МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБ’ЄКТІВ ТА СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ОБ’ЄКТІВ З ВИПАДКОВИМИ ВПЛИВАМИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання домашньої контрольної роботи для студентів
спеціальності „Автоматизоване управління технологічними процесами”

Рекомендовано Вченою радою інженерно - хімічного факультету

Київ
НТУУ ”КПІ“
2012

Імітаційне моделювання об’єктів та систем керування. Дослідження та моделювання об’єктів з випадковими впливами: Метод. вказівки до викон. домашньої контрольної роботи для студ. спеціальності „Автоматизоване управління технологічними процесами” /Уклад.: Л. Д. Ярощук. – К. : НТУУ „КПІ”, 2012. – 60 с.

Гриф надано Вченою радою ІХФ

(Протокол № 5 від 23 квітня 2012 р.)

Навчальне видання

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ОБ’ЄКТІВ З ВИПАДКОВИМИ ВПЛИВАМИ

Методичні вказівки до виконання домашньої контрольної роботи з курсу “Імітаційне моделювання об’єктів та систем керування ” для студентів спеціальності „Автоматизоване управління технологічними процесами”

Укладач: Ярощук Людмила Дем’янівна, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний

редактор А.І. Жученко, докт. техн. наук, проф.

Рецензент В.Ю. Щербина, канд. техн. наук, доц.

Авторська редакція

ЗМІСТ

ВСТУП

Імітаційне моделювання застосовують для створення та дослідження моделей технологічних об’єктів і систем, а також алгоритмів та систем керування. Воно особливо доцільне тоді, коли хіміко-технологічні системи (ХТС) або системи керування за своєю структурою та функціями можуть бути віднесені до складних. Саме для такого типу систем характерним є наявність значної кількості збурень, які розглядають за поведінкою в часі як випадкові процеси. Традиційні методи моделювання у такому випадку не завжди ефективні, а іноді і неприйнятні.

Імітаційне моделювання виконують на основі визначених або заданих властивостей об’єкта моделювання. Відтворення цих властивостей за допомогою сучасних програмних засобів є головною задачею імітаційного моделювання. Випробовування нових алгоритмів керування не тільки на реальному обладнанні, а й на імітаційній моделі окремого технологічного об’єкта керування (ТОК) або у цілому ХТС, дозволяє скоротити етап проектування системи автоматизації, зробити його менш небезпечним, розглянути ризиковані режими та параметри керування.

Метою вивчення дисципліни є ознайомлення студентів з методикою побудови імітаційних моделей ТОК, ХТС та систем керування, які знаходяться під впливом випадкових чинників, властивості яких треба визначати, а потім відтворювати програмними засобами.

В результаті вивчення цієї дисципліни студенти повинні <u>знати</u> методи дослідження об′єктів та систем керування в умовах суттєвого впливу збурень; характеристики випадкових процесів; методику застосування канонічного розкладання випадкових функцій; способи визначення характеристик випадкових функцій на виході стаціонарної лінійної системи; методології проведення імітаційного моделювання; способи генерування псевдовипадкових функцій.

Після вивчення цієї дисципліни студенти повинні вміти досліджувати випадкові процеси та визначати за результатами експериментів їхні характеристики; відтворювати ці характеристики за допомогою програмного забезпечення ПЕОМ; створювати алгоритми імітаційного моделювання та досліджувати якість моделей.

Мета та завдання домашньої контрольної роботи, вимоги до оформлення

Метою виконання домашньої контрольної роботи є закріплення знань, отриманих на лекціях та набуття умінь для визначення характеристик випадкових процесів і алгоритмів їх відтворення при імітаційному моделюванні ТОК, ХТС та систем керування в середовищі математичного процесора *MathCAD*.

Основні задачі, які стоять перед домашньою контрольною роботою, наступні:

- визначення числових характеристик випадкових функцій (процесів), які впливають на об'єкт моделювання, за результатами його експериментальних досліджень;
- створення програм для імітації випадкових функцій з визначеними характеристиками;
- отримання та дослідження регресійної моделі технологічного об'єкту керування ;
- створення імітаційної моделі об'єкта з заданими характеристикам вхідних змінних;
- перевірка адекватності імітаційної моделі.

Опис об'єкта моделювання не повинен перевищувати 3 сторінки. Розрахунки треба проводити у середовищі спеціалізованої програми *MathCAD* (*MatLab* – за узгодженням з викладачем), що підтвердити фрагментами документів (у разі використання *MatLab* навести зображення відповідних вікон програми).

При оформленні роботи керуватися наступним:

- властивості сторінки: папір А4, поля: ліве – 2,5 см, інші – 2 см;

- параметри форматування тексту: *Times New Roman*, 14 пт, 1,5 інтервали;
- нумерація сторінок наскрізна, знизу посередині, починаючи з 3-ї сторінки;
- нумерація рисунків, формул та таблиць (далі ”об’єкт”) за схемою: ***N*1.*N*2** (*N*1- номер завдання, *N*2 - номер об’єкту в тексті виконання конкретного завдання), наприклад, табл.3.1 – перша таблиця в третьому завданні, таким же чином для рисунку - рис.3.1, для формули - (3.1);
- текст пояснень виконувати у *MS Word*, рисунки у *MS Visio* результати розрахунків подавати фрагментами з документів *MathCAD,* (за вибором студента *MatLab*), позначаючи ці фрагменти як рисунки.

ЗАВДАННЯ

на домашню контрольну роботу

1. Навести схему узгодженої з викладачем хіміко - технологічної системи. Описати технологію.
2. Вибрати один з технологічних об'єктів. Зобразити структурно-параметричну схему цього об'єкту.
3. Провести експериментальні дослідження цього об'єкту (спостерігати за трьома вхідними (факторами) та однією вихідною змінними).
4. Вважаючи закон розподілу всіх змінних нормальним, розрахувати для кожної з них оцінки математичного сподівання та дисперсії, а також коефіцієнти кореляції між X_1 та X_2. Визначити кореляційну функцію для X_3.
5. За експериментальними даними створити регресійну модель статики технологічного об'єкту (лінійну за факторами).
6. Створити імітаційну модель технологічного об'єкту з врахуванням властивостей вхідних матеріальних потоків.
7. Виконати перевірку адекватності імітаційної моделі.
8. Визначити числові характеристики випадкової функції.

Склад, обсяг і структура домашньої контрольної роботи

Домашня контрольна робота подається у вигляді пояснювальної записки, яка містить текстову частину з описом технологічного об'єкта керування (не більше 3 сторінок), обґрунтуванням вибору випадкових величин, які будуть названі в подальшому X_1, X_2, X_3 та Y, розрахунків у вигляді формул і документів *MathCAD* та графіків. Значення усіх випадкових вхідних X_1, X_2, X_3 та вихідної змінної Y подати у вигляді масивів *MathCAD* або у вигляді таблиці

№ досліду	X_1	X_2	X_3	Y
1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	y_1
…	…	…	…	…
N	x_{1N}	x_{2N}	x_{3N}	y_N

Через N позначатимемо кількість експериментів, проведених на об'єкті.

Склад роботи повинен відповідати пунктам завдання.

Обсяг роботи не повинен перевищувати 25 сторінок.

Згідно із наведеними вище завданнями на розрахункову роботу її структура повинна бути наступною:

Титульний аркуш.

Завдання на розрахункову роботу.

Зміст.

Розрахунки і пояснення до них у відповідності з пунктами завдань.

Список використаної літератури.

Додатки (*за необхідністю*).

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. ***Узгодити з викладачем фрагмент хіміко - технологічної системи певного виробництва, дати стислий опис процесів у вибраному обладнанні.***

Приклад виконання завдання[1].

1. ТЕХНОЛОГІЯ ПРОЦЕСУ ВИРОБНИЦТВА ПОЛІВІНІЛАЦЕТАТУ БЕЗПЕРЕРВНИМ СПОСОБОМ

Полівінілацетат отримують шляхом радикальної полімеризації вінілацетату. Полімеризацію проводять в розчині, емульсії, суспензії чи в масі. Найбільше розповсюдження отримала полімеризація вінілацетату в розчині.

Технологічний процес виробництва полівінілацетату безперервним методом складається з наступних стадій: приготування розчину ініціатора, полімеризація вінілацетату, відгін вінілацетату що не прореагував.

Вінілацетат через підігрівач безперервно надходить в полімеризатор 1 (див. рис. 1.1), у який подають також розчин ініціатора в метанолі. Полімеризацію проводять при температурі 65–68 °С до степені конверсії мономіру 35 %. Тривалість полімеризації в апараті 1 складає 4 години. Потім реакційна суміш надходить у другий полімеризатор 2, куди безперервно подається метанол і розчин ініціатора в метанолі. Вміст метанолу в полімеризаторі доводять до 25–30 об'ємн.%, а ініціатора до 0,065–0,075 об'ємн. %. Полімеризацію проводять при 68–70 °С до степені конверсії мономеру 60–65%.Тривалість процесу в полімеризаторі 2 складає 4–5 годин.

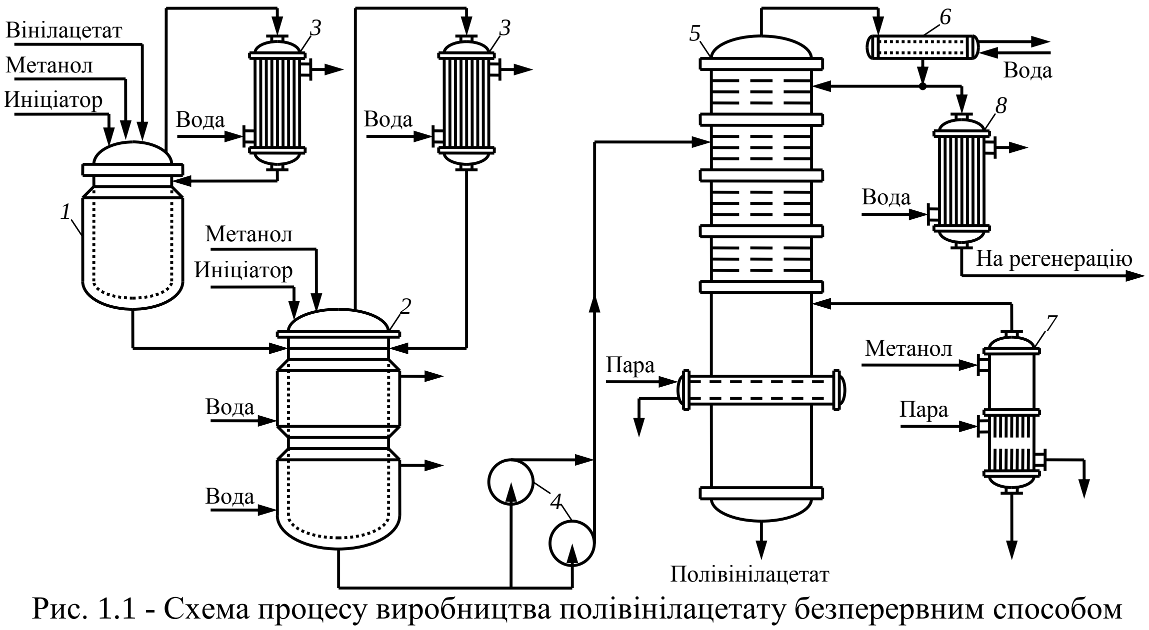


Рис. 1.1 - Схема процесу виробництва полівінілацетату безперервним способом
1, 2 – полімеризатори; 3, 6, 8 – теплообмінники; 4 – насоси; 5 – ректифікаційна колонна; 7 – випаровувач.

[1] Текст прикладів подано з наступним форматуванням: *TNR* №12, інтервал 1.

Завдання 2. ***Вибрати один з технологічних об'єктів. Зобразити структурно-параметричну схему цього об'єкту***

Приклад виконання завдання.

2. ОПИС ДВОСТУПЕНЕВОГО РЕАКТОРА ПОЛІМЕРИЗАТОРА

Основним процесом який використовують у виробництві полівінілацетату є полімеризація вінілацетату. Полімеризацію проводять у реакторах полімеризаторах. У розрахунковій роботі розглянуто *двоступеневий реактор-полімеризатор* колонного типу, оснащений рамними мішалками, сорочками для охолодження і зворотними холодильниками для повернення випаруваного мономеру і розчинника.

Двоступеневий реактор-полімеризатор поділяється на перший та другий ступені, які відрізняються значеннями температур 345 °К та 342 °К відповідно.

Структурно - параметричну схему реактора-полімеризатора з позначенням усіх технологічних параметрів та розділенням на три частини наведено на рис.2.2.

На цій схемі позначені такі *технологічні змінні*:

F_I, t_I, C_I – витрата, температура та теплоємність ініціатора;

F_M, t_M, C_M – витрата, температура та теплоємність метанолу;

F_{BA}, t_{BA}, C_{BA} – витрата, температура та теплоємність вінілацетату;

F_{B1}, C_B – витрата та теплоємність води в першій сорочці.

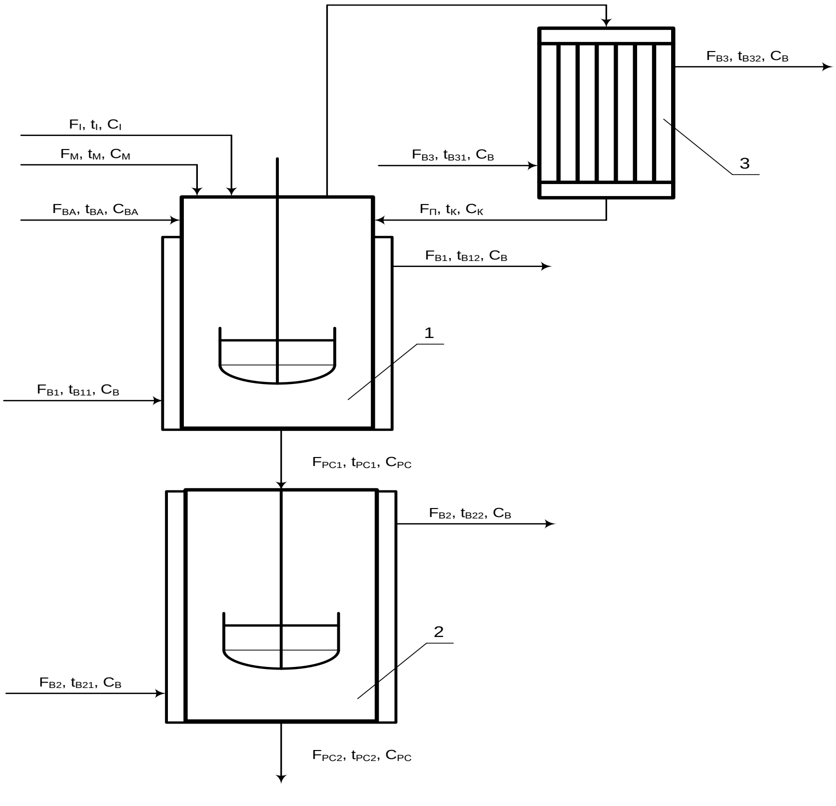


Рис. 2.2 – Структурно - параметрична схема реактора-полімеризатора із зовнішнім теплообмінником

1, 2 – перший та другий ступені реактора; 3 - зовнішній теплообмінник (холодильник)

Оскільки треба регулювати температуру реакційної суміші на виході з 1-о ступеня реактора за допомогою охолоджувальної води що подається в сорочку першого поверхневого теплообмінника, то для 1-о ступеня визначимо:

Вихід:t_{PC1}– температура реакційної суміші;

Вхід:F_{B1} – витрата води в сорочці;

Збурення: t_{B11} – температура води в сорочці;

F_{BA}– витрата вінілацетату;

t_{BA}– температура вінілацетату;

t_{K}– температура конденсату пари та вінілацетату метанолу.

