	30,336	32,349	34,598	37,359	41,422	44,985	48,232	52,191	55,003	61,098	63,582
32	29,376	31,336	33,381	35,665	38,466	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328	62,487	64,995
33	30,344	32,336	34,413	36,731	39,572	43,745	47,400	50,725	54,776	57,648	63,870	66,402
34	31,313	33,336	35,444	37,795	40,676	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964	65,247	67,803
35	32,282	34,336	36,475	38,859	41,778	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275	66,619	69,199
36	33,252	35,336	37,505	39,922	42,879	47,212	50,998	54,437	58,619	61,581	67,985	70,588
37	34,222	36,336	38,535	40,984	43,978	48,363	52,192	55,668	59,892	62,882	69,346	71,972
38	35,192	37,335	39,564	42,045	45,076	49,513	53,384	56,895	61,162	64,181	70,703	73,351
39	36,163	38,335	40,593	43,105	46,173	50,660	54,572	58,120	62,428	65,476	72,055	74,725
40	37,174	39,335	41,622	44,165	47,269	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766	73,402	76,095

Додаток 4

Таблиця Д4.Критичні значення для F – критерію (Фішера) при α =5%
(**$k_{\text{більш}}$** – степені вільності дисперсії у чисельнику,
$k_{\text{менш}}$ – степені вільності дисперсії у знаменнику критерія)

$k_{\text{менш}}$	**$k_{\text{більш}}$**								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385
3	10.128	9.5521	9.1172	9.1172	9.0135	8.9406	8.8868	8.8152	8.8103
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.1881	6.3560	6.1694	6.0043	6.0410	5.9988
5	6.6679	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2066	4.1468	4.0990
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8378	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881
9	5.1174	4.2565	3.8626	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563
19	4.3808	3.5319	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227
20	4.3513	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3661
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419
23	4.2793	3.4221	3.0380	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821
26	4.2252	3.3690	2.9751	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655
27	4.2103	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2782	2.2229
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107
40	4.0848	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.24oo	2.1802	2.1240
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2540	2.1665	2.0970	2.0401
120	3.9201	3.0718	2.6803	2.4472	2.2900	2.1750	2.0867	2.0164	1.9588
∞	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799

Продовження табл.Д4.

