МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання лабораторних робіт для студентів спеціальності
„Автоматизоване управління технологічними процесами”

Рекомендовано Вченою радою інженерно-хімічного факультету

Київ
НТУУ “КПІ”
2013

Спеціальні розділи теорії автоматичного керування: Метод. вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів спеціальності „Автоматизоване управління технологічними процесами” / Уклад. М. С. Піргач, Я. Ю. Жураковський – К.: НТУУ „КПІ”, 2013. – 42 С.

Гриф надано Вченою радою ІХФ

(Протокол № 1 від 27 січня 2014 р.)

Навчальне видання

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів спеціальності „Автоматизоване управління технологічними процесами”

Укладачі: Піргач Микола Соловейович, канд. техн. наук, доц.
Жураковський Ярослав Юрійович, ст. викладач

Відповідальний редактор А. І. Жученко, докт. техн. наук, проф.

Рецензент А. Р. Степанюк, канд. техн. наук, доц.

Авторська редакція

Зміст

Вступ

Дисципліна „Спеціальні розділи теорії автоматичного керування” належить до циклу дисциплін фундаментальної та професійної підготовки і входить до переліку нормативних загально-університетських дисциплін підготовки магістрів. Згідно з планом дисципліна вивчається на 3семестрі підготовки магістрів.

Дисципліна «Спеціальні розділи теорії автоматичного керування» призначена для підвищення рівня наукових знань та вдосконалення навичок у галузі математичного моделювання як окремих систем і технологічних процесів, так і хіміко-технологічних систем. Після вивчення курсу магістрант має знати:

1) форми представлення стаціонарних хіміко-технологічних систем і процесів;

2) методи розроблення гносеологічних та інформаційних математичних моделей;

3) принципи використання математичних та інформаційних моделей для дослідження будови та властивостей систем і процесів; оптимального конструювання хімічних апаратів;

4) експериментальні методи одержання математичних моделей систем і процесів на базі використання ЕОМ у реальному масштабі часу.

Знання і навички, здобуті магістрантом під час вивчення дисципліни “Спеціальні розділи теорії автоматичного керування”, використовуються в процесі підготовки магістерської дисертації та в подальшій науковій діяльності.

1. Представлення одновимірних об'єктів диференціальними рівняннями *n*-го порядку

Мета роботи: Розробити математичні моделі збирачів рідини з «коротких» і «довгих» трубопроводів як технологічних об'єктів керування (ТОК) рівнем рідини і представити їх у неперервній формі.

1.1. Збирач рідини з «коротким» трубопроводом подачі рідини

Принципову і загальну структуру схеми цього збирача показано на рис.1.1.

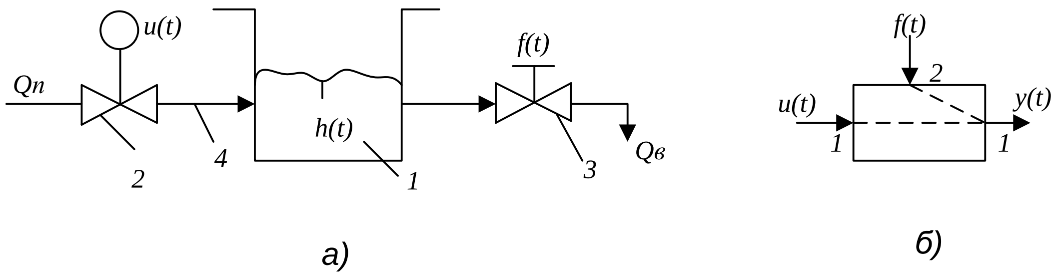


Рис 1.1. Збирач рідини з "коротким" трубопроводом подачі рідини:
а) – принципова схема; б) – загальна структурна схема;
1 – власне збирач рідини; 2 – регулювальний орган; 3 – технологічний вентиль; 4 – «короткий» трубопровід

Рівняння матеріального балансу в перехідному режимі роботи розглядуваного збирача має вигляд:

$$\frac{dV}{dt} = Q_n \cdot Q_в \qquad (1.1)$$

де Q_n і $Q_в$ – витрата рідини, що підводиться і відводиться із збирача рідини.

Об'єм рідини у збирачі:

$$V = F \cdot h, F \neq f(h) \tag{1.2}$$

де F– площа поперечного перерізу збирача; h – рівень рідини.

Витрата рідини, яка проходить через технологічний вентиль (ТВ)

$$Q_в = f\sqrt{2gh}, \tag{1.3}$$

де *f* – площа поперечного перерізу ТВ; *g* – прискорення сили тяжіння.

Підставимо вирази (1.2) і (1.3) у диференціальне рівняння (1.1). Тоді

$$F\frac{dh}{df} \neq f\sqrt{2gh} = Q_n \tag{1.4}$$

Одержані рівняння (1.4) – це нелінійне диференціальне рівняння, оскільки вихідна змінна h входить під знак радикала. Воно не може бути використане для подальших досліджень, а тому лінеаризуємо його.

При незначному збуренні цього ОВД, його можна представити наступним лінійним диференціальним рівнянням 1–го порядку:

$$\frac{d\Delta V}{df} = \Delta Q_n \cdot \Delta\, Q_в \tag{1.5}$$

Відхилення об'єму рідини *V* від його усталеного значення V^0

$$\Delta V = F \cdot \Delta h, \tag{1.6}$$

а відхилення витрати рідини $Q_в$ через ТВ від її заданого значення $Q^0{}_в$

$$\Delta Q_в = (\frac{\partial Q_в}{\partial h})_0 \cdot \Delta h + (\frac{\partial Q_в}{\partial f})_0 \cdot \Delta f,$$

де Δh і Δf – відхилення поточного значення рівня рідини h від його усталеного значення h^0 і відхилення площі поперечного перерізу f ТВ від її (площі) усталеного значення f^0.