У відповідності до цих параметрів розроблено загальну параметричну схему (рис.2.3).

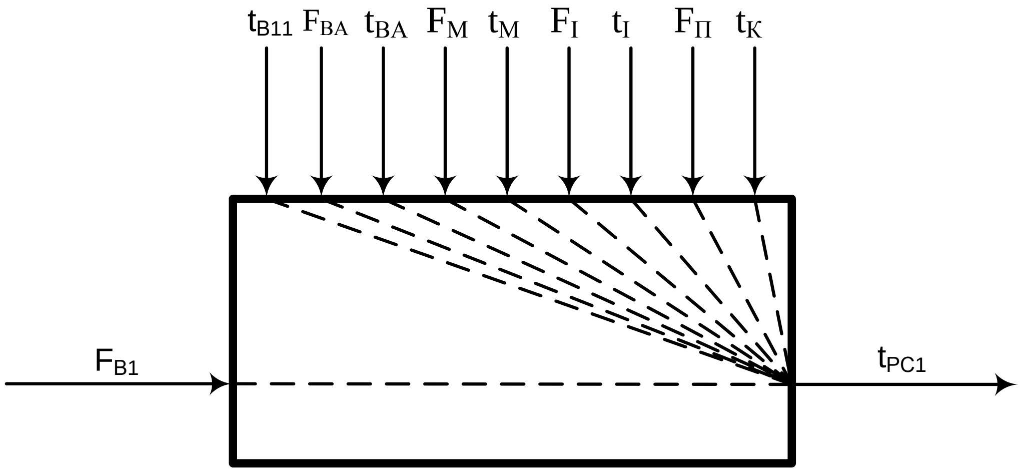


Рис. 2.3. – Загальна параметрична схема 1-о ступеня реактора

На рис.2.4. зображено параметричну схему реактора – полімеризатора згідно до вимог домашньої контрольної роботи.

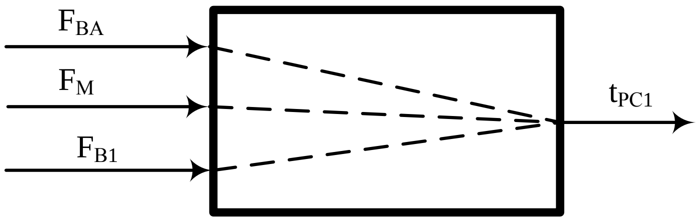


Рис.2.4. Параметрична схема реактора – полімеризатора для виконання домашньої контрольної роботи

Завдання 3. ***Провести експериментальні дослідження цього об’єкту (спостерігати за трьома вхідними (факторами) та однією вихідною змінними).***

Приклад виконання завдання.

3. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРШОЇ СТУПЕНІ ДВОСТУПЕНЕВОГО РЕАКТОРА ПОЛІМЕРИЗАТОРА

Було виконано спостереження за трьома вхідними і однією вихідною змінною (див. рис.2.4.)

Вхідні змінні:

$F_{ВА}$– витрата вінілацетату;

$F_{М}$– витрата метанолу;

$F_{В1}$ – витрата води в сорочці;

Вихідна змінна:

$t_{РС1}$– температура реакційної суміші;

В результаті спостережень було отримано 50 значень для кожної змінної, відповідні часові ряди зображені на рис.3.1 -3.4.

На рис. Д1.1 (див. Додаток 1) зображено ініціалізацію цими експериментальними даними векторів у середовищі *MathCAD*.

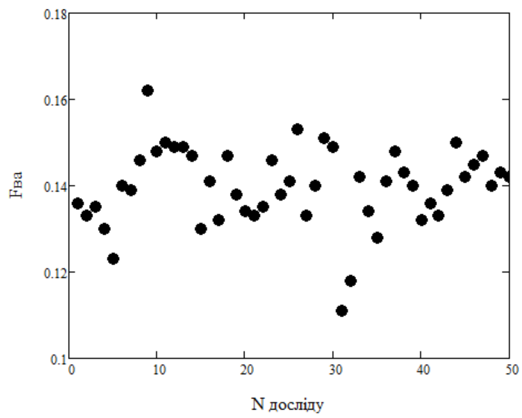


Рис. 3.1. Часовий ряд значень витрати вінілацетату

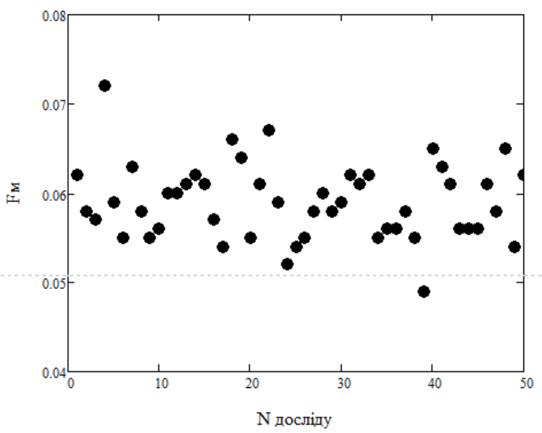


Рис. 3.2. Часовий ряд значень витрати метанолу

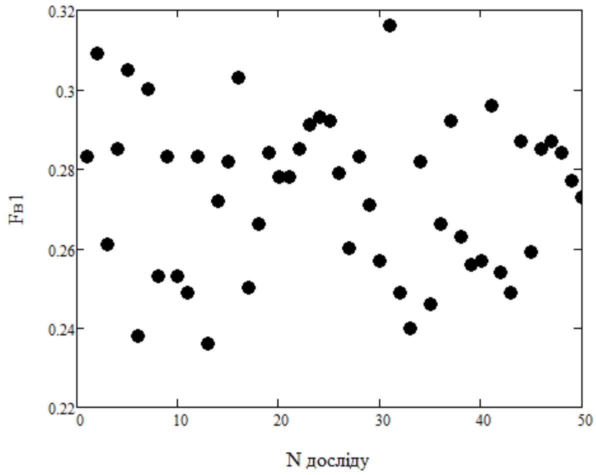


Рис. 3.3. Часовий ряд значень витрати води в сорочці

Завдання 4. ***Вважаючи закон розподілу всіх змінних нормальним, розрахувати для кожної з них оцінки математичного сподівання та дисперсії, а також коефіцієнти кореляції між X_1 та X_2. Визначити кореляційну функцію для X_3.***

Теоретичні положення

Точкові оцінки математичних сподівань та дисперсій випадкових величин X_1, X_2, X_3 треба визначити за формулами:

$$M_x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}, \tag{4.1}$$

де M_x – точкова оцінка математичного сподівання (середнє арифметичне); x_i – значення випадкової величини у i -у досліді;

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - M_x)^2}{N-1}. \tag{4.2}$$

де S_x^2 - точкова оцінка дисперсії;

$$S_{\tilde{o}} = \sqrt{S_{\tilde{o}}^2}; \qquad (4.3)$$

де $S_{\tilde{o}}$ - точкова оцінка середнього квадратичного (стандартного) відхилення.

У табл.4.1 наведено перелік вбудованих функцій *MathCAD* для визначення вищезазначених числових характеристик.

Вибірковий коефіцієнт парної кореляції між X_1, X_2 слід визначити за формулою

$$r_{x_1 x_2} = \frac{S_{x1,x2}^2}{S_{x1} \cdot S_{x2}}, \qquad (4.4)$$

де S_{x1x2}^2 - кореляційний момент; S_{x1}, S_{x2} - середньоквадратичні (стандартні) відхилення випадкових величин X_1 та X_2.

Вибіркове значення кореляційного моменту (коваріації) S_{x1x2}^2 розраховують так

$$S_{x_1,x_2}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_{1i} - M_{x_1})(x_{2i} - M_{x_2})}{N-1}, \qquad (4.5)$$

де M_{x_1}, M_{x_2} - вибіркові середні випадкових величин X_1 та X_2.

Далі треба визначити автокореляційну функцію змінної X_3.

Автокореляційна функція дає змогу оцінити інерційність інформаційного потоку. Позначимо її $R_{x3x3}(\tau)$, тут τ – кількість інтервалів часу між вимірюваннями, $(t = \tau\Delta t;\ \tau = 0,1,\ldots,N-1)$.

Значення АКФ розраховують за вибірковими даними таким чином:

$$R_{xx\_3}(\tau) = \frac{1}{N-\tau-1}\sum_{i=1}^{N-\tau}(x_{3i} - M_{x3})(x_{3_{i+\tau}} - M_{3x}). \qquad (4.6)$$

Якщо інтервал між вимірюваннями нульовий, $\tau = 0$ (однакові числові ряди вимірювань), то за (4.6)

$$R_{xx\_3}(0) = S_{x3}^2.$$

Нормовану АКФ обчислюють за формулою

$$\overline{R}_{xx\_3}(\tau) = \frac{R_{xx\_3}(\tau)}{S_{x3}^2}.$$

Таблиця 4.1. Таблиця відповідностей стандартних функцій *MathCAD*

Позначення	Формула
$mean(x)$	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
$var(x)$	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - M_x)^2$
$Var(x)$	$\frac{1}{(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - M_x)^2$
$stdev(x)$	$\sqrt{var(x)}$
$Stdev(x)$	$\sqrt{Var(x)}$
$cvar(x,y)$	$S_{xy}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - M_x)(y_i - M_y)}{N-1}$
$corr(x,y)$	$r_{xy} = \frac{S_{xy}^2}{S_x \cdot S_y}$

Приклад виконання завдання.

Визначаємо точкові оцінки математичних сподівань (4.1).

Для витрати вінілацетату:

$$M\_Fва = \frac{Fва_1 + Fва_2 + ... + Fва_N}{N} = \frac{0.136 + 0.133 + ... + 0.142}{50} = 0.140$$

Для витрати метанолу:

$$M\_Fм = \frac{Fм_1 + Fм_2 + ... + Fм_N}{N} = \frac{0.062 + 0.058 + ... + 0.062}{50} = 0.059$$

Для витрати води:

$$M\_Fв1 = \frac{Fв1_1 + Fв1_2 + ... + Fв1_N}{N} = \frac{0.283 + 0.309 + ... + 0.273}{50} = 0.274$$

Для температури реакційної суміші:

$$M\_Tрс1 = \frac{Tрс1_1 + Tрс1_2 + ... + Tрс1_N}{N} = \frac{335.951 + 332.365 + ... + 347.377}{50} = 345.61$$

Розрахунки математичних сподівань в середовищі *MathCAD* наведено на рисунку Д1.2.

Визначимо точкові оцінки дисперсій (4.2).
Для витрати вінілацетату:

$$S2\_Fва = \frac{(Fва_1 - M\_Fва)^2 + (Fва_2 - M\_Fва)^2 + ... + (Fва_N - M\_Fва)^2}{N-1} =$$

$$\frac{(0.136 - 0.140)^2 + (0.133 - 0.140)^2 + ... + (0.142 - 0.140)^2}{49} = 8.289 \times 10^{-5}$$

Розрахунки дисперсій в середовищі *MathCAD* наведено на рисунку Д1.3.

Визначимо точкові оцінки середніх квадратичних відхилень (4.3).
Для витрати вінілацетату:

$$S\_Fва = \sqrt{8.289 \times 10^{-5}} = 9.104 \times 10^{-3}$$

Розрахунки середніх квадратичних відхилень в середовищі *MathCAD* наведено на рисунку Д1.4.

Визначимо коваріацію між витратами вінілацетату та метанолу.
Коваріація (4.5):

$$Cov\_Fва\_Fм = \frac{(Fва_1 - M\_Fва)\cdot(Fм_1 - M\_Fм) + (Fва_2 - M\_Fва)\cdot(Fм_2 - M\_Fм) + ... + (Fва_N - M\_Fва)\cdot(Fм_N - M\_Fм)}{N-1} =$$

$$\frac{(0.136-0.140)\cdot(0.062-0.140)+(0.136-0.140)\cdot(0.062-0.140)+...+(0.142-0.140)\cdot(0.142-0.140)}{49} = -8.456\times10^{-6}$$

Визначимо коефіцієнт парної кореляції (4.4)

$$R\_Fва\_Fм = \frac{Cov\_Fва\_Fм}{Sx\_Fва\cdot Sx\_Fм} = \frac{-8.456\times10^{-6}}{9.104\times10^{-3}\cdot4.216\times10^{-3}} = -0.22$$

Розрахунки середніх коефіцієнтів кореляції в середовищі *MathCAD* наведено на рисунку Д1.5.

Визначаємо автокореляційну функцію для витрати води (4.6).

$$Rxx\_Fв1(\tau) = \frac{1}{N-\tau-1}\cdot\sum_{i=1}^{N-\tau}\left[(Fв1_i - M\_Fв1)\cdot(Fв1_{i+\tau} - M\_Fв1)\right] =$$

$$= \frac{1}{50-\tau-1}\cdot\sum_{i=1}^{N-\tau}\left[(Fв1_i - 0.274)\cdot(Fв1_{i+\tau} - 0.274)\right]$$

Розрахунок автокореляційної функції для витрати води в середовищі *MathCAD* наведено на рисунку Д1.6.

Отримавши графік вибіркової АКФ, дослідник повинен підібрати апроксимувальну функцію $\overline{R}_{xx\_3,ap}(\tau)$, вибравши один з трьох найбільш поширених видів нормованої $\overline{R}_{xx\_3,ap}(\tau)$:

$$\begin{aligned}
&\overline{R}_{x3x3,1}(\tau) = e^{-\alpha\tau};\\
&\overline{R}_{x3x3,2}(\tau) = e^{-\alpha\tau}\cos\beta\tau; \qquad (4.7)\\
&\overline{R}_{x3x3,3}(\tau) = [g_1\overline{R}_{x3x3,1}(\tau) + g_2\overline{R}_{x3x3,2}(\tau)],
\end{aligned}$$

де α, β, g_1, g_2 – коефіцієнти апроксимації.

Похибку апроксимації розраховують за виразами

$$Q_1 = \frac{\sum_{\tau=0}^{\tau_{ap}} \left(\overline{R}_{xx\_3}, ap(\tau) - \overline{R}_{xx\_3,ap}(\tau) \right)^2}{N_{ap}}, \qquad (4.8)$$

або

$$Q_2 = \frac{\sum_{\tau=0}^{\tau_{ap}} \left| \overline{R}_{xx\_3,ap}(\tau) - \overline{R}_{xx\_3,ap,ap}(\tau) \right|}{N_{ap}}, \qquad (4.9)$$

де τ_{ap} – найбільша кількість інтервалів часу, вибрана для апроксимації, $N_{ap} = \tau_{ap} + 1$.

На рис.4.1 зображено документ *MathCAD*, в якому розраховують вище названі показники.