$k_{менш}$	$k_{більш}$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,447	199,5	215,707	224,583	230,161	233,98	236,76	238,882	240,54	241,881
2	18,5128	19	19,1643	19,2468	19,2964	19,329	19,353	19,371	19,384	19,3959
3	10,128	9,552	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8867	8,8452	8,8123	8,7855
4	7,7086	6,944	6,5914	6,3882	6,2561	6,1631	6,0942	6,041	5,9988	5,9644
5	6,6079	5,786	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725	4,7351
6	5,9874	5,143	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2067	4,1468	4,099	4,06
7	5,5914	4,737	4,3468	4,1203	3,9715	3,866	3,787	3,7257	3,6767	3,6365
8	5,3177	4,459	4,0662	3,8379	3,6875	3,5806	3,5005	3,4381	3,3881	3,3472
9	5,1174	4,256	3,8625	3,6331	3,4817	3,3738	3,2927	3,2296	3,1789	3,1373
10	4,9646	4,102	3,7083	3,478	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204	2,9782
11	4,8443	3,982	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946	3,0123	2,948	2,8962	2,8536
12	4,7472	3,885	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964	2,7534
13	4,6672	3,805	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144	2,671
14	4,6001	3,738	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458	2,6022
15	4,5431	3,682	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876	2,5437
16	4,494	3,633	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413	2,6572	2,5911	2,5377	2,4935
17	4,4513	3,591	3,1968	2,9647	2,81	2,6987	2,6143	2,548	2,4943	2,4499
18	4,4139	3,554	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613	2,5767	2,5102	2,4563	2,4117
19	4,3807	3,521	3,1274	2,8951	2,7401	2,6283	2,5435	2,4768	2,4227	2,3779
20	4,3512	3,492	3,0984	2,8661	2,7109	2,599	2,514	2,4471	2,3928	2,3479
21	4,3248	3,466	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727	2,4876	2,4205	2,366	2,321
22	4,3009	3,443	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491	2,4638	2,3965	2,3419	2,2967
23	4,2793	3,422	3,028	2,7955	2,64	2,5277	2,4422	2,3748	2,3201	2,2747
24	4,2597	3,402	3,0088	2,7763	2,6207	2,5082	2,4226	2,3551	2,3002	2,2547
25	4,2417	3,385	2,9912	2,7587	2,603	2,4904	2,4047	2,3371	2,2821	2,2365
26	4,2252	3,369	2,9752	2,7426	2,5868	2,4741	2,3883	2,3205	2,2655	2,2197
27	4,21	3,354	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591	2,3732	2,3053	2,2501	2,2043
28	4,196	3,340	2,9467	2,7141	2,5581	2,4453	2,3593	2,2913	2,236	2,19
29	4,183	3,327	2,934	2,7014	2,5454	2,4324	2,3463	2,2783	2,2229	2,1768
30	4,1709	3,315	2,9223	2,6896	2,5336	2,4205	2,3343	2,2662	2,2107	2,1646
40	4,0847	3,231	2,8387	2,606	2,4495	2,3359	2,249	2,1802	2,124	2,0772
50	4,0343	3,182	2,79	2,5572	2,4004	2,2864	2,1992	2,1299	2,0734	2,0261
60	4,0012	3,150	2,7581	2,5252	2,3683	2,2541	2,1665	2,097	2,0401	1,9926
70	3,9778	3,127	2,7355	2,5027	2,3456	2,2312	2,1435	2,0737	2,0166	1,9689
80	3,9604	3,110	2,7188	2,4859	2,3287	2,2142	2,1263	2,0564	1,9991	1,9512
90	3,9469	3,097	2,7058	2,4729	2,3157	2,2011	2,1131	2,043	1,9856	1,9376
100	3,9361	3,087	2,6955	2,4626	2,3053	2,1906	2,1025	2,0323	1,9748	1,9267
110	3,9274	3,078	2,6871	2,4542	2,2969	2,1821	2,0939	2,0236	1,9661	1,9178
120	3,9201	3,071	2,6802	2,4472	2,2899	2,175	2,0868	2,0164	1,9588	1,9105
∞	3,8415	2,995	2,6049	2,3719	2,2141	2,0986	2,0096	1,9384	1,8799	1,8307

Продовження табл.Д4.