Вираз (1.3) можна подати так:

$$Q_в = f(2gh)^{\frac{1}{2}}$$

Отже, частинна похідна

$$(\frac{\partial Q_в}{\partial h})_0 = \frac{1}{2} f_0 (2gh^0)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2g$$

або

$$(\frac{\partial Q_в}{\partial h})_0 = \frac{2gf_0}{2\sqrt{2gh^0}} \cdot \frac{\sqrt{2gh^0}}{\sqrt{2gh^0}} = \frac{Q^0{}_в}{2h^0}.$$

Частинна похідна

$$(\frac{\partial Q_в}{\partial f})_0 = \sqrt{2gh^0}\,\frac{f^0}{f^0} = \frac{Q^0{}_в}{f^0}.$$

Отже, відхилення витрати рідини, що проходить через ТВ від її усталеного значення

$$\Delta \mathrm{Q_в}(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Q^0}_в}{\mathrm{h^0}}\Delta \mathrm{h}(\mathrm{t}) + \frac{\mathrm{Q^0}_в}{\mathrm{f^0}}\Delta \mathrm{f}(\mathrm{t}) \tag{1.7}$$

Підставимо вирази (1.6) і (1.7) у рівняння (1.5). Тоді матимемо наступне:

$$F\frac{d\Delta h}{df} + \frac{1}{2}\frac{Q^0{}_в}{h^0}\Delta h(t) - \Delta Q_п(t) - \frac{Q^0{}_в}{f^0}\Delta f(t).$$

Помноживши цей вираз на $\frac{2h^0}{Q^0{}_в}$ з метою приведення його до канонічної форми:

$$2\frac{\mathrm{Fh^0}}{\mathrm{Q^0}_в}\frac{\mathrm{d}\Delta \mathrm{h}}{\mathrm{dt}} + \Delta \mathrm{h}(\mathrm{t}) = 2\frac{\mathrm{h^0}}{\mathrm{Q^0}_в}\ \Delta \mathrm{Q_п}(\mathrm{t}) - \frac{\mathrm{h^0}}{\mathrm{f^0}}\Delta \mathrm{f}(\mathrm{t}) \tag{1.8}$$

У нормальній формі диференціальне рівняння (1.8) має вигляд:

$$\mathrm{T_0}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} + \mathrm{y}(\mathrm{t}) = \mathrm{k_0 U}(\mathrm{t}) - \mathrm{k_f f}(\mathrm{t}), \tag{1.9}$$

де $y(t) \triangleq \Delta h(t)$ – вихідна змінна; $U(t) \triangleq \Delta Q_п(t)$ – керувальне діяння; $f(t) \triangleq \Delta f(t)$ – збурювальне діяння.

$$T_{11} = 2\frac{sh^0}{Q^0{}_в} = \frac{V^0}{Q^0{}_в}$$

– стала часу збирача рідини, с;

$$k_{11} = \frac{2h^0}{Q^0{}_{в}}$$

– коефіцієнт підсилення каналу керування *11*; $\frac{м}{м^3/с}$.

$$k_{12} = \frac{h^0}{f^0}$$

– коефіцієнт підсилення каналу збурення *12*; $\frac{м}{м^2}$.

1.2. Збирач рідини з «довгим» трубопроводом подачі рідини.

Принципову схему збирача рідини з «довгим» трубопроводом подачі рідини показано на рис 1.2.

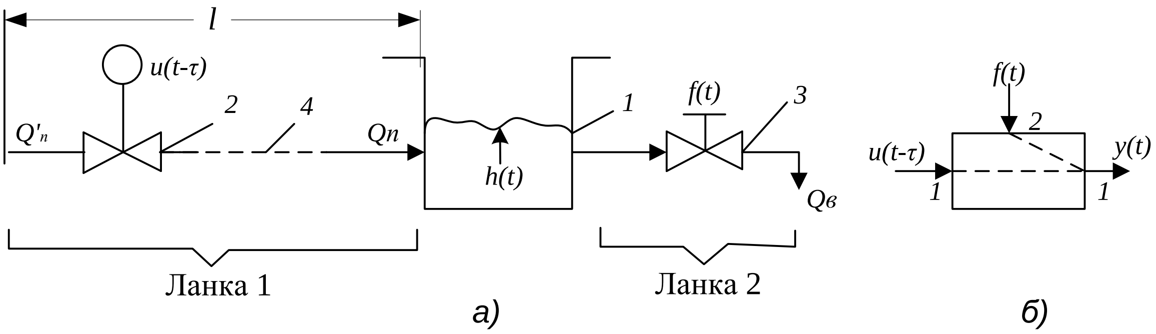


Рис 1.2. Збирач рідини з “довгим” трубопроводом подачі рідини:
а) принципова схема; б) загальна структурна схема;
1 – власне збирач рідини; 2 – регулювальний орган; 3 – технологічний вентиль; 4 – «довгий» трубопровід

Наявність «довгого» трубопроводу подачі рідини у збирач вносить запізнювання в подачу керувального діяння на ОВО. У цьому випадку витрата рідини, що подається у власне збирач рідини 1, визначається таким чином:

$$Q_{п}(t) = Q_{п}{}'(t-\tau) \triangleq U(t-\tau),$$

де $Q_{п}{}'$ –витрата рідини на вході в трубопровід, а τ – запізнювання у каналі керування 11.

Запізнювання у каналі керування

$$\tau = \frac{l}{\vartheta},$$

де $li\upsilon$ – довжина трубопроводу та швидкість руху рідини у ньому.

В силу цього диференціальне рівняння (1.9) слід подати так:

$$T_{11} \cdot \frac{dy}{dt} + y(t) = k_{11} \cdot u(t-\tau) - k_{12} \cdot f(t). \qquad (1.10)$$

Таким чином, збирач рідини з «коротким» трубопроводом подачі рідини лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку, а збирач рідини з «довгим» трубопроводом подачі рідини представляється також диференціальним рівнянням 1-го порядку, але із запізнюючою складовою в керувальному діянні. Розв’язок диференціального рівняння при $f(t)=0$ стрибкоподібному клерувальному діянні $u(t)=1$ виглядає так:

$$y(t) = k_{11}(1-\exp(-\frac{t-\tau}{T_{11}})).$$

Якщо $x = \frac{t-\tau}{T_{11}}$, $t > \tau$, то $y(t) = k_{11} \cdot (1 - e^{-x})$.

Таблиця 1. Значення e^{-x}

x	e^{-x}
0,90	0,40567
0,91	0,40252
0,92	0,39852
0,93	0,39455
0,94	0,39063
0,95	0,38674
0,96	0,38289
0,97	0,37908
0,98	0,37531
0,99	0,37158

Завдання:

Розробити математичні моделі збирачів рідини з «коротких» і «довгих» трубопроводів як технологічних об’єктів керування (ТОК) рівнем рідини і представити їх у неперервній формі. Для цього підставити значення параметрів об’єкта у рівняння (1.9) та (1.10). Побудувати графік перехідного процесу у неперервній системі.