$x1 := Gg \qquad x2 := Gv \qquad x3 := T \qquad y := C$

$M\_x1 := mean(x1) \qquad M\_x1 = 12.559$

$M\_x2 := mean(x2) \qquad M\_x2 = 3.119$

$M\_x3 := mean(x3) \qquad M\_x3 = 452.96$

$M\_y := mean(y) \qquad M\_y = 8.381$

$S\_x1 := Var(x1) \qquad S\_x1 = 0.269$

$S\_x2 := Var(x2) \qquad S\_x2 = 0.011$

$S\_x3 := Var(x3) \qquad S\_x3 = 63.207$

$S\_y := Var(y) \qquad S\_y = 30.14$

$r\_x1x2 := corr(x1, x2) \qquad r\_x1x2 = 0.845$

$$Rxx\_3(\tau) := \frac{\dfrac{1}{N-\tau-1}\cdot\displaystyle\sum_{i=1}^{N-\tau}\left[\left(x3_i - M\_x3\right)\cdot\left(x3_{i+\tau} - M\_x3\right)\right]}{S\_x3}$$

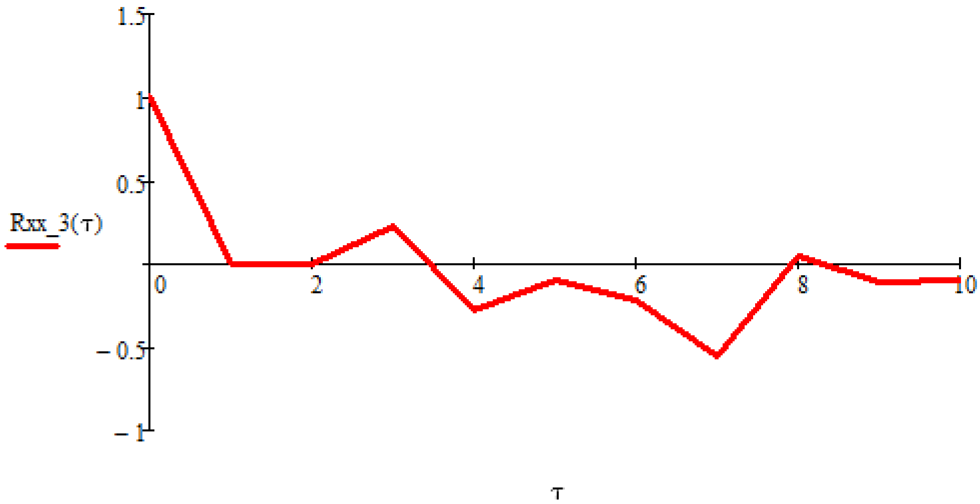


Рис. 4.1. Документ *MathCAD* з розрахунком числових характеристик та автокореляційної функції випадкових величин

Завдання 5. ***За експериментальними даними створити регресійну модель статики технологічного об'єкту (лінійну за факторами).***

Теоретичні положення

Найпоширенішим способом розрахунку коефіцієнтів регресійних моделей є ***метод найменших квадратів*** (МНК).

Згідно з завданням структура моделі повинна бути такою

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \tag{5.1}$$

де $\hat{y}$, x_1, x_2, x_3 – вихідна змінна моделі, фактори моделі, що відповідають X_1, X_2, X_3; b_0, b_1, b_2, b_3 – параметри моделі .

МНК визначає параметри рівняння так, щоб сума квадратів відхилень значень, що спостерігаються (y_i), від розрахункових за моделлю ($\hat{y}_i$) була мінімальною, тобто

$$Q = \sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - y_i)^2 \to \min .$$

Для відшукання мінімуму функціонала $Q(b_0,b_1,b_2,b_3,)$, треба прирівняти його частинні похідні по $b_0 - b_3$ до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q(b_0,b_1,b_2,b_3)}{\partial b_0} = 2\sum\limits_{i=1}^{N}(b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} - y_i) = 0; \\ \dfrac{\partial Q(b_0,b_1,b_2,b_3)}{\partial b_1} = 2\sum\limits_{i=1}^{N}(b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} - y_i)x_{1i} = 0; \\ \dfrac{\partial Q(b_0,b_1,b_2,b_3)}{\partial b_2} = 2\sum\limits_{i=1}^{N}(b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} - y_i)x_{2i} = 0; \\ \dfrac{\partial Q(b_0,b_1,b_2,b_3)}{\partial b_3} = 2\sum\limits_{i=1}^{N}(b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} - y_i)x_{3i} = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Розв'язавши цю систему, одержимо параметри $b_0 - b_3$, отже можемо записати модель (4.1) у числовому виді.

Метод оцінювання параметрів для багатофакторної моделі через розв'язування системи рівнянь (5.2) досить громіздкий, його доцільно застосовувати у матричній формі.

Введемо позначення, притаманні матричній формі запису:

$\mathbf{B}=(b_j)$ – вектор оцінок параметрів (коефіцієнтів);

$\mathbf{Y}=(y_i)$ – вектор значень залежної змінної, $i=\overline{1,N}$;

$\mathbf{X}=(x_{ij})$ – матриця значень незалежних змінних розмірністю $N \times M$, M - кількість незалежних змінних (факторів);

$\mathbf{e}=(e_i)$ – вектор оціночних помилок або залишків.

Запишемо модель у матричній формі

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{e}.$$

Позначимо суму квадратів відхилень значень випадкової величини Y, розрахованих за моделлю, від експериментальних даних літерою **J** і запишемо її значення

$$\mathbf{J} = \sum \mathbf{e}_i^2 = \mathbf{e}^{\text{т}}\mathbf{e} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{B})^{\text{т}}(\mathbf{Y} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{B}) =$$
$$= \mathbf{Y}^{\text{т}}\mathbf{Y} - \mathbf{B}^{\text{т}}\mathbf{X}^{\text{т}}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^{\text{т}}\mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{B}^{\text{т}}\mathbf{X}^{\text{т}}\mathbf{X}\mathbf{B}.$$

Тут і далі "т" - позначення операції транспонування матриці.

Оскільки

$$\mathbf{B}^{\text{т}}\mathbf{X}^{\text{т}}\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{\text{т}}\mathbf{X}\mathbf{B},$$

то

$$\mathbf{J} = \mathbf{Y}^{\text{т}}\mathbf{Y} - 2\mathbf{B}^{\text{т}}\mathbf{X}^{\text{т}}\mathbf{Y} + \mathbf{B}^{\text{т}}\mathbf{X}^{\text{т}}\mathbf{X}\mathbf{B}.$$

Виконаємо диференціювання **J** по **B**:

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{B}} = -2\mathbf{X}^{\text{т}}\mathbf{Y} + 2(\mathbf{X}^{\text{т}}\mathbf{X})\mathbf{B}.$$

Оскільки $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{B}} = 0$, то можна записати

$$\mathbf{X}^{\grave{o}}\mathbf{Y} = \mathbf{X}^{\grave{o}}\mathbf{X}\mathbf{B},$$

звідки

$$\mathbf{B} = (\mathbf{X}^{\grave{o}}\mathbf{X})^{-1} \cdot (\mathbf{X}^{\grave{o}}\mathbf{Y}). \qquad (5.3)$$

Розглянемо використані матриці детальніше.

Матрицю X запишемо у вигляді

$$\mathbf{X} = \begin{vmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{1N} & x_{2N} & x_{2N} \end{vmatrix},$$

де M – кількість факторів у моделі (для нашого випадку M=3).

Таким чином, 1 – й рядок матриці $\mathbf{X}$ – це значення M вхідних змінних моделі у першому експерименті, N – й – в останньому N – у експерименті.

Матриця $\mathbf{Y}$ – це вектор-стовпець:

$$\mathbf{Y} = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_N \end{vmatrix}.$$

Зворотна матриця $(\mathbf{X}^{\grave{o}}\mathbf{X})^{-1}$ може існувати тільки тоді, коли початкова матриця $\mathbf{X}^{\grave{o}}\mathbf{X}$ квадратна і її визначник не дорівнює нулю. Якщо ж визначник матриці дорівнює нулю, то вона вважається особливою. Матриця може виявитися особливою, якщо деякі з нормальних рівнянь є лінійними комбінаціями інших рівнянь, що буває при суттєвому кореляційному зв’язку між факторами.

У такому випадку фактично має місце менша кількість рівнянь у порівнянні з кількістю невідомих параметрів.

Документ *MathCAD* для визначення параметрів багатофакторної моделі відповідає (5.3).

Завдання 6. ***Створити імітаційну модель технологічного об'єкту з врахуванням властивостей вхідних матеріальних потоків.***

6.1. Імітація нормально розподілених випадкових величин

Теоретичні положення

Завдання передбачає генерування усіх вхідних змінних згідно з нормальним законом розподілу. Параметри закону повинні бути такими, які були визначені у п.4 виконання завдання.

MathCAD містить стандартну функцію для імітації масиву значень випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону розподілу, це $rnorm(N,\mu_x,\sigma_x)$. У дужках вказано параметри цієї функції, з яких видно, що крім необхідного обсягу вибірки N треба задати математичне сподівання μ_x та середнє квадратичне відхилення σ_x випадкової величини.

Приклад виконання завдання.

На рис.6.1 наведено документ *MathCAD* з імітацією нормально розподіленої випадкової величини X_1 з μ_1=10, σ_1=1, N=100.

$ORIGIN := 1$

$\sigma 1 := 1 \quad \mu 1 := 10 \qquad N := 100$

$X1 := rnorm(N, \mu 1, \sigma 1)$

$X1^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8.856	9.905	9.733	8.464	10.271	10.414	7.403	8.803	9.095

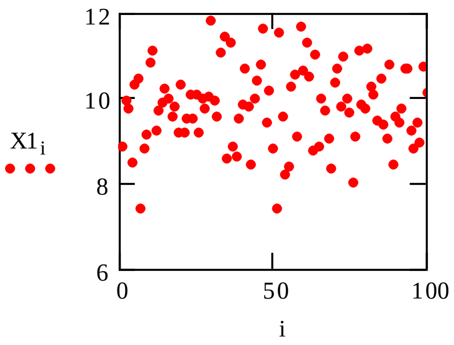


Рис.6.1. Документ *MathCAD* з імітацією нормально розподіленої випадкової величини

6.2. Імітація нормально розподілених корельованих випадкових величин

<u>Теоретичні положення</u>

Запишемо систему для імітації випадкових величин X_1 і X_2 із заданим коефіцієнтом парної кореляції, який було визначено у п.4 виконання завдання:

$$\begin{aligned} &x_{1,i} = S_1 U_{1,i} + M_{x_1}; \\ &x_{2,i} = S_2 r_{12} U_{1,i} + S_2 U_{2,i}\sqrt{1 - r_{12}^2} + M_{x_2}; \quad i = \overline{1, N} \end{aligned} \qquad (6.1)$$

або

$$x_{1,i} = S_1 U_{1,i} + M_{x_1};$$

$$x_{2,i} = S_2 r_{12} \frac{x_{1,i} - M_{x_1}}{S_1} + S_2 U_{2,i} \sqrt{1 - r_{12}^2} + M_{x_2}; \quad i = \overline{1, N}. \tag{6.2}$$

<u>Приклад виконання завдання.</u>

На рис.6.2 наведено документ *MathCAD* з імітацією корельованих нормально розподілених випадкових величин.

ORIGIN := 1

$\mu ux1 := 0 \quad \mu ux2 := 0 \quad \sigma ux1 := 1 \quad \sigma ux2 := 1 \quad rux1x2 := 0.7$

$\mu x1 := 0.2 \quad \mu x2 := 0.7 \quad \sigma x1 := 1 \quad \sigma x2 := 1.2 \quad N := 20$

$ux1 := rnorm(N, \mu ux1, \sigma ux1)$

$ux2 := rnorm(N, \mu ux2, \sigma ux2)$

$x1 := \sigma x1 \cdot ux1 + \mu x1$

$$x2 := rux1x2 \cdot \sigma x2 \cdot \frac{x1 - \mu x1}{\sigma x1} + \sigma x2 \cdot ux2 \cdot \sqrt{1 - rux1x2^2} + \mu x2$$

$x1^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.549	-0.983	-0.024	-0.105	1.796	0.023	-0.404	1.712	0.354	-0.938

$x2^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.575	-2.447	0.466	1.923	3.083	-0.486	-1.44	2.9	0.457	0.81

$$Mx1 := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x1_i \qquad Mx1 = 0.058 \qquad Sx1kv := \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(x1_i - Mx1\right)^2 \qquad Sx1kv = 0.704$$

$$Mx2 := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x2_i \qquad Mx2 = 0.527 \qquad Sx2kv := \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(x2_i - Mx2\right)^2 \qquad Sx2kv = 2.044$$

$$Sx1 := \sqrt{Sx1kv} \qquad Sx1 = 0.839 \qquad Sx2 := \sqrt{Sx2kv} \qquad Sx2 = 1.43$$

$$rx1x2 := \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(x1_i - Mx1\right) \cdot \left(x2_i - Mx2\right)}{(N-1) \cdot Sx1 \cdot Sx2} \qquad rx1x2 = 0.739$$

Рис.6.2. Документ *MathCAD* з імітацією корельованих нормально розподілених випадкових величин

6.2. Імітація випадкової величини з заданою АКФ

Теоретичні положення

Оскільки мова йтиме тільки про випадкову величину X_3, то для спрощення виразів індекс ”3” зазначати не будемо. Генерування числової послідовності з заданою АКФ базується на послідовностях нормально розподілених випадкових чисел і їхніх лінійних комбінаціях:

$$\begin{aligned} x(1h) &= c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_Nu_N; \\ x(2h) &= c_1u_2 + c_2u_3 + \ldots + c_Nu_{N+1}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x(Nh) &= c_1u_N + c_2u_{N+1} + \ldots + c_Nu_{2N-1}, \end{aligned} \qquad (6.3)$$

де u_i – елемент реалізації незалежної випадкової величини U із математичним сподіванням $\mu_u = 0$ та дисперсією $\sigma_u^2 = 1$.

Коефіцієнти c_k $(k = \overline{1, N})$ можна визначити з виразу

$$\overline{R}_{xx}(\tau) = (c_1c_k + c_2c_{k+1} + \ldots + c_{N-k+1}c_N)S_x^2.$$

Розв′язок рівняння (6.3) не завжди можна отримати аналітичним шляхом, тому створено алгоритм генерування реалізацій випадкового процесу за наступними рекурентними виразами:

$$x_k = \sum_{i=0}^{N} c_i u_{k-i};\ k = 0,1,\ldots$$

$$x_k = \sum_{l=0}^{L} a_l u_{k-l} + \sum_{j=1}^{m} b_j x_{k-j};\ k = 0,1,\ldots$$

де a_l, b_j, c_i - параметри, які залежать від виду заданої автокореляційної функції (див.4.7), яку треба відтворити.

У такому алгоритмі початкове значення $x_{3,0}$ можна прийняти нульовим. Це дещо викривлює початкову частину АКФ, але потім послідовність *X* стає стаціонарною.

Так, $\overline{R}_{xx,1}(\tau)$ випадкового процесу буде досягнута тоді, коли окремі значення ряду розраховувати за формулою:

$$x_k = a_0 u_k + b_1 x_{k-1}, \quad k = 0,1,\ldots,$$

де $a_0 = S_x \sqrt{1-b_1^2}$; $b_1 = e^{-\alpha\cdot\tau}$; x_k, $x_{k\text{-}1}$ - поточне та попереднє значення елементів ряду, що генерують.