$k_{менш}$	$k_{більш}$									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	242,983	243,90	244,689	245,36	245,949	246,463	246,918	247,323	247,686	248,013
2	19,405	19,412	19,4189	19,424	19,4291	19,4333	19,437	19,4402	19,4431	19,4458
3	8,7633	8,7446	8,7287	8,7149	8,7029	8,6923	8,6829	8,6745	8,667	8,6602
4	5,9358	5,9117	5,8911	5,8733	5,8578	5,8441	5,832	5,8211	5,8114	5,8025
5	4,704	4,6777	4,6552	4,6358	4,6188	4,6038	4,5904	4,5785	4,5678	4,5581
6	4,0274	3,9999	3,9764	3,9559	3,9381	3,9223	3,9083	3,8957	3,8844	3,8742
7	3,603	3,5747	3,5503	3,5292	3,5107	3,4944	3,4799	3,4669	3,4551	3,4445
8	3,313	3,2839	3,259	3,2374	3,2184	3,2016	3,1867	3,1733	3,1613	3,1503
9	3,1025	3,0729	3,0475	3,0255	3,0061	2,989	2,9737	2,96	2,9477	2,9365
10	2,943	2,913	2,8872	2,8647	2,845	2,8276	2,812	2,798	2,7854	2,774
11	2,8179	2,7876	2,7614	2,7386	2,7186	2,7009	2,6851	2,6709	2,6581	2,6464
12	2,7173	2,6866	2,6602	2,6371	2,6169	2,5989	2,5828	2,5684	2,5554	2,5436
13	2,6347	2,6037	2,5769	2,5536	2,5331	2,5149	2,4987	2,4841	2,4709	2,4589
14	2,5655	2,5342	2,5073	2,4837	2,463	2,4446	2,4282	2,4134	2,4	2,3879
15	2,5068	2,4753	2,4481	2,4244	2,4034	2,3849	2,3683	2,3533	2,3398	2,3275
16	2,4564	2,4247	2,3973	2,3733	2,3522	2,3335	2,3167	2,3016	2,288	2,2756
17	2,4126	2,3807	2,3531	2,329	2,3077	2,2888	2,2719	2,2567	2,2429	2,2304
18	2,3742	2,3421	2,3143	2,29	2,2686	2,2496	2,2325	2,2172	2,2033	2,1906
19	2,3402	2,308	2,28	2,2556	2,2341	2,2149	2,1977	2,1823	2,1683	2,1555
20	2,31	2,2776	2,2495	2,225	2,2033	2,184	2,1667	2,1511	2,137	2,1242
21	2,2829	2,2504	2,2222	2,1975	2,1757	2,1563	2,1389	2,1232	2,109	2,096
22	2,2585	2,2258	2,1975	2,1727	2,1508	2,1313	2,1138	2,098	2,0837	2,0707
23	2,2364	2,2036	2,1752	2,1502	2,1282	2,1086	2,091	2,0751	2,0608	2,0476
24	2,2163	2,1834	2,1548	2,1298	2,1077	2,088	2,0703	2,0543	2,0399	2,0267
25	2,1979	2,1649	2,1362	2,1111	2,0889	2,0691	2,0513	2,0353	2,0207	2,0075
26	2,1811	2,1479	2,1192	2,0939	2,0716	2,0518	2,0339	2,0178	2,0032	1,9898
27	2,1655	2,1323	2,1035	2,0781	2,0558	2,0358	2,0179	2,0017	1,987	1,9736
28	2,1512	2,1179	2,0889	2,0635	2,0411	2,021	2,003	1,9868	1,972	1,9586
29	2,1379	2,1045	2,0755	2,05	2,0275	2,0073	1,9893	1,973	1,9581	1,9446
30	2,1256	2,0921	2,063	2,0374	2,0148	1,9946	1,9765	1,9601	1,9452	1,9317
40	2,0376	2,0035	1,9738	1,9476	1,9245	1,9037	1,8851	1,8682	1,8529	1,8389
50	1,9861	1,9515	1,9214	1,8949	1,8714	1,8503	1,8313	1,8141	1,7985	1,7841
60	1,9522	1,9174	1,887	1,8602	1,8364	1,8151	1,7959	1,7784	1,7625	1,748
70	1,9283	1,8932	1,8627	1,8357	1,8117	1,7902	1,7708	1,7531	1,7371	1,7223
80	1,9105	1,8753	1,8445	1,8174	1,7932	1,7716	1,752	1,7342	1,718	1,7032
90	1,8967	1,8613	1,8305	1,8032	1,7789	1,7571	1,7375	1,7196	1,7033	1,6883
100	1,8857	1,8503	1,8193	1,7919	1,7675	1,7456	1,7259	1,7079	1,6915	1,6764
110	1,8767	1,8412	1,8101	1,7827	1,7582	1,7363	1,7164	1,6984	1,6819	1,6667
120	1,8693	1,8337	1,8026	1,775	1,7505	1,7285	1,7085	1,6904	1,6739	1,6587
∞	1,7887	1,7522	1,7202	1,6918	1,6664	1,6435	1,6228	1,6039	1,5865	1,5705

Продовження табл. Д4.