Порядок захисту

Студент подає оформлений протокол із результатами розрахунків та відповідає на питання.

Контрольні запитання

1. Що таке матеріальний баланс.

2. Що означає «лінеаризація рівняння».

3. Як математично описується запізнення в системі.

4. Яким чином отримується рівняння (1.9).

5. Чим відрізняються розглянуті об’єкти із «довгим» та «коротким» трубопроводом.

2. Представлення одновимірних об’єктів передавальними функціями

Мета роботи: Отримати передавальні функції одновимірних об’єктів

У якості ілюстративного прикладу розглянемо збирач рідини з «довгим» трубопроводом (див. рис.1.2). Цей ОВО складається з двох послідовно з’єднаних частин: «довгого трубопроводу» (ланка 1) та власне збирача рідини (ланка 2).

Передавальна функція ланки 1

$$g1(p) = \frac{Q_п(p)}{\theta_п(p)} = \exp(-p\tau), \quad (2.1)$$

де $Q_п(p)$ і $\theta_п(p)$ – зображення за Лапласом витрати рідини, що подається на вхід трубопроводу, і витрата рідини, яка виходить з цього «довгого» трубопроводу; p – оператор Лапласа.

Передавальні функції ланки 2 визначають із диференціального рівняння (1.9). В операційній формі воно має вигляд:

$$(T_{11}p + 1)y(p) = K_{11}u(p) - K_{12}f(p), \quad (2.2)$$

де $y(p)$, $u(p)$ і $f(p)$ – зображення за Лапласом вихідної змінної, керувального діяння і збурювального діяння.

Отже, передавальна функція ланки 2 по каналу керування 11 (див. рис.1.1)

$$g_{11}{}^{/}(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{K_{11}}{1+T_{11}p}.$$

а по каналу збурення 12

$$g_{12}{}^{/}(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{K_{12}}{1+T_{11}p}.$$

Передавальна функція каналу керування 11 збирача рідини з «довгим» трубопроводом визначається так:

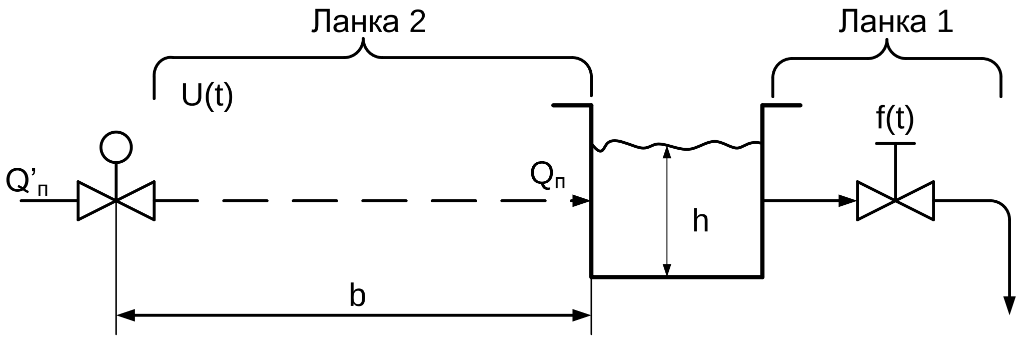
$$g_{11}(p) - g_{1}(p)\, g_{11}{}^{/}(p) = e^{-p\tau} \frac{K_{11}}{1+T_{11}p}.$$

Таким чином, збирач рідини як ТОК рівнем рідини, можна представити двома передавальними функціями:

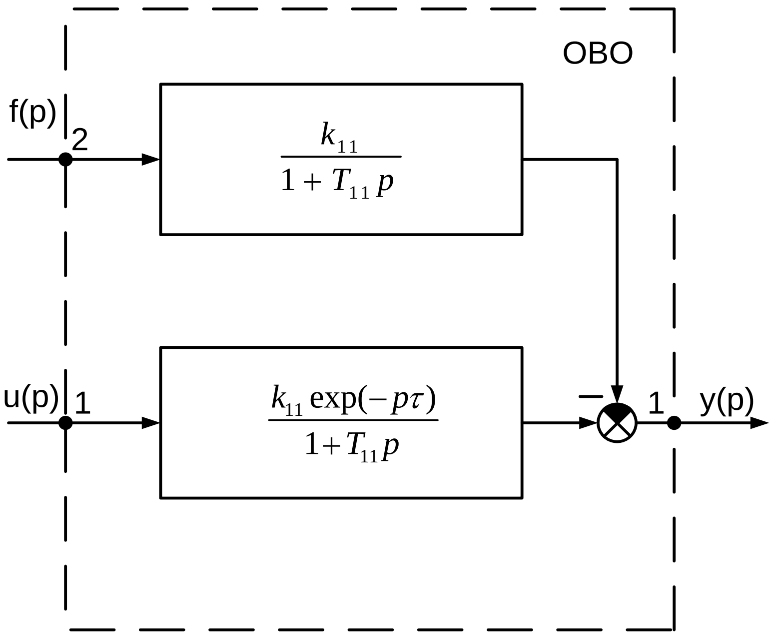
$$\mathrm{g}_{11}(\mathrm{p}) = \frac{\mathrm{K}_{11} * \exp\,(-\mathrm{p}\tau)}{1+\mathrm{T}_{11}\mathrm{p}}; \tag{2.3}$$

$$\mathrm{g}_{12}(\mathrm{p}) = \frac{\mathrm{K}_{12}}{1+\mathrm{T}_{11}\mathrm{p}}. \tag{2.4}$$

У відповідності з передавальними функціями (2.3) і (2.4) можна побудувати структурну схему розглядуваного ОВО, рис.2.1.



а)



б)

Рис. 2.1. Збирач рідини з "довгим" трубопроводом як ТОК рівнем рідини:
а – принципова схема, б – структурна схема

Як бачимо, представлення ОВО передавальними функціями є однозначним, оскільки параметри об'єкта, які є коефіцієнтами диференціального рівняння (1.10) ($Т_0, К_0, К_f$), а також запізнювання τ – входить також у передавальні функції (2.3) і (2.4).

Завдання:

Отримати передавальні функції одновимірних об'єктів. Для цього підставити значення параметрів об'єкта у рівняння (2.3) та (2.4). Побудувати графік перехідного процесу у неперервній системі.

Порядок захисту

Студент подає оформлений протокол із результатами розрахунків та відповідає на питання.