АКФ $\overline{R}_{xx,2}(\tau)$ буде досягнута, якщо члени ряду розрахувати за виразом:

$$x_k = a_0 u_k + a_1 u_{k-1} + b_1 x_{k-1} + b_2 x_{k-2},\, k = 0,1,\ldots.$$

Коефіцієнти a_0, a_1, b_1, b_2 визначають за формулами

$$c_0 = e^{-\alpha\tau}(e^{-2\alpha\tau} - 1)\cos\beta\tau; \qquad c_1 = 1 - e^{-4\alpha\tau};$$

$$b_0 = \sqrt{(c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_0^2})/2};$$

$$b_1 = 2e^{-\alpha\tau}\cos\beta\tau; \;\; \mathrm{b}_2 = e^{-2\alpha\tau};$$

$$a_0 = S_x b_0; \quad a_1 = S_x a_0 / b_0.$$

Для зменшення похибки наближення можна ввести коригувальні коефіцієнти δ_i, і тоді вирази (4.7, 4.8) приймуть вид:

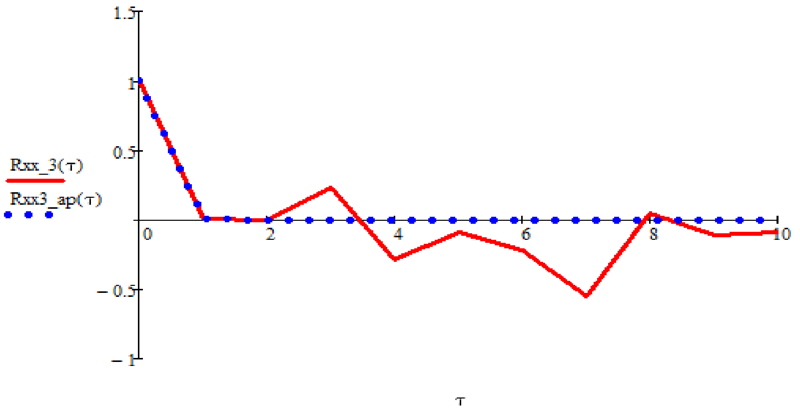
$$x_k = a_0 u_k \delta_1 + b_1 x_{k-1}\delta_2, \quad k = 0,1,\ldots$$

$$x_k = a_0 u_k \delta_1 + a_1 u_{k-1}\delta_2 + b_1 x_{k-1}\delta_3 + b_2 x_{k-2}\delta_3, \quad k = 0,1,\ldots$$

<u>Приклад виконання завдання.</u>

На рис.6.3. зображено документ *MathCAD* з моделювання числової послідовностей із заданою АКФ.

$\alpha := 5 \qquad Rxx3\_ap(\tau) := e^{-\alpha \cdot \tau}$



$\mu u := 0 \qquad \sigma u := 1 \qquad S := \sqrt{S\_x3} \qquad S = 7.95$

$u3 := rnorm(N1, \mu u, \sigma u)$

$u3^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.438	1.76	-0.647	0.551	1.546	-1.822	1.308	...

$i := 1..50$

$b1_i := e^{-\alpha \cdot i} \qquad a0_i := S \cdot \sqrt{1 - (b1_i)^2} \qquad x3\_mod_1 := 1$

$j := 2..50$

$x3\_mod_j := a0_j \cdot u3_j + b1_j \cdot x3\_mod_{j-1} + M\_x3$

$x3\_mod^T =$

	1	2	3	4	5	6
1	1	466.955	447.814	457.341	465.255	...

$M3 := mean(x3\_mod) \qquad M3 = 443.65$

$S3 := Var(x3\_mod) \qquad S3 = 4.141 \times 10^3$

$$Rxx3\_mod(\tau) := \frac{\frac{1}{N - \tau - 1} \cdot \sum_{i=1}^{N-\tau} \left[(x3\_mod_i - M3) \cdot (x3\_mod_{i+\tau} - M3) \right]}{S3}$$

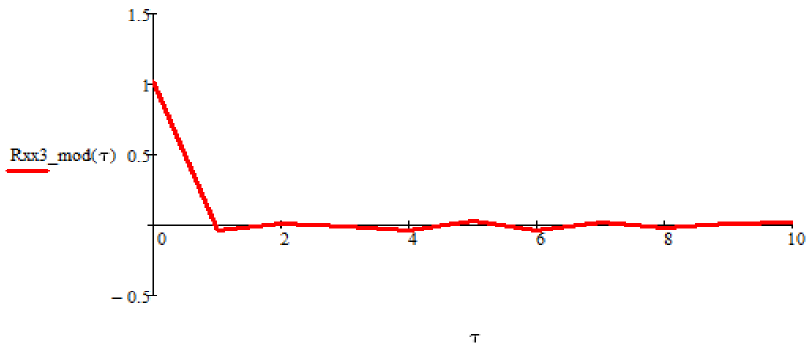


Рис.6.3. Документ *MathCAD* з моделюванням числової послідовностей із заданою АКФ

6.3. Імітаційне моделювання статики технологічного об’єкту з врахуванням властивостей вхідних матеріальних потоків

Теоретичні положення

Результати, отримані у п.5, а також у пп.6.1. – 6.3, треба узгодити (див. рис.6.4).

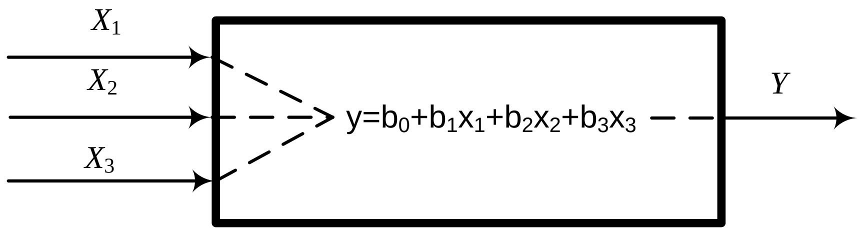


Рис.6.4. Загальна схема імітаційної моделі статики об’єкту

На вхід моделі статики (5.1) треба подавати сигнали, згідно з їхніми властивостями. В результаті виникає масив значень вихідної величини, розрахованих за моделлю Y^m. Експериментальні значення випадкової величини Y та розраховані за моделлю Y^m треба нанести на одну площину.

Приклад виконання завдання.

Імітаційну модель статики реактора – полімеризатора, розглянутого як приклад об’єкту, зобразимо на рис. 6.5.

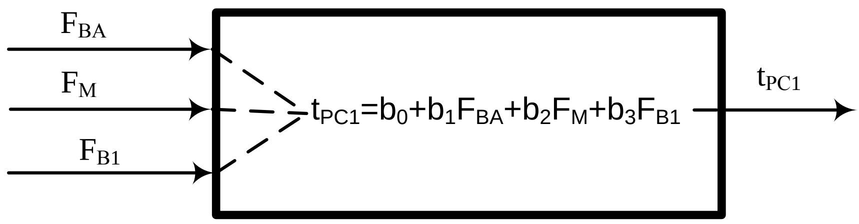


Рис.6.5. Схема імітаційної моделі статичних режимів реактора – полімеризатора

На рис. 6.6 представлено накладені значення вихідної температури реакційної суміші отримані експериментально з реального апарату, та відповідні дані розраховані за допомогою імітаційної моделі.

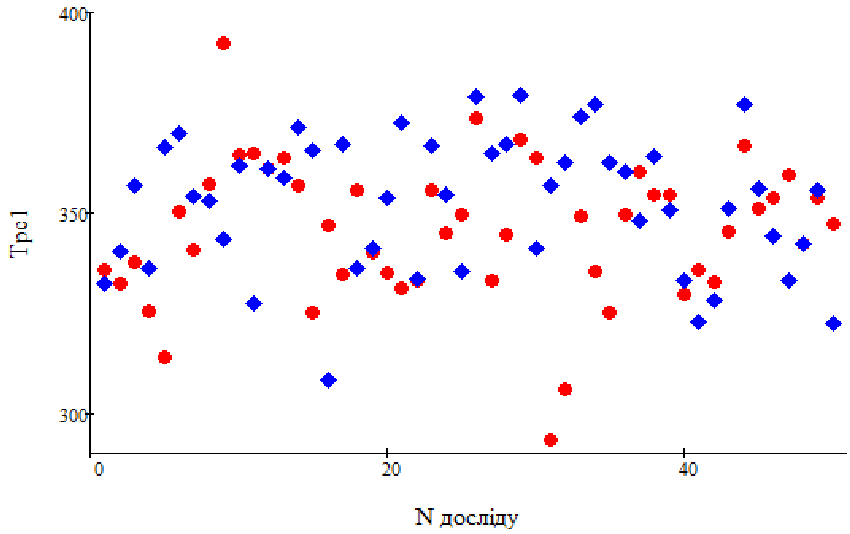


Рис. 6.6. Значення вихідної температури отримані експериментально (●●●) та розраховані за допомогою імітаційної моделі (◆◆◆)

Завдання 7. ***Виконати перевірку адекватності імітаційної моделі***

Теоретичні положення

Розглянемо 2 способи перевірки адекватності математичної моделі детально.

1-й спосіб. Перевіряють гіпотезу про близькість математичних сподівань кожної k - ї компоненти моделі та реальної системи:

$$\begin{matrix} H_0 : \mu_k^m = \mu_k^s \\ H_1 : \mu_k^m \neq \mu_k^s \end{matrix}, \qquad (7.1)$$

де μ_k^m, μ_k^s - математичні сподівання k - ї компоненти моделі та системи відповідно.

Проводять N_s дослідів на системі і отримують по кожній k -й компоненті відгуків системи вибірки значень $Y_{kn}^s, n = \overline{1, N_s}$.

Виконують N_m дослідів на моделі й одержують за тією ж k-ю компонентою відгуків моделі вибірки значень $Y_{kn}^m, n = \overline{1, N_m}$.

Звичайно намагаються, щоб обсяги вибірок були однакові (N_s = N_m), але натурні експерименти дуже дорогі, тому, зазвичай, $N_m > N_s$.

За вибірками обчислюють оцінки математичних сподівань і дисперсій відгуків моделі та системи за допомогою наступних співвідношень:

$$M_k^s \frac{\sum_{i=1}^{N_s} y_{ki}^s}{N_s}; \; M_k^m \frac{\sum_{j=1}^{N_m} y_{kj}^m}{N_m}; \qquad (7.2)$$

$$S_k^{2,s} = \frac{\sum_{i=1}^{N_s} (y_{ki}^s - M_k^s)^2}{N_s - 1}; \; S_k^{2,m} = \frac{\sum_{j=1}^{N_m} (y_{kj}^m - M_k^m)^2}{N_m - 1}. \qquad (7.3)$$

Перевірка гіпотези H_0 (7.1) означає, що треба оцінити значущість відмінності вибіркових середніх.

За критерій при перевірці гіпотези H_0 використовують t - статистику:

$$t_k = \frac{\left| M_k^s - M_k^m \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{N_s} + \frac{1}{N_m}\right)\frac{(N_s - 1)S_k^{2s} + (N_m - 1)S_k^{2m}}{N}}}, \tag{7.4}$$

де $N = N_s + N_m - 2$.

Доведено, що величина t при справедливості нульової гіпотези має розподіл Стьюдента (t – розподіл) з $u = N_s + N_m - 2$ степенями вільності.

Звичайно задають рівень значущості α і за таблицею двосторонньої критичної області критерію Стьюдента визначають його критичне значення t_{kr} У разі, коли виконується умова $t_k < t_{kr}$, то гіпотезу H_0 (7.1) для k - ї компоненти моделі і системи приймають.

Тільки при близькості усіх компонент векторів $\mathbf{Y}^s$ і $\mathbf{Y}^m$ можна зробити висновок про адекватність моделі об'єкту у цілому.

<u>2-й спосіб</u>. Цей спосіб передбачає перевірку гіпотези про однорідність двох дисперсій $S_k^{2,s}$ і $S_k^{2,g}$ для кожної k-ї компоненти. Дисперсію $S_k^{2,s}$ визначають із співвідношення (7.3). Параметр $S_k^{2,g}$ - це дисперсія відгуків моделі по відношенню до середнього значення відгуків системи.

Її розраховують так

$$S_k^{2,g} = \frac{\sum_{i=1}^{N_m} (y_{k\,i}^m - M_k^s)^2}{N_m - 1}. \tag{7.5}$$

Для перевірки однорідності двох зазначених дисперсій формулюють статистичні гіпотези таким чином

$$H_0 : \sigma_k^{2,g} = \sigma_k^{2,s}$$
$$H_1 : \sigma_k^{2,g} > \sigma_k^{2,s} \qquad (7.6)$$

де $\sigma_k^{2,g}$, $\sigma_k^{2,s}$ - дисперсії генеральних сукупностей відгуків моделі по відношенню до середнього значення відгуків системи та реальної системи відповідно.

При формулюванні гіпотез згідно з (7.6) будують правосторонню критичну область, тобто гіпотезу H_0 приймають при виконанні умови $F < F_{kr}$.

Оскільки F завжди повинно бути більше 1, у чисельнику записують більшу з двох дисперсій.

Отже, для порівняння дисперсій визначають вибіркове значення критерію Фішера за виразом

$$F = S_k^{2,g} / S_k^{2,s}.$$

Після того, як розраховано вибіркове значення критерію Фішера, за таблицею визначають критичне значення цього критерію F_{kr}, використовуючи інформацію про степені вільності $k_{\text{більш}}$, $k_{\text{менш}}$ і рівень значущості α:

$$F_{k\text{більш},\ k\text{менш},\alpha} = F_{kr}.$$

Параметри $k_{\text{більш}}$, $k_{\text{менш}}$ – це, як відомо, знаменники відповідних виразів для розрахунку дисперсій.

Виконання нерівності $F > F_{kr}$ вказує на те, що гіпотезу H_0 не можна прийняти і слід визнати відсутність адекватності між k-ю компонентою відгуків моделі і реальної системи.

Приклад виконання завдання

На рис. 7.1 зображено документ *MathCAD*, в якому наводиться розрахунок значень критерію Фішера та Стьюдента та перевірка статистичних гіпотез.

$N := 25$ $\quad\quad$ $N1 := 50$

$y\_mod_i := A_1 \cdot x1\_mod_i + A_2 \cdot x2\_mod_i + A_3 \cdot x3\_mod_i + A_0$

$y\_mod^T =$

	0	1	2	3	4	5
0	-130.207	15.006	8.358	13.154	17.917	...

$My\_mod := mean(y\_mod)$ $\quad\quad$ $My\_mod = 5.619$

$Sy\_mod := Var(y\_mod)$ $\quad\quad$ $Sy\_mod = 402.017$

$$t := \frac{|M\_y - My\_mod|}{\sqrt{\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N1}\right) \cdot \frac{(N-1) \cdot S\_y + (N1-1) \cdot Sy\_mod}{N + N1 - 2}}} \quad\quad t = 0.674$$

$t\_kr := 1.9930$

$$F := \frac{S\_y}{Sy\_mod} \quad\quad F = 0.075$$

$F\_kr := 1.7273$

Рис.7.1. Документ *MathCAD* з розрахунку критеріїв Фішера та Стьюдента для перевірки адекватності моделі

Оскільки розрахункові значення критеріїв менше за критичні, то можна зробити висновок, що модель, яку ми отримала адекватна реальному об’єкту.

Завдання 8. ***Визначити числові характеристики випадкової функції***

Треба ***розрахувати*** такі характеристики випадкової функції $X(t)$:

- математичне сподівання $\mu_x(t)$;
- дисперсію σ^2_x;
- кореляційну функцію $K_x(t,t_1)= K_x(\tau)$;
- нормовану кореляційну функцію $r_x(\tau) = \dfrac{K_x(\tau)}{\sigma_x^2}$.

Результати треба подати ***графічно***, зокрема, на одному рисунку показати в одних координатних осях такі зображення:

- реалізації: $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$;
- $\mu_x(t)$;
- σ^2_x.;

на другому рисунку навести зображення

- $K_x(\tau)$;
- $r_x(\tau)$.

Теоретичні положення

Випадковою функцією називають функцію, значення якої при одному і тому ж значенні аргументу (чи декількох аргументів) є випадковою величиною. Тобто випадкова функція в результаті досліду може прийняти той або інший вигляд, невідомий наперед. Конкретний вигляд, що приймає випадкова функція в результаті одного досліду, називається її ***реалізацією***. Якщо над випадковою функцією провести декілька дослідів, то ми отримаємо групу або “сім’ю” реалізацій цієї функції.