$k_{менш}$	$k_{більш}$									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	248,309	248,579	248,825	249,051	249,260	249,452	249,630	249,796	249,95	250,095
2	19,4481	19,4503	19,4523	19,4541	19,4558	19,4573	19,4587	19,46	19,461	19,4624
3	8,654	8,6484	8,6432	8,6385	8,6341	8,6301	8,6263	8,6229	8,6196	8,6166
4	5,7945	5,7872	5,7805	5,7744	5,7687	5,7635	5,7586	5,7541	5,7498	5,7459
5	4,5493	4,5413	4,5339	4,5272	4,5209	4,5151	4,5097	4,5047	4,5001	4,4957
6	3,8649	3,8564	3,8486	3,8415	3,8348	3,8287	3,823	3,8177	3,8128	3,8082
7	3,4349	3,426	3,4179	3,4105	3,4036	3,3972	3,3913	3,3858	3,3806	3,3758
8	3,1404	3,1313	3,1229	3,1152	3,1081	3,1015	3,0954	3,0897	3,0844	3,0794
9	2,9263	2,9169	2,9084	2,9005	2,8932	2,8864	2,8801	2,8743	2,8688	2,8637
10	2,7636	2,7541	2,7453	2,7372	2,7298	2,7229	2,7164	2,7104	2,7048	2,6996
11	2,6358	2,6261	2,6172	2,609	2,6014	2,5943	2,5877	2,5816	2,5759	2,5705
12	2,5328	2,5229	2,5139	2,5055	2,4977	2,4905	2,4838	2,4776	2,4718	2,4663
13	2,4479	2,4379	2,4287	2,4202	2,4123	2,405	2,3982	2,3918	2,3859	2,3803
14	2,3768	2,3667	2,3573	2,3487	2,3407	2,3333	2,3264	2,3199	2,3139	2,3082
15	2,3163	2,306	2,2966	2,2878	2,2797	2,2722	2,2652	2,2587	2,2525	2,2468
16	2,2642	2,2538	2,2443	2,2354	2,2272	2,2196	2,2125	2,2059	2,1997	2,1938
17	2,2189	2,2084	2,1987	2,1898	2,1815	2,1738	2,1666	2,1599	2,1536	2,1477
18	2,1791	2,1685	2,1587	2,1497	2,1413	2,1335	2,1262	2,1195	2,1131	2,1071
19	2,1438	2,1331	2,1233	2,1141	2,1057	2,0978	2,0905	2,0836	2,0772	2,0712
20	2,1124	2,1016	2,0917	2,0825	2,0739	2,066	2,0586	2,0517	2,0452	2,0391
21	2,0842	2,0733	2,0633	2,054	2,0454	2,0374	2,0299	2,0229	2,0164	2,0102
22	2,0587	2,0478	2,0377	2,0283	2,0196	2,0116	2,004	1,997	1,9904	1,9842
23	2,0356	2,0246	2,0144	2,005	1,9963	1,9881	1,9805	1,9734	1,9668	1,9605
24	2,0146	2,0035	1,9932	1,9838	1,975	1,9668	1,9591	1,952	1,9453	1,939
25	1,9953	1,9842	1,9738	1,9643	1,9554	1,9472	1,9395	1,9323	1,9255	1,9192
26	1,9776	1,9664	1,956	1,9464	1,9375	1,9292	1,9215	1,9142	1,9074	1,901
27	1,9613	1,95	1,9396	1,9299	1,921	1,9126	1,9048	1,8975	1,8907	1,8842
28	1,9462	1,9349	1,9244	1,9147	1,9057	1,8973	1,8894	1,8821	1,8752	1,8687
29	1,9322	1,9208	1,9103	1,9005	1,8915	1,883	1,8751	1,8677	1,8608	1,8543
30	1,9192	1,9077	1,8972	1,8874	1,8782	1,8698	1,8618	1,8544	1,8474	1,8409
40	1,826	1,8141	1,8031	1,7929	1,7835	1,7746	1,7663	1,7586	1,7513	1,7444
50	1,7709	1,7588	1,7475	1,7371	1,7273	1,7183	1,7097	1,7017	1,6942	1,6872
60	1,7346	1,7222	1,7108	1,7001	1,6902	1,6809	1,6722	1,6641	1,6564	1,6491
70	1,7088	1,6962	1,6846	1,6738	1,6638	1,6543	1,6455	1,6372	1,6294	1,622
80	1,6895	1,6768	1,6651	1,6542	1,644	1,6345	1,6255	1,6171	1,6092	1,6017
90	1,6745	1,6618	1,6499	1,6389	1,6286	1,619	1,61	1,6015	1,5935	1,5859
100	1,6626	1,6497	1,6378	1,6267	1,6163	1,6067	1,5976	1,589	1,5809	1,5733
110	1,6528	1,6399	1,6279	1,6167	1,6063	1,5966	1,5874	1,5788	1,5706	1,563
120	1,6447	1,6317	1,6197	1,6084	1,598	1,5881	1,5789	1,5703	1,5621	1,5543
∞	1,5558	1,542	1,5292	1,5173	1,5061	1,4956	1,4857	1,4763	1,4675	1,4591

Продовження табл. Д4.