Контрольні запитання

1. Що таке передавальна функція.
2. У чому полягає перетворення за Лапласом.
3. Як описується запізнення в системі передавальною функцією.
4. Яким чином отримується рівняння (2.3) та (2.4).
5. Чим відрізняються розглянуті канали.

3. Представлення одновимірних об'єктів імпульсними передатними функціями

Мета роботи: отримати імпульсні передатні функції (ІПФ) об'єктів

Як було показано в роботі №1 ОВО може бути представлений диференціальним рівнянням *n*-ого порядку. Наприклад, збирач рідини з "довгим" трубопроводом представляється таким рівнянням:

$$T_{11}\frac{dy}{dt} + y(t) = k_{11}u(t-\tau) - k_{12}f(t). \tag{3.1}$$

Якщо $f(t) = 0$, а $u(t) = 1(t)$, то перехідна функція ОК по каналу керування 11, як розв'язок диференціального рівняння

$$T_{11}\frac{dy}{dt} + y(t) = k_{11}(t-\tau) \tag{3.2}$$

має вигляд:

$$y(t) = k_{11}\left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T_{11}}}\right) = k_{11} - k_{11}e^{-\frac{t-\tau}{T_{11}}}. \tag{3.3}$$

Отже, ІПФ цього збирача по каналу керування 11

$$g_{11}(t) = \frac{dy}{dt} = -k_{11}\left(e^{-\frac{t-\tau}{T_{11}}}\right)\left(-\frac{t-\tau}{T_{11}}\right)$$

або

$$g_{11}(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{k_{11}}{T_{11}} \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_{11}}\right). \qquad (3.4)$$

Якщо $u(t-\tau) = 0$, а $f(t) = 1(t)$, то перехідна функція ОК по каналу збурення 21, як розв'язок диференціального рівняння

$$T_{11}\frac{dy}{dt} + y(t) = -k_{12}f(t) \qquad (3.5)$$

має вигляд

$$y(t) = -k_{12}\left(1 - e^{-\frac{t}{T_0}}\right) = -k_{12} + k_{12}e^{-\frac{1}{T_{11}}}. \qquad (3.6)$$

Отже, ІПФ цього збирача рідини по каналу збурення 21

$$g_{12}(t) = \frac{dy}{dt} = k_{12}e^{\frac{-t}{T_0}}(-\frac{1}{T_{11}})$$

або

$$g_{12}(t) = \frac{dy}{dt} = -\frac{k_{12}}{T_{11}} exp\left(-\frac{t}{T_{11}}\right). \qquad (3.7)$$

Покажемо, що, скажемо, розв'язок (3.6) задовольняє диференціальне рівняння (3.5).

Підставимо вирази (3.6) і (3.7) у рівняння (3.5). Тоді

$$-T_{11}\frac{k_{12}}{T_0}e^{\frac{-t}{T_0}} - k_{12} + k_{12}e^{\frac{-t}{T_0}} + k_{12}\cdot 1 = 0,$$

$$-T_{11}\frac{k_{12}}{T_0}e^{\frac{-t}{T_0}} = T_{11}\frac{dy}{dt} \quad \text{та} \quad -k_{12} + k_{12}e^{\frac{-t}{T_0}} = y(t).$$

Таким чином, збирач рідини з “довгим” трубопроводом як ТОК рівнем рідини можна представити у ІПФ:

$$\begin{cases} g_{11}(t) = \frac{K_{11}}{T_{11}} \cdot \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_{11}}\right) \\ g_{12}(t) = \frac{K_{12}}{T_{11}} \cdot \exp\left(-\frac{t}{T_{11}}\right) \end{cases} \qquad (3.8), (3.9)$$

Аналіз ІПФ (3.8) і (3.9) свідчить, що вони також однозначно представляють розглядуваний ОВО.

Збирач рідини з «коротким» трубопроводом, як ТОК рівня рідини, представляється також двома ІПФ:

$$\begin{cases} g_{11}(t) = \frac{K_{11}}{T_{11}} \cdot \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_{11}}\right) \\ g_{12}(t) = \frac{K_{12}}{T_{11}} \cdot \exp\left(-\frac{t}{T_{11}}\right) \end{cases} \qquad (3.10), (3.11)$$

Показникова функція $y(x) = e^{-x}$

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0	1	1	0,367879	2	0,135335
0,1	0,904837	1,1	0,332871	2,1	0,122456
0,2	0,818731	1,2	0,301194	2,2	0,110803
0,3	0,740818	1,3	0,272532	2,3	0,100259
0,4	0,67032	1,4	0,246597	2,4	0,090718
0,5	0,606531	1,5	0,22313	2,5	0,082085
0,6	0,548812	1,6	0,201897	2,6	0,074274
0,7	0,496585	1,7	0,182684	2,7	0,067206
0,8	0,449329	1,8	0,165299	2,8	0,06081
0,9	0,40657	1,9	0,149569	2,9	0,055023

Завдання:

Отримати імпульсні передавальні функції одновимірних об'єктів. Для цього підставити значення параметрів об'єкта у рівняння (3.10) та (3.11). Побудувати графік перехідного процесу у імпульсній системі.

Порядок захисту

Студент подає оформлений протокол із результатами розрахунків та відповідає на питання.

Контрольні запитання

1. Що таке імпульсна передавальна функція.

2. Як експериментально отримати імпульсну передавальну функцію.

3. Як описується запізнення в системі імпульсною передавальною функцією.

4. Яким чином отримується рівняння (3.10) та (3.11).

4. Представлення одновимірних об'єктів системою векторно-матричних рівнянь

Мета роботи: навчитися складати векторно-матричні рівняння для опису одновимірних об'єктів

Нехай одновимірний об'єкт (ОВО), скажімо збирач рідини з «коротким» трубопроводом подачі рідини у нього (див. рис. 1.1) представляємо передатними функціями (2.3) і (2.4):

$$\begin{cases} g_{11}(p) = \frac{y(p)}{U(p)} = \frac{K_{11}}{1+T_{11}p} \\ g_{12}(p) = \frac{y(p)}{f(p)} = \frac{K_{12}}{1+T_{11}p} \end{cases}. \qquad (4.1), (4.2)$$

Розглянемо передавальну функцію (4.1). Формально її можна подати так:

$$\frac{y(p)}{K_{11}} = \frac{U(p)}{1+T_{11}p} = x(p), \qquad (4.3)$$

де $x(p)$ – зображення за Лапласом параметра стану системи, викликаного зміною клерувального діяння.