Позначатимемо випадкові функції великими буквами латинського алфавіту: $X(t)$, $Y(t)$..., а їх окремі реалізації – маленькими латинськими буквами з індексом – номером реалізації: $x_1(t), x_2(t)\ldots; y_1(t), y_2(t)\ldots$.

Розглянемо випадкову функцію $X(t)$. Припустимо, що отримано n її реалізацій (рис.8.1) Позначимо їх відповідно номеру досліду $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$.

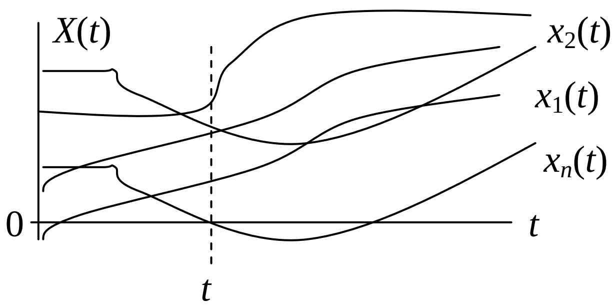


Рис.8.1.Реалізації випадкової функції $X(t)$

Для випадкових функцій уводять такі ж числові характеристики, як і для випадкових величин, і встановлюють правила дій з ними. Характеристики випадкових функцій, однак, у загальному випадку є не числами, а ***функціями***.

Математичним сподіванням випадкової функції $X(t)$ називають функцію $\mu_x(t)$, яка при кожному значенні аргументу t дорівнює математичному сподіванню відповідного перетину випадкової функції.

Таким чином, математичне сподівання випадкової функції – це деяка середня функція, біля якої варіюються конкретні реалізації випадкової функції.

Виберемо довільний перетин випадкової функції $X(t_k)$ при фіксованому t_k. У цьому перетині ми маємо звичайну випадкову величину $X(t_k)$. Визначимо її математичне сподівання:

$$\mu_x(t_k) = M[X(t_k)].$$

Дисперсією випадкової функції $X(t)$ називають функцію $\sigma_x^2(t)$, значення якої для кожного t_k дорівнює дисперсії відповідного перетину випадкової функції:

$$\sigma_x^2(t_k) = \sigma^2\left[X(t_k)\right].$$

Відомо, що $\sigma_x^2(t)$ - це додатна функція. Взявши з неї квадратний корінь, отримаємо функцію $\sigma_x(t)$ – середнє квадратичне відхилення випадкової функції:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\sigma_x^2(t)}$$

Кореляційна функція характеризує ступінь залежності між значеннями випадкової функції, що належать до різних t. Позначимо інтервал часу між двома сусідніми перетинами Δt.

Кореляційною функцією випадкової функції $X(t)$ називають функцію двох аргументів $K_x(t', t'')$, яка при кожній парі значень t' і t'' дорівнює ***кореляційному моменту*** відповідних перетинів випадкової функції:

$$K_x(t', t'') = M\left[X^\circ(t')X^\circ(t'')\right]$$

де

$$X^\circ(t') = X(t') - \mu_x(t'), \qquad X^\circ(t'') = X(t'') - \mu_x(t'').$$

Якщо $t = t' = t''$, то маємо

$$K_x(t, t) = M\left[\left(X^\circ(t)\right)^2\right] = \sigma_x^2(t).$$

Зазначимо, що властивості кореляційної функції природно випливають з властивостей кореляційної матриці системи випадкових величин:

$$R = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots r_{1L} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} & \dots r_{2L} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \\ r_{L1} & r_{L2} & r_{L3} & \dots r_{LL} \end{vmatrix}.$$

У цій матриці r_{ij} – коефіцієнти парної кореляції між двома випадковими величинами, наприклад X_i і X_j.

Замість кореляційної функції $K_x\left(t^{'}, t^{''}\right)$ можна використовувати нормовану кореляційну функцію:

$$r_x\left(t^{'}, t^{''}\right) = \frac{K_x\left(t^{'}, t^{''}\right)}{\sigma_x\left(t^{'}\right)\sigma_x\left(t^{''}\right)}.$$

Вона є коефіцієнтом кореляції між випадковими величинами $X(t^{'})$ і $X(t^{''})$.

Нормована кореляційна функція аналогічна нормованій кореляційній матриці системи випадкових величин. При $t = t^{'} = t^{''}$ така функція дорівнює одиниці:

$$r_x\left(t^{'}, t^{''}\right) = \frac{K_x\left(t^{'}, t^{''}\right)}{\sigma_x\left(t^{'}\right)\sigma_x\left(t^{''}\right)} = \frac{\sigma_x^2(t)}{\left[\sigma_x(t)\right]^2} = 1 .$$

На практиці, якщо потрібно побудувати кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, отримують ряд рівновіддалених значень аргументу $\overline{t_1, t_M}$ і будують кореляційну матрицю отриманої системи випадкових величин.

Ця матриця є не що інше, як таблиця значень кореляційної функції для прямокутної сітки значень аргументів на площині (t', t''). Далі, шляхом інтерполяції або апроксимації можна побудувати функцію двох аргументів $K_x(t', t'')$.

Занесемо зареєстровані значення $X(t)$ у табл.8.1. Кожний рядок відповідає певній реалізації, а кількість стовпців дорівнює кількості вимірювань.

Таблиця 8.1. Експериментальні дані для розрахунку характеристик випадкової функції $X(t)$

Реалізація	Час вимірювань						
	t_1	t_2	t_3	…	t_j	…	t_L
$x_1(t)$	$x_1(t_1)$	$x_1(t_2)$	$x_1(t_3)$	…	$x_1(t_j)$	…	$x_1(t_L)$
$x_2(t)$	$x_2(t_1)$	$x_2(t_2)$	$x_2(t_3)$	…	$x_2(t_j)$	…	$x_2(t_L)$
$x_3(t)$	$x_3(t_1)$	$x_3(t_2)$	$x_3(t_3)$	…	$x_3(t_j)$	…	$x_3(t_L)$
…	…	…	…	…	…	…	…
$x_i(t)$	$x_i(t_1)$	$x_i(t_2)$	$x_i(t_3)$	…	$x_i(t_j)$	…	$x_i(t_L)$
…	…	…	…	…	…	…	…
$x_N(t)$	$x_N(t_1)$	$x_N(t_2)$	$x_N(t_3)$	…	$x_N(t_j)$	…	$x_N(t_L)$

Отриманий матеріал – це результати N дослідів над системою L випадкових величин $X(t_1), X(t_2), \ldots X(t_L)$, і обробляють його відповідно. Перш за все знаходять оцінки числових характеристик функції для кожного аргументу t_k (k = 1,2,..L):

- математичних сподівань:

$$M_x(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i(t_k)}{N}, \tag{8.1}$$

- дисперсій

$$S_x^2(t_k)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\left[X_i(t_k)-M_x(t_k)\right]^2}{N-1}, \qquad (8.2)$$

- кореляційних моментів

$$K_x(t_k,t_g)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\left[X_i(t_k)-M_x(t_k)\right]\left[X_i(t_g)-M_x(t_g)\right]}{N-1}, \qquad (8.3)$$

($t_g - t_k = \tau\Delta t$, при розрахунках використати тільки випадок $t_k = 1$),

- нормованої кореляційної функції

$$r_x(t_k,t_g)=\frac{K_x(t_k,t_g)}{\sigma_x(t_k)\sigma_x(t_g)}. \qquad (8.4)$$

<u>Приклад виконання завдання</u>

У результаті спостереження за випадковою функцією $X(t)$ отримано 4 її реалізації: $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$. Кожну реалізацію спостерігали у чотирьох дослідах. Результати спостережень наведено у табл. 8.2.

Власні дані студент повинен узгодити з викладачем.

Таблиця 8.2. Значення чотирьох реалізацій випадкової функції $X(t)$

t	1	2	3	4
$x_1(t)$	1,1	1,0	0,9	1,2
$x_2(t)$	0,5	1,1	1,5	1,4
$x_3(t)$	0,9	0,2	1,8	1,1
$x_4(t)$	1,4	1,2	1,1	1,7

На рис. 8.2 зображено реалізації випадкової функції ($X_{1,i}$ – $X_{4,i}$), оцінку математичного сподівання (M_i) і дисперсії (D_i).

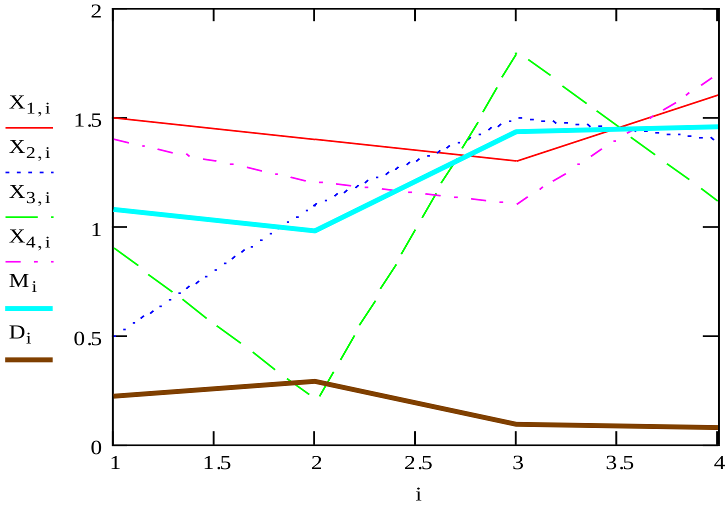


Рис. 8.2. Реалізації випадкової функції ($X_{1,i}$ – $X_{4,i}$), оцінкуи математичного сподівання (M_i) і дисперсії (D_i)

На рис. 8.3 зображено кореляційні функції $K_x(\tau)$ та $r_x(\tau)$ випадкової функції $X(t)$.

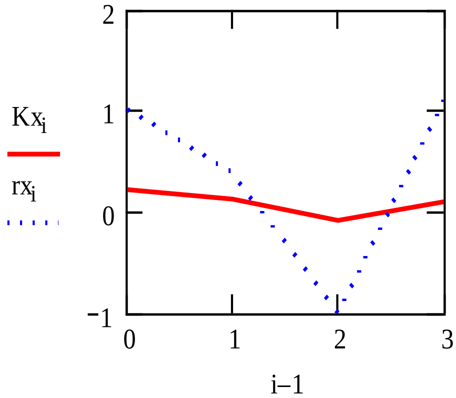


Рис. 8.3 Кореляційні функції $K_x(\tau)$ та $r_x(\tau)$ випадкової функції $X(t)$

Порядок захисту та контрольні запитання

Захист домашньої контрольної роботи відбувається після виконання усіх розділів завдання.

Студент підтверджує виконання завдань, наводячи відповідні дослідження та розрахунки з пояснювальної записки.

За вимогою викладача студент повинен показати своє вміння використовувати програму *MathCAD*.

Для підготовки до захисту розрахункової роботи студент повинен знати відповіді на наступні запитання:

1. Сутність імітаційного моделювання і його місце у класифікації моделей технологічних об’єктів і систем керування.
2. Поняття випадкової величини.
3. Поняття випадкового процесу і випадкової функції.
4. Основні характеристики випадкової величини.
5. Основні характеристики випадкової функції.
6. Формули для визначення характеристик випадкової величини за результатами експериментів.
7. Закони розподілу випадкових величин, способи їх імітації в комп’ютерному експерименті.
8. Поняття кореляційного зв’язку між випадковими величинами, способи їх імітації у комп’ютерному експерименті.
9. Автокореляційні функції випадкових процесів, способи їх імітації у комп’ютерному експерименті.
10. Способи імітаційного моделювання засобами *MahtCAD* випадкових величин із заданим законом розподілу ймовірностей.

11. Способи імітаційного моделювання засобами *MahtCAD* системи випадкових величин із заданим коефіцієнтом парної кореляції.

12. Способи імітаційного моделювання засобами *MahtCAD* випадкових величин із заданою автокореляційною функцією.

13. Формули для визначення характеристик випадкової функції за результатами експериментів.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. . Гетьманчук Ю.П., Братичак М.М., Хімія та технологія полімерів. Підручник. – Лівів. Видавництво «Бескид Біт», 2006. – 496 с.
2. Кузнецов Е.В., Альбом технологических схем производства полимеров и пластических масс на их основе.– М.: Химия, 1980. – 236 с.
3. Остапенко Ю.О., Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів керування: Підручник для студентів вищих закладів освіти, що навчаються за напрямом «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». – К.: Задруга, 1999. – 424 с.
4. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высш. шк., 2001. – 343с.
5. Применение математических методов и ЭВМ/ Р.И. Фурунжиев, Ф.М. Бабушкин, В.В.Варавко. – М.: Высш. школа, 1988. –-462 с.
5. Фурунжиев Р.И. Вычислительная техника и ее применение. – Мн.: Выш. шк., 1984. – 462с.
6. Потапов В.Д., Яризов А.Д. Имитационное моделирование производственных процессов в горной промышленности. – М.: Высш. шк., 1981. – 191с.
7. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование: Учеб.пособие для вузов. – М.: Наука, 1982. – 296 с.

ДОДАТКИ

Додаток Д1. Приклади розрахунків у системі *MathCAD*

Fва :=	Fм :=	Fв1 :=	Трс1 :=
0.136	0.062	0.283	335.951
0.133	0.058	0.309	332.365
0.135	0.057	0.261	337.771
0.13	0.072	0.285	325.479
0.123	0.059	0.305	314.149
0.14	0.055	0.238	350.184
0.139	0.063	0.3	340.838
0.146	0.058	0.253	357.36
0.162	0.055	0.283	392.47
0.148	0.056	0.253	364.347
0.15	0.06	0.249	365.042
0.149	0.06	0.283	361.113
0.149	0.061	0.236	363.595
0.147	0.062	0.272	356.85
0.13	0.061	0.282	325.297
0.141	0.057	0.303	346.941
0.132	0.054	0.25	334.716
0.147	0.066	0.266	355.852
0.138	0.064	0.284	339.882
0.134	0.055	0.278	335.042
0.133	0.061	0.278	331.286
0.135	0.067	0.285	333.26
0.146	0.059	0.291	355.827
0.138	0.052	0.293	344.871
0.141	0.054	0.292	349.611
0.153	0.055	0.279	373.573
0.133	0.058	0.26	333.055
0.14	0.06	0.283	344.645
0.151	0.058	0.271	368.184
0.149	0.059	0.257	363.705
0.111	0.062	0.316	293.34
0.118	0.061	0.249	306.228
0.142	0.062	0.24	349.32
0.134	0.055	0.282	335.491
0.128	0.056	0.246	325.155
0.141	0.056	0.266	349.742
0.148	0.058	0.292	360.152
0.143	0.055	0.263	354.616
0.14	0.049	0.256	354.497
0.132	0.065	0.257	329.873
0.136	0.063	0.296	335.724
0.133	0.061	0.254	332.784
0.139	0.056	0.249	345.491
0.15	0.056	0.287	366.823
0.142	0.056	0.259	350.97
0.145	0.061	0.285	353.797
0.147	0.058	0.287	359.68
0.14	0.065	0.284	342.44
0.143	0.054	0.277	353.761
0.142	0.062	0.273	347.377