$k_{менш}$	$k_{більш}$									
	40	50	60	70	80	90	100	110	120	∞
1	251,143	251,774	252,195	252,497	252,723	252,9	253,041	253,156	253,252	254,314
2	19,4707	19,4757	19,4791	19,4814	19,4832	19,484	19,4857	19,4866	19,4874	19,4957
3	8,5944	8,581	8,572	8,5656	8,5607	8,5569	8,5539	8,5514	8,5494	8,5265
4	5,717	5,6995	5,6877	5,6793	5,673	5,668	5,6641	5,6608	5,6581	5,6281
5	4,4638	4,4444	4,4314	4,422	4,415	4,4095	4,4051	4,4015	4,3985	4,365
6	3,7743	3,7537	3,7398	3,7298	3,7223	3,7164	3,7117	3,7079	3,7047	3,6689
7	3,3404	3,3189	3,3043	3,2939	3,286	3,2798	3,2749	3,2708	3,2674	3,2298
8	3,0428	3,0204	3,0053	2,9944	2,9862	2,9798	2,9747	2,9705	2,9669	2,9276
9	2,8259	2,8028	2,7872	2,776	2,7675	2,7609	2,7556	2,7512	2,7475	2,7067
10	2,6609	2,6371	2,6211	2,6095	2,6008	2,5939	2,5884	2,5839	2,5801	2,5379
11	2,5309	2,5066	2,4901	2,4782	2,4692	2,4622	2,4566	2,4519	2,448	2,4045
12	2,4259	2,401	2,3842	2,372	2,3628	2,3556	2,3498	2,345	2,341	2,2962
13	2,3392	2,3138	2,2966	2,2841	2,2747	2,2673	2,2614	2,2565	2,2524	2,2064
14	2,2664	2,2405	2,2229	2,2102	2,2006	2,1931	2,187	2,182	2,1778	2,1307
15	2,2043	2,178	2,1601	2,1472	2,1373	2,1296	2,1234	2,1183	2,1141	2,0659
16	2,1507	2,124	2,1058	2,0926	2,0826	2,0748	2,0685	2,0633	2,0589	2,0096
17	2,104	2,0769	2,0584	2,045	2,0348	2,0268	2,0204	2,0151	2,0107	1,9604
18	2,0629	2,0354	2,0166	2,003	1,9927	1,9846	1,978	1,9726	1,9681	1,9168
19	2,0264	1,9986	1,9795	1,9657	1,9552	1,947	1,9403	1,9348	1,9302	1,878
20	1,9938	1,9656	1,9464	1,9323	1,9217	1,9133	1,9066	1,901	1,8963	1,8432
21	1,9645	1,936	1,9165	1,9023	1,8915	1,883	1,8761	1,8705	1,8657	1,8117
22	1,938	1,9092	1,8894	1,8751	1,8641	1,8555	1,8486	1,8428	1,838	1,7831
23	1,9139	1,8848	1,8648	1,8503	1,8392	1,8305	1,8234	1,8176	1,8128	1,757
24	1,892	1,8625	1,8424	1,8276	1,8164	1,8076	1,8005	1,7946	1,7896	1,7331
25	1,8718	1,8421	1,8217	1,8069	1,7955	1,7866	1,7794	1,7734	1,7684	1,711
26	1,8533	1,8233	1,8027	1,7877	1,7762	1,7672	1,7599	1,7539	1,7488	1,6906
27	1,8361	1,8059	1,7851	1,77	1,7584	1,7493	1,7419	1,7358	1,7306	1,6717
28	1,8203	1,7898	1,7689	1,7535	1,7418	1,7326	1,7251	1,719	1,7138	1,6541
29	1,8055	1,7748	1,7537	1,7382	1,7264	1,7171	1,7096	1,7033	1,6981	1,6377
30	1,7918	1,7609	1,7396	1,724	1,7121	1,7027	1,695	1,6887	1,6835	1,6223
40	1,6928	1,66	1,6373	1,6205	1,6077	1,5975	1,5892	1,5824	1,5766	1,5089
50	1,6337	1,5995	1,5757	1,558	1,5445	1,5337	1,5249	1,5176	1,5115	1,4383
60	1,5943	1,559	1,5343	1,516	1,5019	1,4906	1,4814	1,4737	1,4673	1,3893
70	1,5661	1,53	1,5046	1,4857	1,4711	1,4594	1,4498	1,4419	1,4351	1,3529
80	1,5449	1,5081	1,4821	1,4628	1,4477	1,4357	1,4259	1,4176	1,4107	1,3247
90	1,5284	1,491	1,4645	1,4448	1,4294	1,4171	1,407	1,3985	1,3914	1,302
100	1,5151	1,4772	1,4504	1,4303	1,4146	1,402	1,3917	1,3831	1,3757	1,2832
110	1,5043	1,466	1,4388	1,4183	1,4024	1,3896	1,3791	1,3703	1,3628	1,2674
120	1,4952	1,4565	1,429	1,4083	1,3922	1,3792	1,3685	1,3595	1,3519	1,2539
∞	1,394	1,3501	1,318	1,2933	1,2735	1,2572	1,2434	1,2317	1,2214	1,0033