Розглянемо спочатку праву частину виразу (4.3), а саме

$$\frac{U(p)}{1+T_{11}p} = x(p). \qquad (4.4)$$

Із виразу (4.4) випливає, що

$$(1+T_0p)x(p)=U(p).$$

Отже оригінал цієї функції такий

$$T_0\frac{dx}{dt}+x=U$$

Або

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{T_0}x+\frac{1}{T_0}U. \qquad (4.5)$$

Диференціальне рівняння (4.5) можна подати у формі Коші, скориставшись фазовою площиною, рис. 4.1.

Нехай для т. A

$$x=x_1,\ \dot{x}=x_2.$$

Тоді $\dot{x}=\dot{x}_1$, а отже,

$$\dot{x}_1=x_2. \qquad (4.6)$$

Визначимо $\dot{x}_2$ із диференціального рівняння (4.5). Оскільки $\dot{x}=\dot{x}_1$, а $\frac{d\dot{x}_1}{dt}=\dot{x}_2$, то

$$\dot{x}_2=-\frac{1}{T_0}x_1+\frac{1}{T_0}U. \qquad (4.7)$$

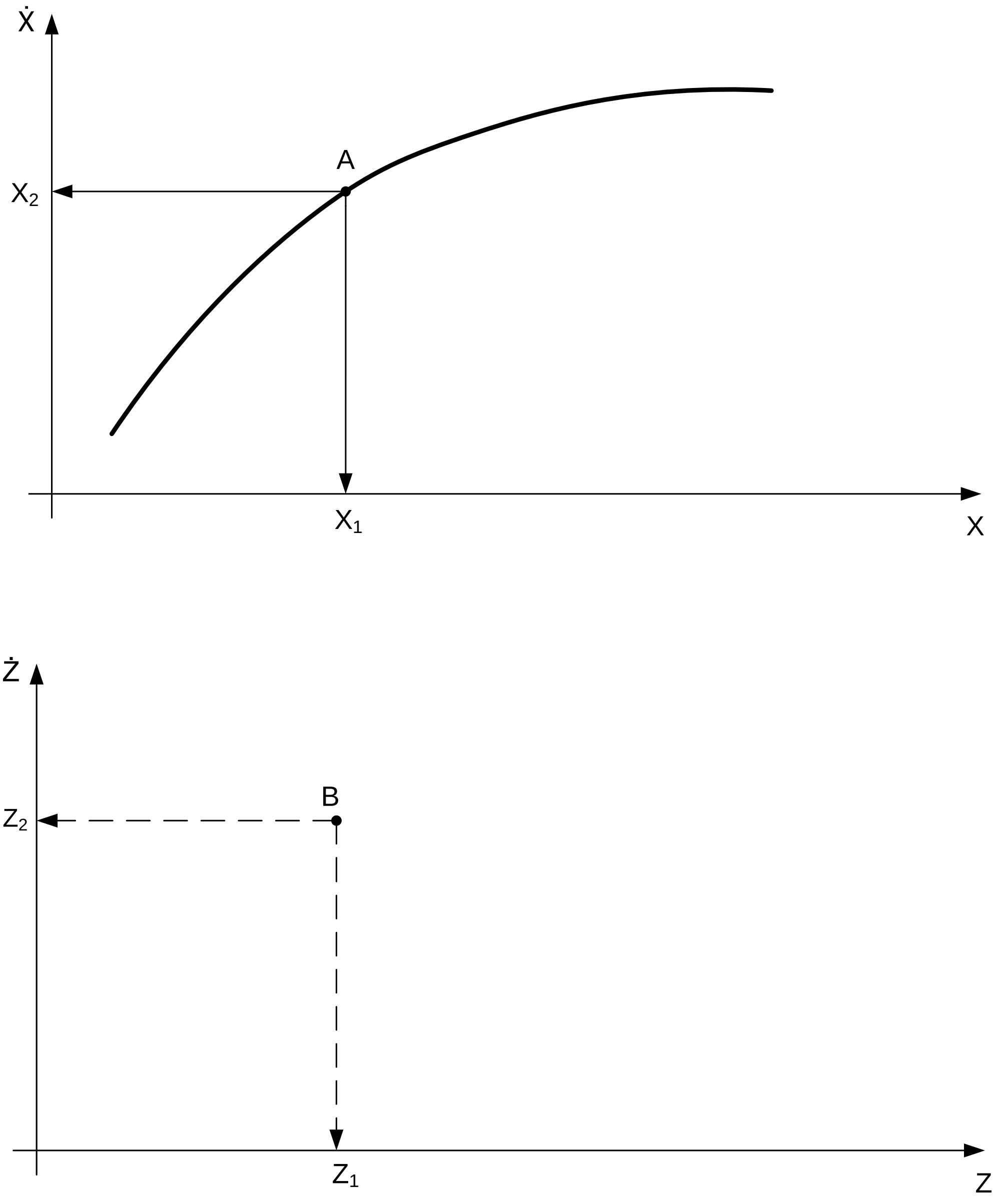


Рис.4.1. Фазова площина

Диференціальне рівняння (4.6) і (4.7) можна об'єднати в систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot 0; \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{T_0} x_1 + 0 \cdot 0 + \frac{1}{T_0} U. \end{cases} \tag{4.8}$$

У векторно-матричній формі систему рівнянь (4.8) можна подати у вигляді:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T0} \end{bmatrix} U,$$

або у стислій формі

$$\underline{\dot{\mathrm{X}}}(\mathrm{t}) = \mathrm{A}\underline{\mathrm{X}}(\mathrm{t}) + \underline{\mathrm{BU}}(\mathrm{t}), \qquad (4.9)$$

де $\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = [X_1(t) \quad X_2(t)]^T -$ вектор параметрів стану системи розміром 2x1;

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{To} & 0 \end{bmatrix} -$ матриця стану системи розміром 2x2;

$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{To} \end{bmatrix} -$ вектор-стовпчик розміром 2x1 матриці керування.