Рис. Д1.1. Ініціалізація векторів експериментальними даними

Точкові оцінки математичних сподівань:

$$M\_F_{ва} := \frac{\sum_{i=1}^{N} F_{ва_i}}{N} = 0.14 \qquad mean(F_{ва}) = 0.14$$

$$M\_F_{м} := \frac{\sum_{i=1}^{N} F_{м_i}}{N} = 0.059 \qquad mean(F_{м}) = 0.059$$

$$M\_F_{в1} := \frac{\sum_{i=1}^{N} F_{в1_i}}{N} = 0.274 \qquad mean(F_{в1}) = 0.274$$

$$M\_Tpc1 := \frac{\sum_{i=1}^{N} Tpc1_i}{N} = 345.61 \qquad mean(M\_Tpc1) = 345.61$$

Рис. Д1.2. Розрахунок точкових оцінок математичних сподівань

Точкові оцінки дисперсій:

$$S2\_F_{ва} := \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(F_{ва_i} - M\_F_{ва}\right)^2}{N-1} = 8.289 \times 10^{-5} \qquad Var(F_{ва}) = 8.289 \times 10^{-5}$$

$$S2\_F_{м} := \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(F_{м_i} - M\_F_{м}\right)^2}{N-1} = 1.778 \times 10^{-5} \qquad Var(F_{м}) = 1.778 \times 10^{-5}$$

$$S2\_F_{в1} := \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(F_{в1_i} - M\_F_{в1}\right)^2}{N-1} = 3.842 \times 10^{-4} \qquad Var(F_{в1}) = 3.842 \times 10^{-4}$$

$$S2\_Tpc1 := \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(Tpc1_i - M\_Tpc1\right)^2}{N-1} = 308.159 \qquad Var(Tpc1) = 308.159$$

Рис. Д1.3. Розрахунок точкових оцінок дисперсій

Точкові оцінки середніх квадратичних відхилень:

$S\_F_{ва} := \sqrt{S2\_F_{ва}} = 9.104 \times 10^{-3}$ $\quad$ $Stdev(F_{ва}) = 9.104 \times 10^{-3}$

$S\_F_{м} := \sqrt{S2\_F_{м}} = 4.216 \times 10^{-3}$ $\quad$ $Stdev(F_{м}) = 4.216 \times 10^{-3}$

$S\_F_{в1} := \sqrt{S2\_F_{в1}} = 0.02$ $\quad$ $Stdev(F_{в1}) = 0.02$

$S\_T_{рс1} := \sqrt{S2\_T_{рс1}} = 17.554$ $\quad$ $Stdev(T_{рс1}) = 17.554$

Рис. Д1.4. Розрахунок точкових оцінок середніх квадратичних відхилень

Коефіцієнти кореляції між $F_{ва}$ та $F_{м}$

Коваріація (кореляційний момент):

$$Cov\_F_{ва}\_F_{м} := \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(F_{ва_i} - M\_F_{ва}\right)\cdot\left(F_{м_i} - M\_F_{м}\right)\right]}{N-1} = -8.456 \times 10^{-6} \qquad cvar(F_{ва}, F_{м}) = -8.287 \times 10^{-6}$$

Коефіцієнт парної кореляції:

$$R\_F_{ва}\_F_{м} := \frac{Cov\_F_{ва}\_F_{м}}{S\_F_{ва} \cdot S\_F_{м}} = -0.22 \qquad corr(F_{ва}, F_{м}) = -0.22$$

Рис. Д1.5. Розрахунок коефіцієнтів кореляції між витратами вінілацетату та метанолу

Автокореляційна функція для $F_{в1}$

$$Rxx\_F_{в1}(\tau) := \frac{1}{N-\tau-1} \cdot \sum_{i=1}^{N-\tau}\left[\left(F_{в1_i} - M\_F_{в1}\right)\cdot\left(F_{в1_{i+\tau}} - M\_F_{в1}\right)\right]$$

$Rxx\_F_{в1}(0) = 3.842 \times 10^{-4}$ $\quad$ $S2\_F_{в1} = 3.842 \times 10^{-4}$

$Rxx\_F_{в1}(1) = -8.576 \times 10^{-5}$

$Rxx\_F_{в1}(2) = 3.942 \times 10^{-6}$

Нормована автокореляційна функція для $F_{в1}$

$$Rxx\_F_{в1}\_norm(\tau) := \frac{Rxx\_F_{в1}(\tau)}{S2\_F_{в1}}$$

$Rxx\_F_{в1}\_norm(0) = 1$

$Rxx\_F_{в1}\_norm(1) = -0.223$

$Rxx\_F_{в1}\_norm(2) = 0.01$

Рис. Д1.6. Розрахунок автокореляційної функції для витрати води

$i := 1..N$

$X_{i,1} := 1$

$X := \mathrm{augment}(X, Fва, Fм, Fв1)$ $\qquad$ $Y := Трс1$

X =

	1	2	3	4
1	1	0.136	0.062	0.283
2	1	0.133	0.058	0.309
3	1	0.135	0.057	0.261
4	1	0.13	0.072	0.285
5	1	0.123	0.059	0.305
6	1	0.14	0.055	0.238
7	1	0.139	0.063	0.3
8	1	0.146	0.058	0.253
9	1	0.162	0.055	0.283
10	1	0.148	0.056	0.253
11	1	0.15	0.06	0.249
12	1	0.149	0.06	0.283
13	1	0.149	0.061	0.236
14	1	0.147	0.062	0.272
15	1	0.13	0.061	0.282
16	1	0.141	0.057	...

Y =

	1
1	335.951
2	332.365
3	337.771
4	325.479
5	314.149
6	350.184
7	340.838
8	357.36
9	392.47
10	364.347
11	365.042
12	361.113
13	363.595
14	356.85
15	325.297
16	...

$$B := \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot \left(X^T \cdot Y\right) = \begin{pmatrix} 121.957 \\ 1.853 \times 10^{3} \\ -456.514 \\ -29.833 \end{pmatrix}$$

Регресійна модель:

$b0 := B_{1,1} = 121.957 \quad b1 := B_{2,1} = 1.853 \times 10^{3} \quad b2 := B_{3,1} = -456.514 \quad b3 := B_{4,1} = -29.833$

Рис. Д1.7. Розрахунок лінійної регресійної моделі об’єкта керування

Моделювання корельованих випадкових величин Fва та Fм

$ux1 := \mathrm{rnorm}(N, 0, 1)$

$ux2 := \mathrm{rnorm}(N, 0, 1)$

$M\_Fва = 0.14 \quad S\_Fва = 9.104 \times 10^{-3}$

$M\_Fм = 0.059 \quad S\_Fм = 4.216 \times 10^{-3}$

$R\_Fва\_Fм = -0.22$

Формуємо значення:

$Fва\_var_i := S\_Fва \cdot ux1_i + M\_Fва$

$$Fм\_var_i := R\_Fва\_Fм \cdot S\_Fм \cdot \frac{Fва\_var_i - M\_Fва}{S\_Fва} + S\_Fм \cdot ux2_i \cdot \sqrt{1 - R\_Fва\_Fм^2} + M\_Fм$$

Рис. Д1.8. Імітування значень параметрів витрат вінілацетату та метанолу з урахуванням кореляційного зв’язку між ними

Точкові оцінки математичних сподівань згенерованих значень:

$$M\_Fва\_var := \frac{\sum_{i=1}^{N} Fва\_var_i}{N} = 0.139 \qquad M\_Fм\_var := \frac{\sum_{i=1}^{N} Fм\_var_i}{N} = 0.06$$

Точкові оцінки дисперсій згенерованих значень:

$$S2\_Fва\_var := \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(Fва\_var_i - M\_Fва\_var\right)^2}{N-1} = 7.434 \times 10^{-5} \qquad S2\_Fм\_var := \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(Fм\_var_i - M\_Fм\_var\right)^2}{N-1} = 1.965 \times 10^{-5}$$

$$Var(Fва\_var) = 7.434 \times 10^{-5} \qquad Var(Fм\_var) = 1.965 \times 10^{-5}$$

Точкові оцінки середніх квадратичних відхилень згенерованих значень:

$$S\_Fва\_var := \sqrt{S2\_Fва\_var} = 8.622 \times 10^{-3} \qquad S\_Fм\_var := \sqrt{S2\_Fм\_var} = 4.433 \times 10^{-3}$$

Значення коефіцієнта парної кореляції для згенерованих значень:

$$R\_Fва\_Fм\_var := \frac{\sum_{i=1}^{N} \left[\left(Fва\_var_i - M\_Fва\_var\right)\cdot\left(Fм\_var_i - M\_Fм\_var\right)\right]}{(N-1)\cdot(S\_Fва\_var \cdot S\_Fм\_var)} = -0.23 \qquad corr(Fва\_var, Fм\_var) = -0.23$$

Похибка відтворення коефіцієнта парної кореляції:

$$Q := \left|\frac{R\_Fва\_Fм - R\_Fва\_Fм\_var}{R\_Fва\_Fм}\right| \cdot 100 = 4.437 \quad \%$$

Рис. Д1.9. Розрахунок числових характеристик та похибки відтворення коефіцієнта парної кореляції для згенерованих вибірок корельованих параметрів витрат вінілацетату та метанолу

Формуємо значення:

$$\_b1(\tau) := e^{-\alpha\cdot\tau}$$

$$a0(\tau) := S\_F\text{в}1\cdot\sqrt{1 - \_b1(\tau)^2}$$

$$uk := rnorm(N, 0, 1)$$

$$F\text{в}1\_var := (0.273)$$

$$i := 2..N$$

$$F\text{в}1\_var_i := a0(i)\cdot uk_i + \_b1(i)\cdot F\text{в}1\_var_{i-1}$$

$$i := 1..N$$

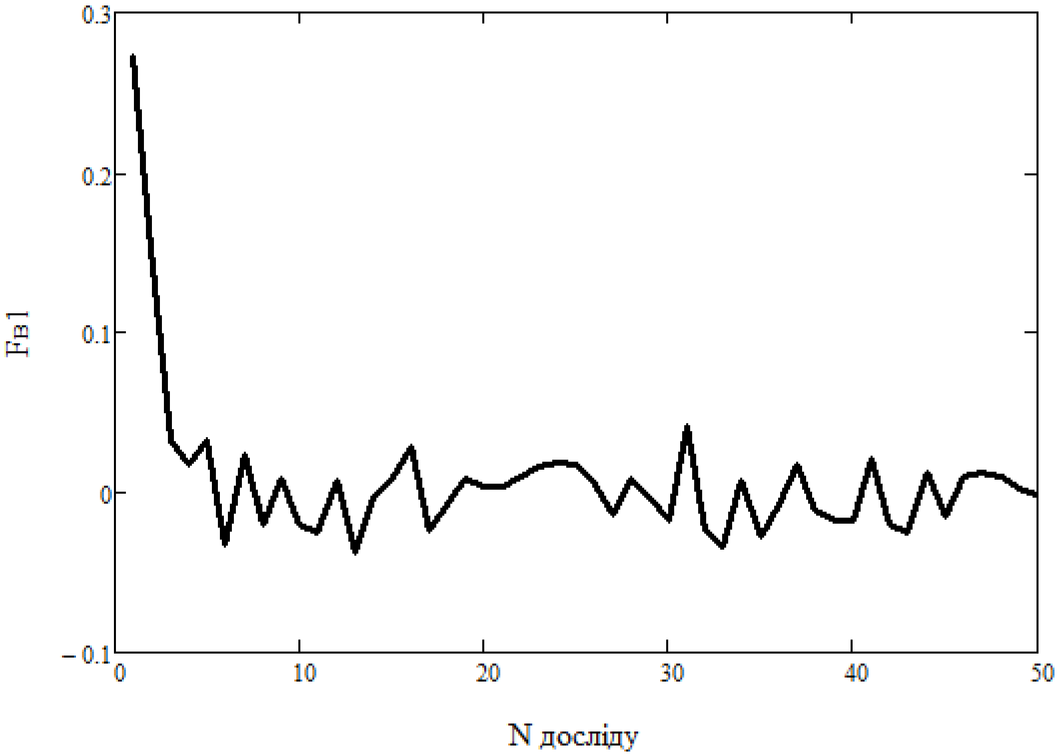


Рис. Д1.10. Розрахунок значень витрати води за заданою автокореляційною функцією

Додаток 2

Таблиця Д2. Критичні значення *t*–критерію (Стьюдента)

Кількість степенів вільності *k*	**Рівень значущості α (двобічна критична область)**					
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
1	**6.314**	**12.706**	**31.821**	**63.657**	**318.309**	**636.619**
2	**2.920**	**4.303**	**6.965**	**9.925**	**22.327**	**31.599**
3	**2.353**	**3.182**	**4.541**	**5.841**	**10.215**	**12.924**
4	**2.132**	**2.776**	**3.747**	**4.604**	**7.173**	**8.610**
5	**2.015**	**2.571**	**3.365**	**4.032**	**5.893**	**6.869**
6	**1.943**	**2.447**	**3.143**	**3.707**	**5.208**	**5.959**
7	**1.895**	**2.365**	**2.998**	**3.499**	**4.785**	**5.408**
8	**1.860**	**2.306**	**2.896**	**3.355**	**4.501**	**5.041**
9	**1.833**	**2.262**	**2.821**	**3.25**	**4.297**	**4.781**
10	**1.812**	**2.228**	**2.764**	**3.169**	**4.144**	**4.587**
11	**1.796**	**2.201**	**2.718**	**3.106**	**4.025**	**4.437**
12	**1.782**	**2.179**	**2.681**	**3.055**	**3.930**	**4.318**
13	**1.771**	**2.160**	**2.650**	**3.012**	**3.852**	**4.221**
14	**1.761**	**2.145**	**2.624**	**2.977**	**3.787**	**4.140**
15	**1.753**	**2.131**	**2.602**	**2.947**	**3.733**	**4.073**
16	**1.746**	**2.120**	**2.583**	**2.921**	**3.686**	**4.015**
17	**1.740**	**2.110**	**2.567**	**2.898**	**3.646**	**3.965**
18	**1.734**	**2.101**	**2.552**	**2.878**	**3.610**	**3.922**
19	**1.729**	**2.093**	**2.539**	**2.861**	**3.579**	**3.883**
20	**1.725**	**2.086**	**2.528**	**2.845**	**3.552**	**3.850**
21	**1.721**	**2.080**	**2.518**	**2.831**	**3.527**	**3.819**
22	**1.717**	**2.074**	**2.508**	**2.819**	**3.505**	**3.792**
23	**1.714**	**2.069**	**2.500**	**2.807**	**3.485**	**3.768**
24	**1.711**	**2.064**	**2.492**	**2.797**	**3.467**	**3.745**
25	**1.708**	**2.060**	**2.485**	**2.787**	**3.450**	**3.725**
26	**1.706**	**2.056**	**2.479**	**2.779**	**3.435**	**3.707**
27	**1.703**	**2.052**	**2.473**	**2.771**	**3.421**	**3.690**
28	**1.701**	**2.048**	**2.467**	**2.763**	**3.408**	**3.674**
29	**1.699**	**2.045**	**2.462**	**2.756**	**3.396**	**3.659**
30	**1.697**	**2.042**	**2.457**	**2.75**	**3.385**	**3.646**
31	**1.696**	**2.040**	**2.453**	**2.744**	**3.375**	**3.633**
32	**1.694**	**2.037**	**2.449**	**2.738**	**3.365**	**3.622**
33	**1.692**	**2.035**	**2.445**	**2.733**	**3.356**	**3.611**
34	**1.691**	**2.032**	**2.441**	**2.728**	**3.348**	**3.601**
35	**1.690**	**2.030**	**2.438**	**2.724**	**3.340**	**3.591**
36	**1.688**	**2.028**	**2.434**	**2.719**	**3.333**	**3.582**
37	**1.687**	**2.026**	**2.431**	**2.715**	**3.326**	**3.574**
38	**1.686**	**2.024**	**2.429**	**2.712**	**3.319**	**3.566**
39	**1.685**	**2.023**	**2.426**	**2.708**	**3.313**	**3.558**
40	**1.684**	**2.021**	**2.423**	**2.704**	**3.307**	**3.551**
41	**1.683**	**2.020**	**2.421**	**2.701**	**3.301**	**3.544**
42	**1.682**	**2.018**	**2.418**	**2.698**	**3.296**	**3.538**
43	**1.681**	**2.017**	**2.416**	**2.695**	**3.291**	**3.532**
44	**1.680**	**2.015**	**2.414**	**2.692**	**3.286**	**3.526**
45	**1.679**	**2.014**	**2.412**	**2.69**	**3.281**	**3.520**
46	**1.679**	**2.013**	**2.410**	**2.687**	**3.277**	**3.515**
47	**1.678**	**2.012**	**2.408**	**2.685**	**3.273**	**3.510**
48	**1.677**	**2.011**	**2.407**	**2.682**	**3.269**	**3.505**
49	**1.677**	**2.010**	**2.405**	**2.68**	**3.265**	**3.500**
50	**1.676**	**2.009**	**2.403**	**2.678**	**3.261**	**3.496**
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Продовження табл.Д2.