Додаток 5.

Таблиця Д5. Критичні значення для *G* – критерію (Кохрена)

Рівень значущості α=0.01														
L	*k*													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0.9999	0.9950	0.9794	0.9586	0.9373	0.9172	0.8988	0.8823	0.8674	0.8539	0.7949	0.7067	0.6062	0.5000
3	0.9933	0.9423	0.8831	0.8335	0.7933	0.7606	0.7335	0.7107	0.6912	0.6743	0.6059	0.5153	0.4230	0.3333
4	0.9676	0.8643	0.7814	0.7212	0.6761	0.6410	0.6129	0.5897	0.5702	0.5536	0.4884	0.4057	0.3251	0.2500
5	0.9279	0.7885	0.6957	0.6329	0.5875	0.5531	0.5259	0.5037	0.4854	0.4697	0.4094	0.3351	0.2644	0.2000
6	0.8828	0.7218	0.6258	0.5635	0.5195	0.4866	0.4608	0.4401	0.4229	0.4084	0.3529	0.2858	0.2229	0.1667
7	0.8376	0.6644	0.5685	0.5080	0.4659	0.4347	0.4105	0.3911	0.3751	0.3616	0.3105	0.2494	0.1929	0.1429
8	0.7945	0.6152	0.5209	0.4627	0.4226	0.3932	0.3704	0.3522	0.3373	0.3248	0.2779	0.2214	0.1700	0.1250
9	0.7544	0.5727	0.4810	0.4251	0.3870	0.3592	0.3378	0.3207	0.3067	0.2950	0.2514	0.1992	0.1521	0.1111
10	0.7175	0.5358	0.4469	0.3934	0.3572	0.3308	0.3106	0.2945	0.2813	0.2704	0.2297	0.1811	0.1376	0.1000
12	0.6528	0.4751	0.3919	0.3428	0.3099	0.2861	0.2680	0.2535	0.2419	0.2320	0.1961	0.1535	0.1157	0.0833
15	0.5747	0.4069	0.3317	0.2882	0.2593	0.2386	0.2228	0.2104	0.2002	0.1918	0.1612	0.1251	0.0934	0.0667
20	0.4799	0.3297	0.2654	0.2288	0.2048	0.1877	0.1748	0.1646	0.1567	0.1501	0.1248	0.0960	0.0709	0.0500
24	0.4247	0.2871	0.2295	0.1970	0.1759	0.1608	0.1495	0.1406	0.1338	0.1283	0.1060	0.0810	0.0595	0.0417
30	0.3632	0.2412	0.1913	0.1635	0.1454	0.1327	0.1232	0.1157	0.1100	0.1054	0.0867	0.0658	0.0480	0.0333
40	0.2940	0.1915	0.1508	0.1281	0.1135	0.1033	0.0957	0.0898	0.0853	0.0816	0.0668	0.0503	0.0363	0.0250
60	0.2151	0.1371	0.1069	0.0902	0.0796	0.0722	0.0668	0.0625	0.0594	0.0567	0.0461	0.0344	0.0245	0.0167
120	0.1225	0.0759	0.0585	0.0489	0.0429	0.0387	0.0357	0.0334	0.0316	0.0302	0.0242	0.0178	0.0125	0.0083
∞	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Продовження табл. Д5.