Розглянемо ліву частину виразу (4.3):

$$\frac{Y(p)}{K0} = U(p).$$

Звідси випливає, що

$$Y(p) = K0 \cdot U(p).$$

Отже, оригінал цієї функції

$$Y(t) = K0 \cdot U(t).$$

Нехай вектор-рядок розміру 2x1

$$\underline{C} = [0 \quad K0].$$

Тоді вихідну змінну системи можна визначити так:

$$\mathrm{Y} = [0 \quad \mathrm{K}0] \begin{bmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{bmatrix},$$

або

$$\mathrm{Y} = \underline{\mathrm{CX}}(\mathrm{t}). \qquad (4.10)$$

Таким чином збирач рідини з коротким трубопроводом подачі рідини по каналу керування представляється наступною системою векторно-матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \underline{\dot{\mathrm{x}}}(\mathrm{t}) = \mathrm{A}\underline{\mathrm{x}}(\mathrm{t}) + \underline{\mathrm{b}}\mathrm{U}(\mathrm{t}), \\ \mathrm{y}(\mathrm{t}) = \underline{\mathrm{Cx}}(\mathrm{t}). \end{cases} \qquad (4.11)$$

Розглянемо передавальну функцію (4.2). Формально її можна подати так:

$$\frac{\mathrm{y(p)}}{\mathrm{Kf}} = -\frac{\mathrm{f(p)}}{\mathrm{1+Top}} = \mathrm{z(p)}, \qquad (4.12)$$

де $z(p)$ – зображення за Лапласом параметра стану системи, викликаного збуренням $f(t)$.

Праву частину виразу (4.12) можна подати так:

$$(1 + T0p)z(p) = -f(p).$$

Отже, оригінал цієї функції:

$$T0\frac{dz}{zt} + z = -f$$

або

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{T0}z - \frac{1}{T0}f. \qquad (4.13)$$

Диференціальне рівняння (4.13) можна подати у формі Коші, скориставшись фазовою площиною, подібною до фазової площини (рис. 4.1).

Нехай $z = x_1, \dot{z} = x_2$. Тоді $\dot{z} = \dot{z}_1$, отже

$$\boxed{\dot{\mathrm{z}}_1 = \mathrm{z}_2}. \qquad (4.14)$$

Визначимо $\dot{z}_2$ із рівняння (4.13). Оскільки $\dot{z} = \dot{z}_1$ то $\frac{dz_1}{dt} = \dot{z}_2$

$$\dot{z}_2 = -\frac{1}{T0}z_1 - \frac{1}{T0}f.$$

Диференціальні рівняння (4.14) і (4.15) можна об’єднати в одну систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \cdot z_1 + 1 \cdot z_2 + 0 \cdot 0, \\ \dot{z}_2 = -\frac{1}{T0} z_1 + 0 \cdot 0 + \frac{1}{T0} f, \end{cases} \tag{4.16}$$

або у стислій формі:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{T_0} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{T_0} \end{bmatrix} f \; .$$

У загальному вигляді це векторно-матричне рівняння можна подати так:

$$\underline{\dot{z}}(t) = A \cdot \underline{z}(t) + \underline{b}_1 f, \tag{4.17}$$

де

$$\underline{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} .$$

Вектор стану системи розміру 2x1, викликаний зміною збурювального діяння f(t).

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{T_0} \end{bmatrix} = -\mathbf{B} \; .$$

Вектор-стовпець розміру 2x1 матриці збурення. Розглянемо ліву частину виразу (4.12):

$$\frac{y(p)}{k_f} = z(p).$$

Звідси випливає, що

$$y(p) = k_f z(p).$$

Отже, оригінал цієї функції

$$y(t) = k_f z(t).$$

Нехай вектор-рядок розміру 1x2 матриці вимірювання

$$\underline{c}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{k_f} \end{bmatrix}.$$

Тоді вихідну змінну системи можна визначити так:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{k_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

або

$$y(t) = \underline{c}_1 \underline{z}(t). \qquad (4.17)$$

Таким чином збирач рідини з «коротким» трубопроводом подачі рідини по каналу збурення 21 представляється системою векторно-матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}}(t) = A \cdot \underline{z}(t) + \underline{b}_1 \cdot f(t), \\ y(t) = \underline{c}_1 \cdot \underline{z}(t). \end{cases} \qquad (4.19)$$

Оскільки, $y = k_0 \underline{x}$, а $y = k_f \underline{z}$, то

$$\mathrm{k}_0 \underline{x} = k_f \underline{z} \rightarrow \underline{z} = \frac{k_0}{k_f} \underline{x} \rightarrow \underline{z} = d \underline{x}, \qquad (4.20)$$

де $d = \dfrac{k_0}{k_f}$. Отже, $\dot{\underline{z}} = d \dot{\underline{x}}$.

Отже, систему рівнянь (4.19) з урахуванням виразу (4.20) запишемо так:

$$\begin{cases} d \dot{\underline{x}}(t) = dA \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \cdot f(t); \\ y(t) = d \underline{c}_1 \underline{x}(t), \end{cases} \qquad (4.21)$$

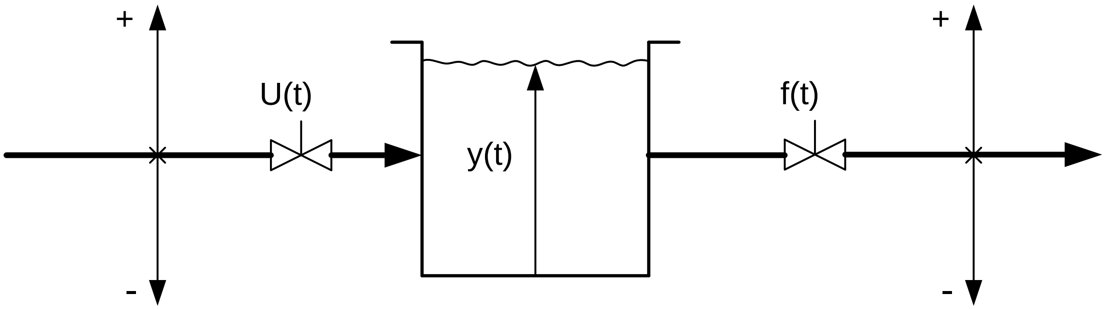
або

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = A \cdot \underline{x}(t) + \dfrac{\underline{b}}{d} \cdot f(t); \\ y(t) = d\underline{c}_1 \underline{x}(t). \end{cases}$$