Кількість степенів вільності *k*	Рівень значущості α (двобічна критична область					
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
51	**1.675**	**2.008**	**2.402**	**2.676**	**3.258**	**3.492**
52	**1.675**	**2.007**	**2.400**	**2.674**	**3.255**	**3.488**
53	**1.674**	**2.006**	**2.399**	**2.672**	**3.251**	**3.484**
54	**1.674**	**2.005**	**2.397**	**2.670**	**3.248**	**3.480**
55	**1.673**	**2.004**	**2.396**	**2.668**	**3.245**	**3.476**
56	**1.673**	**2.003**	**2.395**	**2.667**	**3.242**	**3.473**
57	**1.672**	**2.002**	**2.394**	**2.665**	**3.239**	**3.470**
58	**1.672**	**2.002**	**2.392**	**2.663**	**3.237**	**3.466**
59	**1.671**	**2.001**	**2.391**	**2.662**	**3.234**	**3.463**
60	**1.671**	**2.000**	**2.390**	**2.660**	**3.232**	**3.460**
61	**1.670**	**2.000**	**2.389**	**2.659**	**3.229**	**3.457**
62	**1.670**	**1.999**	**2.388**	**2.657**	**3.227**	**3.454**
63	**1.669**	**1.998**	**2.387**	**2.656**	**3.225**	**3.452**
64	**1.669**	**1.998**	**2.386**	**2.655**	**3.223**	**3.449**
65	**1.669**	**1.997**	**2.385**	**2.654**	**3.220**	**3.447**
66	**1.668**	**1.997**	**2.384**	**2.652**	**3.218**	**3.444**
67	**1.668**	**1.996**	**2.383**	**2.651**	**3.216**	**3.442**
68	**1.668**	**1.995**	**2.382**	**2.650**	**3.214**	**3.439**
69	**1.667**	**1.995**	**2.382**	**2.649**	**3.213**	**3.437**
70	**1.667**	**1.994**	**2.381**	**2.648**	**3.211**	**3.435**
71	**1.667**	**1.994**	**2.380**	**2.647**	**3.209**	**3.433**
72	**1.666**	**1.993**	**2.379**	**2.646**	**3.207**	**3.431**
73	**1.666**	**1.993**	**2.379**	**2.645**	**3.206**	**3.429**
74	**1.666**	**1.993**	**2.378**	**2.644**	**3.204**	**3.427**
75	**1.665**	**1.992**	**2.377**	**2.643**	**3.202**	**3.425**
76	**1.665**	**1.992**	**2.376**	**2.642**	**3.201**	**3.423**
77	**1.665**	**1.991**	**2.376**	**2.641**	**3.199**	**3.421**
78	**1.665**	**1.991**	**2.375**	**2.640**	**3.198**	**3.420**
79	**1.664**	**1.990**	**2.374**	**2.640**	**3.197**	**3.418**
80	**1.664**	**1.990**	**2.374**	**2.639**	**3.195**	**3.416**
81	**1.664**	**1.990**	**2.373**	**2.638**	**3.194**	**3.415**
82	**1.664**	**1.989**	**2.373**	**2.637**	**3.193**	**3.413**
83	**1.663**	**1.989**	**2.372**	**2.636**	**3.191**	**3.412**
84	**1.663**	**1.989**	**2.372**	**2.636**	**3.190**	**3.410**
85	**1.663**	**1.988**	**2.371**	**2.635**	**3.189**	**3.409**
86	**1.663**	**1.988**	**2.370**	**2.634**	**3.188**	**3.407**
87	**1.663**	**1.988**	**2.370**	**2.634**	**3.187**	**3.406**
88	**1.662**	**1.987**	**2.369**	**2.633**	**3.185**	**3.405**
89	**1.662**	**1.987**	**2.369**	**2.632**	**3.184**	**3.403**
90	**1.662**	**1.987**	**2.368**	**2.632**	**3.183**	**3.402**
91	**1.662**	**1.986**	**2.368**	**2.631**	**3.182**	**3.401**
92	**1.662**	**1.986**	**2.368**	**2.630**	**3.181**	**3.399**
93	**1.661**	**1.986**	**2.367**	**2.630**	**3.180**	**3.398**
94	**1.661**	**1.986**	**2.367**	**2.629**	**3.179**	**3.397**
95	**1.661**	**1.985**	**2.366**	**2.629**	**3.178**	**3.396**
96	**1.661**	**1.985**	**2.366**	**2.628**	**3.177**	**3.395**
97	**1.661**	**1.985**	**2.365**	**2.627**	**3.176**	**3.394**
98	**1.661**	**1.984**	**2.365**	**2.627**	**3.175**	**3.393**
99	**1.660**	**1.984**	**2.365**	**2.626**	**3.175**	**3.392**
100	**1.660**	**1.984**	**2.364**	**2.626**	**3.174**	**3.39**
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Продовження табл.Д2.

Кількість степенів вільності *k*	Рівень значущості α (двобічна критична область					
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
101	**1.660**	**1.984**	**2.364**	**2.625**	**3.173**	**3.389**
102	**1.660**	**1.983**	**2.363**	**2.625**	**3.172**	**3.388**
103	**1.660**	**1.983**	**2.363**	**2.624**	**3.171**	**3.388**
104	**1.660**	**1.983**	**2.363**	**2.624**	**3.170**	**3.387**
105	**1.659**	**1.983**	**2.362**	**2.623**	**3.170**	**3.386**
106	**1.659**	**1.983**	**2.362**	**2.623**	**3.169**	**3.385**
107	**1.659**	**1.982**	**2.362**	**2.623**	**3.168**	**3.384**
108	**1.659**	**1.982**	**2.361**	**2.622**	**3.167**	**3.383**
109	**1.659**	**1.982**	**2.361**	**2.622**	**3.167**	**3.382**
110	**1.659**	**1.982**	**2.361**	**2.621**	**3.166**	**3.381**
111	**1.659**	**1.982**	**2.360**	**2.621**	**3.165**	**3.380**
112	**1.659**	**1.981**	**2.360**	**2.620**	**3.165**	**3.380**
113	**1.658**	**1.981**	**2.360**	**2.620**	**3.164**	**3.379**
114	**1.658**	**1.981**	**2.360**	**2.620**	**3.163**	**3.378**
115	**1.658**	**1.981**	**2.359**	**2.619**	**3.163**	**3.377**
116	**1.658**	**1.981**	**2.359**	**2.619**	**3.162**	**3.376**
117	**1.658**	**1.980**	**2.359**	**2.619**	**3.161**	**3.376**
118	**1.658**	**1.980**	**2.358**	**2.618**	**3.161**	**3.375**
119	**1.658**	**1.980**	**2.358**	**2.618**	**3.160**	**3.374**
120	**1.658**	**1.980**	**2.358**	**2.617**	**3.160**	**3.373**
121	**1.658**	**1.980**	**2.358**	**2.617**	**3.159**	**3.373**
122	**1.657**	**1.980**	**2.357**	**2.617**	**3.158**	**3.372**
123	**1.657**	**1.979**	**2.357**	**2.616**	**3.158**	**3.371**
124	**1.657**	**1.979**	**2.357**	**2.616**	**3.157**	**3.371**
125	**1.657**	**1.979**	**2.357**	**2.616**	**3.157**	**3.370**
126	**1.657**	**1.979**	**2.356**	**2.615**	**3.156**	**3.369**
127	**1.657**	**1.979**	**2.356**	**2.615**	**3.156**	**3.369**
128	**1.657**	**1.979**	**2.356**	**2.615**	**3.155**	**3.368**
129	**1.657**	**1.979**	**2.356**	**2.614**	**3.155**	**3.368**
130	**1.657**	**1.978**	**2.355**	**2.614**	**3.154**	**3.367**
131	**1.657**	**1.978**	**2.355**	**2.614**	**3.154**	**3.366**
132	**1.656**	**1.978**	**2.355**	**2.614**	**3.153**	**3.366**
133	**1.656**	**1.978**	**2.355**	**2.613**	**3.153**	**3.365**
134	**1.656**	**1.978**	**2.354**	**2.613**	**3.152**	**3.365**
135	**1.656**	**1.978**	**2.354**	**2.613**	**3.152**	**3.364**
136	**1.656**	**1.978**	**2.354**	**2.612**	**3.151**	**3.364**
137	**1.656**	**1.977**	**2.354**	**2.612**	**3.151**	**3.363**
138	**1.656**	**1.977**	**2.354**	**2.612**	**3.150**	**3.362**
139	**1.656**	**1.977**	**2.353**	**2.612**	**3.150**	**3.362**
140	**1.656**	**1.977**	**2.353**	**2.611**	**3.149**	**3.361**
141	**1.656**	**1.977**	**2.353**	**2.611**	**3.149**	**3.361**
142	**1.656**	**1.977**	**2.353**	**2.611**	**3.149**	**3.360**
143	**1.656**	**1.977**	**2.353**	**2.611**	**3.148**	**3.360**
144	**1.656**	**1.977**	**2.353**	**2.61**	**3.148**	**3.359**
145	**1.655**	**1.976**	**2.352**	**2.61**	**3.147**	**3.359**
146	**1.655**	**1.976**	**2.352**	**2.61**	**3.147**	**3.358**
147	**1.655**	**1.976**	**2.352**	**2.61**	**3.147**	**3.358**
148	**1.655**	**1.976**	**2.352**	**2.609**	**3.146**	**3.357**
149	**1.655**	**1.976**	**2.352**	**2.609**	**3.146**	**3.357**
150	**1.655**	**1.976**	**2.351**	**2.609**	**3.145**	**3.357**
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Додаток 3

Таблиця Д5. Критичні значення F – критерію (Фішера) при α =5%
($k_{більш}$ – степені вільності дисперсії у чисельнику,
$k_{менш}$ – степені вільності дисперсії у знаменнику критерія)

$k_{менш}$	$k_{більш}$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385
3	10.128	9.5521	9.1172	9.1172	9.0135	8.9406	8.8868	8.8152	8.8103
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.1881	6.3560	6.1694	6.0043	6.0410	5.9988
5	6.6679	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2066	4.1468	4.0990
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8378	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881
9	5.1174	4.2565	3.8626	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563
19	4.3808	3.5319	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227
20	4.3513	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3661
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419
23	4.2793	3.4221	3.0380	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821
26	4.2252	3.3690	2.9751	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655
27	4.2103	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2782	2.2229
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107
40	4.0848	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.24oo	2.1802	2.1240
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2540	2.1665	2.0970	2.0401
120	3.9201	3.0718	2.6803	2.4472	2.2900	2.1750	2.0867	2.0164	1.9588
∞	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799

Продовження табл.Д5.

$k_{менш}$	$k_{більш}$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,447	199,5	215,707	224,583	230,161	233,98	236,76	238,882	240,54	241,881
2	18,5128	19	19,1643	19,2468	19,2964	19,329	19,353	19,371	19,384	19,3959
3	10,128	9,552	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8867	8,8452	8,8123	8,7855
4	7,7086	6,944	6,5914	6,3882	6,2561	6,1631	6,0942	6,041	5,9988	5,9644
5	6,6079	5,786	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725	4,7351
6	5,9874	5,143	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2067	4,1468	4,099	4,06
7	5,5914	4,737	4,3468	4,1203	3,9715	3,866	3,787	3,7257	3,6767	3,6365
8	5,3177	4,459	4,0662	3,8379	3,6875	3,5806	3,5005	3,4381	3,3881	3,3472
9	5,1174	4,256	3,8625	3,6331	3,4817	3,3738	3,2927	3,2296	3,1789	3,1373
10	4,9646	4,102	3,7083	3,478	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204	2,9782
11	4,8443	3,982	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946	3,0123	2,948	2,8962	2,8536
12	4,7472	3,885	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964	2,7534
13	4,6672	3,805	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144	2,671
14	4,6001	3,738	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458	2,6022
15	4,5431	3,682	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876	2,5437
16	4,494	3,633	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413	2,6572	2,5911	2,5377	2,4935
17	4,4513	3,591	3,1968	2,9647	2,81	2,6987	2,6143	2,548	2,4943	2,4499
18	4,4139	3,554	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613	2,5767	2,5102	2,4563	2,4117
19	4,3807	3,521	3,1274	2,8951	2,7401	2,6283	2,5435	2,4768	2,4227	2,3779
20	4,3512	3,492	3,0984	2,8661	2,7109	2,599	2,514	2,4471	2,3928	2,3479
21	4,3248	3,466	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727	2,4876	2,4205	2,366	2,321
22	4,3009	3,443	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491	2,4638	2,3965	2,3419	2,2967
23	4,2793	3,422	3,028	2,7955	2,64	2,5277	2,4422	2,3748	2,3201	2,2747
24	4,2597	3,402	3,0088	2,7763	2,6207	2,5082	2,4226	2,3551	2,3002	2,2547
25	4,2417	3,385	2,9912	2,7587	2,603	2,4904	2,4047	2,3371	2,2821	2,2365
26	4,2252	3,369	2,9752	2,7426	2,5868	2,4741	2,3883	2,3205	2,2655	2,2197
27	4,21	3,354	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591	2,3732	2,3053	2,2501	2,2043
28	4,196	3,340	2,9467	2,7141	2,5581	2,4453	2,3593	2,2913	2,236	2,19
29	4,183	3,327	2,934	2,7014	2,5454	2,4324	2,3463	2,2783	2,2229	2,1768
30	4,1709	3,315	2,9223	2,6896	2,5336	2,4205	2,3343	2,2662	2,2107	2,1646
40	4,0847	3,231	2,8387	2,606	2,4495	2,3359	2,249	2,1802	2,124	2,0772
50	4,0343	3,182	2,79	2,5572	2,4004	2,2864	2,1992	2,1299	2,0734	2,0261
60	4,0012	3,150	2,7581	2,5252	2,3683	2,2541	2,1665	2,097	2,0401	1,9926
70	3,9778	3,127	2,7355	2,5027	2,3456	2,2312	2,1435	2,0737	2,0166	1,9689
80	3,9604	3,110	2,7188	2,4859	2,3287	2,2142	2,1263	2,0564	1,9991	1,9512
90	3,9469	3,097	2,7058	2,4729	2,3157	2,2011	2,1131	2,043	1,9856	1,9376
100	3,9361	3,087	2,6955	2,4626	2,3053	2,1906	2,1025	2,0323	1,9748	1,9267
110	3,9274	3,078	2,6871	2,4542	2,2969	2,1821	2,0939	2,0236	1,9661	1,9178
120	3,9201	3,071	2,6802	2,4472	2,2899	2,175	2,0868	2,0164	1,9588	1,9105
∞	3,8415	2,995	2,6049	2,3719	2,2141	2,0986	2,0096	1,9384	1,8799	1,8307

Продовження табл.Д5.