Рівень значущості $\alpha=0.05$														
L	k													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0.9985	0.9750	0.9392	0.9057	0.8772	0.8534	0.8332	0.8159	0.8010	0.7880	0.7341	0.6602	0.5813	0.5000
3	0.9669	0.8709	0.7977	0.7457	0.7071	0.6771	0.6530	0.6333	0.6167	0.6025	0.5466	0.4748	0.4031	0.3333
4	0.9065	0.7679	0.6841	0.6287	0.5895	0.5598	0.5365	0.5175	0.5017	0.4884	0.4366	0.3720	0.3093	0.2500
5	0.8412	0.6338	0.5981	0.5440	0.5063	0.4783	0.4564	0.4387	0.4241	0.4118	0.3645	0.3066	0.2013	0.2000
6	0.7808	0.6161	0.5321	0.4803	0.4447	0.4184	0.3980	0.3817	0.3682	0.3568	0.3135	0.2612	0.2119	0.1667
7	0.7271	0.5612	0.4800	0.4307	0.3974	0.3726	0.3535	0.3384	0.3259	0.3154	0.2756	0.2278	0.1833	0.1429
8	0.6798	0.5157	0.4377	0.3910	0.3595	0.3362	0.3185	0.3043	0.2926	0.2829	0.2462	0.2022	0.1616	0.1250
9	0.6385	0.4775	0.4027	0.3584	0.3286	0.3067	0.2901	0.2768	0.2659	0.2568	0.2226	0.1820	0.1446	0.1111
10	0.6020	0.4450	0.3733	0.3311	0.3029	0.2823	0.2666	0.2541	0.2439	0.2353	0.2032	0.1655	0.1308	0.1000
12	0.5410	0.3924	0.3624	0.2880	0.2624	0.2439	0.2299	0.2187	0.2098	0.2020	0.1737	0.1403	0.1100	0.0833
15	0.4709	0.3346	0.2758	0.2419	0.2195	0.2034	0.1911	0.1815	0.1736	0.1671	0.1429	0.1144	0.0889	0.0667
20	0.3894	0.2705	0.2205	0.1921	0.1735	0.1602	0.1501	0.1422	0.1357	0.1303	0.1108	0.0879	0.0675	0.0500
24	0.3434	0.2354	0.1907	0.1656	0.1493	0.1374	0.1286	0.1216	0.1160	0.1113	0.0942	0.0743	0.0567	0.0417
30	0.2929	0.1980	0.1593	0.1377	0.1237	0.1137	0.1061	0.1002	0.0958	0.0921	0.0771	0.0604	0.0457	0.0333
40	0.2370	0.1576	0.1259	0.1082	0.0968	0.0887	0.0827	0.0780	0.0745	0.0713	0.0595	0.0462	0.0347	0.0250
60	0.1737	0.1131	0.0895	0.0765	0.0682	0.0623	0.0583	0.0552	0.0520	0.0497	0.0411	0.0316	0.0234	0.0167
120	0.0998	0.0632	0.0495	0.0419	0.0371	0.0337	0.0312	0.0292	0.0279	0.0266	0.0218	0.0165	0.0120	0.0083
∞	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000