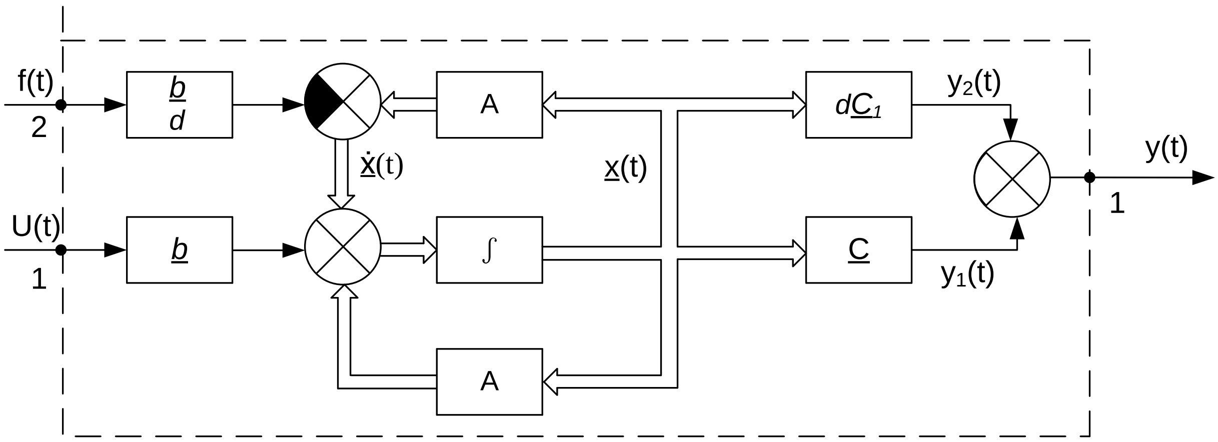
Таким чином збирач рідини з «коротким» трубопроводом представляється наступною системою векторно-матричних рівнянь:

$$\begin{cases} \underline{\dot{z}}(t) = A \cdot \underline{z}(t) + \underline{b}_1 \cdot f(t); \\ y(t) = \underline{c}_1 \underline{x}(t); \\ \underline{\dot{x}}(t) = A \cdot \underline{x}(t) + \dfrac{1}{d} \underline{b} \cdot f(t); \\ y_{21}(t) = d\underline{C}_1 \underline{x}(t). \end{cases} \tag{4.22}$$

У відповідності з системою векторно-матричних рівнянь (4.22) можна побудувати структурну схему розглядуваного ОВО (рис.4.2). На цій схемі вектори зображено подвійними лініями, а скалярні величини – однією лінією.



а)



б)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{T_0} & 0 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/T_0 \end{bmatrix}; \underline{C} = [0 \quad K_0]; C_1 = [0 \quad K_f]; d = \frac{K_0}{K_f};$$

в)

Рис.4.2. Векторно-матрична структурна схема збирача рідини з "коротким" трубопорводом як ТОК рівнем рідини:

а) розрахункова схема; б) структурна схема; в) матричні рівняння

Завдання:

Отримати систему векторно-матричних рівнянь для одновимірних об’єктів. Для цього підставити значення параметрів об’єкта у рівняння (4.22).

Порядок захисту

Студент подає оформлений протокол із результатами розрахунків та відповідає на питання.

Контрольні запитання

1. Що таке векторно-матрична форма представлення моделі об’єкта.
2. Що таке форма Коші.
3. Як використовується фазова площина у розглянутій задачі.
4. Яким чином отримується рівняння (4.22).

5. Представлення одновимірних об’єктів різницевими рівняннями

Мета роботи: навчитися складати різницеві рівняння для представлення одновимірних об’єктів

Нехай ОВД представлено по каналу керування 11 передавальною функцією

$$g_{11}(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{k_0 \exp(-p\tau)}{1+T_0 p}, \tag{5.1}$$

а по каналу збурення 21 передавальною функцією

$$g_{12}(\mathrm{p}) = \frac{\mathrm{y}(\mathrm{p})}{f(\mathrm{p})} = \frac{\mathrm{k_f}}{1+\mathrm{T_0 p}}, \qquad (5.2)$$

де k_0 і k_f – коефіцієнти підсилення по каналу керування 11 і каналу збурення 21; T_0 – стала часу об’єкта керування; p – оператор Лапласа.

Передавальній функції (5.1) відповідає наступне диференціальне рівняння:

$$T_0 \frac{\mathrm{y(t)} - \mathrm{y_п}}{d(\mathrm{t})} + (\mathrm{y(t)} - \mathrm{y_п}) = \mathrm{k_0}[\mathrm{u}(\mathrm{t} - \tau) - \mathrm{u_п}], \qquad (5.3)$$

де $y_п$ і $u_п$ – початкові значення вхідної та вихідної змінних ОВД.

Оскільки $y_п$ і $u_п$ будемо вважати сталими величинами, то рівняння (5.3) матиме такий вигляд:

$$T_0 \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} + (\mathrm{y(t)} - \mathrm{y_п}) = \mathrm{k_0}[\mathrm{u}(\mathrm{t} - \tau) - \mathrm{u_п}]. \qquad (5.4)$$

Диференціальному рівнянню (5.4) відповідає різницеве рівняння 1-ої різниці:

$$T_0 \frac{\mathrm{y(i+1)} - y(y)}{\mathrm{T}} + (\mathrm{y(i)} - \mathrm{y_п}) = \mathrm{k_0}[\mathrm{u}(\mathrm{i} - \mathrm{k}) - \mathrm{u_п}], \qquad (5.5)$$

де T – період (інтервал) квантування чи дискретизації вхідної й вихідної змінних; i – дискретний час (t = iT); k = τ / T.

Отже,

$$\mathrm{U}(\mathrm{t} - \tau) = \mathrm{U}(\mathrm{iT} - \mathrm{kT}) = \mathrm{U}(\mathrm{i} - \mathrm{k}), \mathrm{T} = 1\mathrm{c}.$$

У результаті квантування неперервної вихідної змінної y(t) одержуємо числову послідовність y(iT), яка при t = iT співпадає з неперервною вихідною змінною:

$$\mathrm{y(iT) = y(t)|_{t=iT}}, \tag{5.5}$$

а в інші моменти часу – не визначено.