$k_{менш}$	$k_{більш}$									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	242,983	243,90	244,689	245,36	245,949	246,463	246,918	247,323	247,686	248,013
2	19,405	19,412	19,4189	19,424	19,4291	19,4333	19,437	19,4402	19,4431	19,4458
3	8,7633	8,7446	8,7287	8,7149	8,7029	8,6923	8,6829	8,6745	8,667	8,6602
4	5,9358	5,9117	5,8911	5,8733	5,8578	5,8441	5,832	5,8211	5,8114	5,8025
5	4,704	4,6777	4,6552	4,6358	4,6188	4,6038	4,5904	4,5785	4,5678	4,5581
6	4,0274	3,9999	3,9764	3,9559	3,9381	3,9223	3,9083	3,8957	3,8844	3,8742
7	3,603	3,5747	3,5503	3,5292	3,5107	3,4944	3,4799	3,4669	3,4551	3,4445
8	3,313	3,2839	3,259	3,2374	3,2184	3,2016	3,1867	3,1733	3,1613	3,1503
9	3,1025	3,0729	3,0475	3,0255	3,0061	2,989	2,9737	2,96	2,9477	2,9365
10	2,943	2,913	2,8872	2,8647	2,845	2,8276	2,812	2,798	2,7854	2,774
11	2,8179	2,7876	2,7614	2,7386	2,7186	2,7009	2,6851	2,6709	2,6581	2,6464
12	2,7173	2,6866	2,6602	2,6371	2,6169	2,5989	2,5828	2,5684	2,5554	2,5436
13	2,6347	2,6037	2,5769	2,5536	2,5331	2,5149	2,4987	2,4841	2,4709	2,4589
14	2,5655	2,5342	2,5073	2,4837	2,463	2,4446	2,4282	2,4134	2,4	2,3879
15	2,5068	2,4753	2,4481	2,4244	2,4034	2,3849	2,3683	2,3533	2,3398	2,3275
16	2,4564	2,4247	2,3973	2,3733	2,3522	2,3335	2,3167	2,3016	2,288	2,2756
17	2,4126	2,3807	2,3531	2,329	2,3077	2,2888	2,2719	2,2567	2,2429	2,2304
18	2,3742	2,3421	2,3143	2,29	2,2686	2,2496	2,2325	2,2172	2,2033	2,1906
19	2,3402	2,308	2,28	2,2556	2,2341	2,2149	2,1977	2,1823	2,1683	2,1555
20	2,31	2,2776	2,2495	2,225	2,2033	2,184	2,1667	2,1511	2,137	2,1242
21	2,2829	2,2504	2,2222	2,1975	2,1757	2,1563	2,1389	2,1232	2,109	2,096
22	2,2585	2,2258	2,1975	2,1727	2,1508	2,1313	2,1138	2,098	2,0837	2,0707
23	2,2364	2,2036	2,1752	2,1502	2,1282	2,1086	2,091	2,0751	2,0608	2,0476
24	2,2163	2,1834	2,1548	2,1298	2,1077	2,088	2,0703	2,0543	2,0399	2,0267
25	2,1979	2,1649	2,1362	2,1111	2,0889	2,0691	2,0513	2,0353	2,0207	2,0075
26	2,1811	2,1479	2,1192	2,0939	2,0716	2,0518	2,0339	2,0178	2,0032	1,9898
27	2,1655	2,1323	2,1035	2,0781	2,0558	2,0358	2,0179	2,0017	1,987	1,9736
28	2,1512	2,1179	2,0889	2,0635	2,0411	2,021	2,003	1,9868	1,972	1,9586
29	2,1379	2,1045	2,0755	2,05	2,0275	2,0073	1,9893	1,973	1,9581	1,9446
30	2,1256	2,0921	2,063	2,0374	2,0148	1,9946	1,9765	1,9601	1,9452	1,9317
40	2,0376	2,0035	1,9738	1,9476	1,9245	1,9037	1,8851	1,8682	1,8529	1,8389
50	1,9861	1,9515	1,9214	1,8949	1,8714	1,8503	1,8313	1,8141	1,7985	1,7841
60	1,9522	1,9174	1,887	1,8602	1,8364	1,8151	1,7959	1,7784	1,7625	1,748
70	1,9283	1,8932	1,8627	1,8357	1,8117	1,7902	1,7708	1,7531	1,7371	1,7223
80	1,9105	1,8753	1,8445	1,8174	1,7932	1,7716	1,752	1,7342	1,718	1,7032
90	1,8967	1,8613	1,8305	1,8032	1,7789	1,7571	1,7375	1,7196	1,7033	1,6883
100	1,8857	1,8503	1,8193	1,7919	1,7675	1,7456	1,7259	1,7079	1,6915	1,6764
110	1,8767	1,8412	1,8101	1,7827	1,7582	1,7363	1,7164	1,6984	1,6819	1,6667
120	1,8693	1,8337	1,8026	1,775	1,7505	1,7285	1,7085	1,6904	1,6739	1,6587
∞	1,7887	1,7522	1,7202	1,6918	1,6664	1,6435	1,6228	1,6039	1,5865	1,5705

Продовження табл. Д5.

$k_{менш}$	$k_{більш}$									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	248,309	248,579	248,825	249,051	249,260	249,452	249,630	249,796	249,95	250,095
2	19,4481	19,4503	19,4523	19,4541	19,4558	19,4573	19,4587	19,46	19,461	19,4624
3	8,654	8,6484	8,6432	8,6385	8,6341	8,6301	8,6263	8,6229	8,6196	8,6166
4	5,7945	5,7872	5,7805	5,7744	5,7687	5,7635	5,7586	5,7541	5,7498	5,7459
5	4,5493	4,5413	4,5339	4,5272	4,5209	4,5151	4,5097	4,5047	4,5001	4,4957
6	3,8649	3,8564	3,8486	3,8415	3,8348	3,8287	3,823	3,8177	3,8128	3,8082
7	3,4349	3,426	3,4179	3,4105	3,4036	3,3972	3,3913	3,3858	3,3806	3,3758
8	3,1404	3,1313	3,1229	3,1152	3,1081	3,1015	3,0954	3,0897	3,0844	3,0794
9	2,9263	2,9169	2,9084	2,9005	2,8932	2,8864	2,8801	2,8743	2,8688	2,8637
10	2,7636	2,7541	2,7453	2,7372	2,7298	2,7229	2,7164	2,7104	2,7048	2,6996
11	2,6358	2,6261	2,6172	2,609	2,6014	2,5943	2,5877	2,5816	2,5759	2,5705
12	2,5328	2,5229	2,5139	2,5055	2,4977	2,4905	2,4838	2,4776	2,4718	2,4663
13	2,4479	2,4379	2,4287	2,4202	2,4123	2,405	2,3982	2,3918	2,3859	2,3803
14	2,3768	2,3667	2,3573	2,3487	2,3407	2,3333	2,3264	2,3199	2,3139	2,3082
15	2,3163	2,306	2,2966	2,2878	2,2797	2,2722	2,2652	2,2587	2,2525	2,2468
16	2,2642	2,2538	2,2443	2,2354	2,2272	2,2196	2,2125	2,2059	2,1997	2,1938
17	2,2189	2,2084	2,1987	2,1898	2,1815	2,1738	2,1666	2,1599	2,1536	2,1477
18	2,1791	2,1685	2,1587	2,1497	2,1413	2,1335	2,1262	2,1195	2,1131	2,1071
19	2,1438	2,1331	2,1233	2,1141	2,1057	2,0978	2,0905	2,0836	2,0772	2,0712
20	2,1124	2,1016	2,0917	2,0825	2,0739	2,066	2,0586	2,0517	2,0452	2,0391
21	2,0842	2,0733	2,0633	2,054	2,0454	2,0374	2,0299	2,0229	2,0164	2,0102
22	2,0587	2,0478	2,0377	2,0283	2,0196	2,0116	2,004	1,997	1,9904	1,9842
23	2,0356	2,0246	2,0144	2,005	1,9963	1,9881	1,9805	1,9734	1,9668	1,9605
24	2,0146	2,0035	1,9932	1,9838	1,975	1,9668	1,9591	1,952	1,9453	1,939
25	1,9953	1,9842	1,9738	1,9643	1,9554	1,9472	1,9395	1,9323	1,9255	1,9192
26	1,9776	1,9664	1,956	1,9464	1,9375	1,9292	1,9215	1,9142	1,9074	1,901
27	1,9613	1,95	1,9396	1,9299	1,921	1,9126	1,9048	1,8975	1,8907	1,8842
28	1,9462	1,9349	1,9244	1,9147	1,9057	1,8973	1,8894	1,8821	1,8752	1,8687
29	1,9322	1,9208	1,9103	1,9005	1,8915	1,883	1,8751	1,8677	1,8608	1,8543
30	1,9192	1,9077	1,8972	1,8874	1,8782	1,8698	1,8618	1,8544	1,8474	1,8409
40	1,826	1,8141	1,8031	1,7929	1,7835	1,7746	1,7663	1,7586	1,7513	1,7444
50	1,7709	1,7588	1,7475	1,7371	1,7273	1,7183	1,7097	1,7017	1,6942	1,6872
60	1,7346	1,7222	1,7108	1,7001	1,6902	1,6809	1,6722	1,6641	1,6564	1,6491
70	1,7088	1,6962	1,6846	1,6738	1,6638	1,6543	1,6455	1,6372	1,6294	1,622
80	1,6895	1,6768	1,6651	1,6542	1,644	1,6345	1,6255	1,6171	1,6092	1,6017
90	1,6745	1,6618	1,6499	1,6389	1,6286	1,619	1,61	1,6015	1,5935	1,5859
100	1,6626	1,6497	1,6378	1,6267	1,6163	1,6067	1,5976	1,589	1,5809	1,5733
110	1,6528	1,6399	1,6279	1,6167	1,6063	1,5966	1,5874	1,5788	1,5706	1,563
120	1,6447	1,6317	1,6197	1,6084	1,598	1,5881	1,5789	1,5703	1,5621	1,5543
∞	1,5558	1,542	1,5292	1,5173	1,5061	1,4956	1,4857	1,4763	1,4675	1,4591

Продовження табл. Д5.

$k_{менш}$	$k_{більш}$									
	40	50	60	70	80	90	100	110	120	∞
1	251,143	251,774	252,195	252,497	252,723	252,9	253,041	253,156	253,252	254,314
2	19,4707	19,4757	19,4791	19,4814	19,4832	19,484	19,4857	19,4866	19,4874	19,4957
3	8,5944	8,581	8,572	8,5656	8,5607	8,5569	8,5539	8,5514	8,5494	8,5265
4	5,717	5,6995	5,6877	5,6793	5,673	5,668	5,6641	5,6608	5,6581	5,6281
5	4,4638	4,4444	4,4314	4,422	4,415	4,4095	4,4051	4,4015	4,3985	4,365
6	3,7743	3,7537	3,7398	3,7298	3,7223	3,7164	3,7117	3,7079	3,7047	3,6689
7	3,3404	3,3189	3,3043	3,2939	3,286	3,2798	3,2749	3,2708	3,2674	3,2298
8	3,0428	3,0204	3,0053	2,9944	2,9862	2,9798	2,9747	2,9705	2,9669	2,9276
9	2,8259	2,8028	2,7872	2,776	2,7675	2,7609	2,7556	2,7512	2,7475	2,7067
10	2,6609	2,6371	2,6211	2,6095	2,6008	2,5939	2,5884	2,5839	2,5801	2,5379
11	2,5309	2,5066	2,4901	2,4782	2,4692	2,4622	2,4566	2,4519	2,448	2,4045
12	2,4259	2,401	2,3842	2,372	2,3628	2,3556	2,3498	2,345	2,341	2,2962
13	2,3392	2,3138	2,2966	2,2841	2,2747	2,2673	2,2614	2,2565	2,2524	2,2064
14	2,2664	2,2405	2,2229	2,2102	2,2006	2,1931	2,187	2,182	2,1778	2,1307
15	2,2043	2,178	2,1601	2,1472	2,1373	2,1296	2,1234	2,1183	2,1141	2,0659
16	2,1507	2,124	2,1058	2,0926	2,0826	2,0748	2,0685	2,0633	2,0589	2,0096
17	2,104	2,0769	2,0584	2,045	2,0348	2,0268	2,0204	2,0151	2,0107	1,9604
18	2,0629	2,0354	2,0166	2,003	1,9927	1,9846	1,978	1,9726	1,9681	1,9168
19	2,0264	1,9986	1,9795	1,9657	1,9552	1,947	1,9403	1,9348	1,9302	1,878
20	1,9938	1,9656	1,9464	1,9323	1,9217	1,9133	1,9066	1,901	1,8963	1,8432
21	1,9645	1,936	1,9165	1,9023	1,8915	1,883	1,8761	1,8705	1,8657	1,8117
22	1,938	1,9092	1,8894	1,8751	1,8641	1,8555	1,8486	1,8428	1,838	1,7831
23	1,9139	1,8848	1,8648	1,8503	1,8392	1,8305	1,8234	1,8176	1,8128	1,757
24	1,892	1,8625	1,8424	1,8276	1,8164	1,8076	1,8005	1,7946	1,7896	1,7331
25	1,8718	1,8421	1,8217	1,8069	1,7955	1,7866	1,7794	1,7734	1,7684	1,711
26	1,8533	1,8233	1,8027	1,7877	1,7762	1,7672	1,7599	1,7539	1,7488	1,6906
27	1,8361	1,8059	1,7851	1,77	1,7584	1,7493	1,7419	1,7358	1,7306	1,6717
28	1,8203	1,7898	1,7689	1,7535	1,7418	1,7326	1,7251	1,719	1,7138	1,6541
29	1,8055	1,7748	1,7537	1,7382	1,7264	1,7171	1,7096	1,7033	1,6981	1,6377
30	1,7918	1,7609	1,7396	1,724	1,7121	1,7027	1,695	1,6887	1,6835	1,6223
40	1,6928	1,66	1,6373	1,6205	1,6077	1,5975	1,5892	1,5824	1,5766	1,5089
50	1,6337	1,5995	1,5757	1,558	1,5445	1,5337	1,5249	1,5176	1,5115	1,4383
60	1,5943	1,559	1,5343	1,516	1,5019	1,4906	1,4814	1,4737	1,4673	1,3893
70	1,5661	1,53	1,5046	1,4857	1,4711	1,4594	1,4498	1,4419	1,4351	1,3529
80	1,5449	1,5081	1,4821	1,4628	1,4477	1,4357	1,4259	1,4176	1,4107	1,3247
90	1,5284	1,491	1,4645	1,4448	1,4294	1,4171	1,407	1,3985	1,3914	1,302
100	1,5151	1,4772	1,4504	1,4303	1,4146	1,402	1,3917	1,3831	1,3757	1,2832
110	1,5043	1,466	1,4388	1,4183	1,4024	1,3896	1,3791	1,3703	1,3628	1,2674
120	1,4952	1,4565	1,429	1,4083	1,3922	1,3792	1,3685	1,3595	1,3519	1,2539
∞	1,394	1,3501	1,318	1,2933	1,2735	1,2572	1,2434	1,2317	1,2214	1,0033