На підставі різницевого рівняння (5.5) легко обчислити значення вихідної змінної в дискретний момент часу i + 1. Оскільки

$$\mathrm{y(i+1) - y(i)} + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T_0}}[\mathrm{y(i) - y_п}] = k_0 \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T_0}}[\mathrm{U(i-k) - U_п}],\ i > k,$$

то

$$\mathrm{y(i+1) = y(i)} - \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T_0}}[\mathrm{y(i) - y_п}] + k_0 \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T_0}}[\mathrm{U(i-k) - U_п}].$$

Це різницеве рівняння можна подати так:

$$\mathrm{y(i) = y(i-1)} - \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T_0}}[\mathrm{y(i-1) - y_п}] + k_0 \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T_0}}[\mathrm{U(i-k-1) - U_п}]. \tag{5.6}$$

Передавальній функції (5.2) відповідає різницеве рівняння

$$T_0 \frac{y(i+1) - y(i)}{T} + [\mathrm{y(i) - y_п}] = -\mathrm{k_f f(i)}, \qquad \mathrm{i} = 1, 2, \dots$$

З цього рівняння випливає, що

$$y(i+1) - y(i) + \frac{T}{T_0}[y(i) - y_п] = -k_f \frac{T}{T_0} f(i).$$

Отже, вихідна змінна

$$y(i) = y(i-1) - \frac{T}{T_0}[y(i-1) - y_п] = -k_f \frac{T}{T_0} f(i-1). \qquad (5.7)$$

Таким чином, збирач рідини з «довгим» трубопроводом подачі рідини як ТОК рівнем рідини можна представити двома різницевими рівняннями (5.6) і (5.7)

$$\begin{cases} y(i) = y(i-1) - \frac{T}{T_0}[y(i-1) - y_п] + k_0 \frac{T}{T_0}[U(i-k-1) - U_п], \\ y(i) = y(i-1) - \frac{T}{T_0}[y(i-1) - y_п] - k_f \frac{T}{T_0} f(i-1). \end{cases} \qquad (5.8)$$

Розглянуте представлення є однозначним, оскільки всі параметри об’єкта тут присутні.

Завдання:

Отримати різницеві рівняння для одновимірного об’єкта. Для цього підставити значення параметрів об’єкта у рівняння (5.8).

Порядок захисту

Студент подає оформлений протокол із результатами розрахунків та відповідає на питання.

Контрольні запитання

1. Що таке різницеве рівняння об’єкта.

2. Що таке період дискретизації та як його отримати.

3. Як подається запізнення у вигляді різницевого рівняння.

4. Яким чином отримується рівняння (5.8).

6. Представлення одновимірних об′єктів дискретними передавальними функціями

Мета роботи: навчитися складати дискретні передавальні функції одновимірних об’єктів

Якщо існують передавальні функції, які представляють ОВО в неперервній формі, то за допомогою z-перетворення можна визначити і дискретні передавальні функції цього ОВО.

Як приклад, розглянемо канал керування 11, представлений передавальною функцією аперіодичної ланки 1-го порядку з транспортним запізнюванням, на вхід якого подається керувальне діяння ЦССІ від мікроЕОМ, рис.6.1.

Передавальна функція екстраполятора нульового порядку (ЕНП), роль якого виконує цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП)

$$g_e(p) = \frac{1-\exp(-pT)}{p} \qquad (6.1)$$

де T – період дискретності системи, p – оператор Лапласа

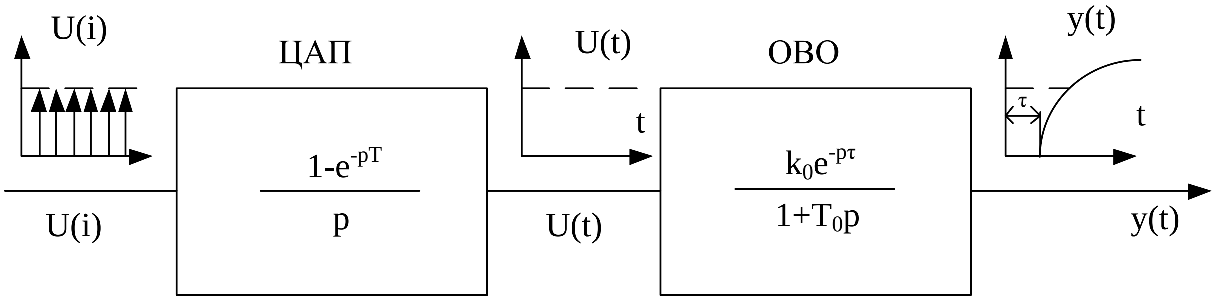


Рис. 6.1. До обчислення дискретної передавальної функції каналу керування:
ОВО – одновимірний об’єкт; ЕНП – екстраполятор нульового порядку;
ЦАП – цифро-аналоговий перетворювач

Передавальна функція каналу керування 11

$$g_{11}(p) = k_0 \frac{\exp(-p\tau)}{1+T_0\,\rho} \tag{6.2}$$

де k_0, T_0, і τ – коефіцієнт підсилення і стала часу каналу керування 11 та запізнювання у каналі керування.

У загальному випадку дискретна передавальна функція ОВО визначається за формулою:

$$g_{11}(z) = \frac{z-1}{z} g^*_{11}(z) \tag{6.3}$$

де $g^*_{11}(z)$- це Z-перетворення від передавальної функції $g_{11}(p)/p$

Отже, z – перетворення

$$g^*_{11}(z) = Z\left\{\frac{g_{11}(p)}{p}\right\} \tag{6.4}$$

Передавальну функцію (6.2) можна подати так:

$$\mathrm{g_1(p) = k_0 \frac{e^{-p\tau}}{1+T_0} = k_0 t^{-p\tau} \frac{1}{1+T_0 p} = k_0 e^{-p\tau} g_1(p).}$$

Передавальну функцію $\mathrm{g_1(p)}$ подано так:

$$\mathrm{g_1(p) = \frac{1}{1+T_0 p} = \frac{\frac{1}{T_0}}{\frac{1}{T_0}+p} = \frac{\alpha}{\alpha+p}, \alpha = \frac{1}{T_0}.}$$

Згідно з таблицею z – перетворення функцій часу (додаток 1)

$$\mathrm{g_1(z) = Z\left\{\frac{\alpha}{p(\alpha+p)}\right\} = \frac{(1-\alpha)z}{(z-1)(z-\alpha)}} \qquad (6.5)$$

де $\alpha = \exp\left(-\frac{T}{T_0}\right) = a_p$.

Відомо, що

$$z = e^{Tp}.$$

Отже,

$$\mathrm{e}^{-Tp} = z^{-1}.$$

Оскільки z^{-1} – це затримка на один період дискретності, то

$$\mathrm{e^{-p\tau} = z^{-k} = e^{-pkT} = z^{-k},} \qquad (6.6)$$

де $k = \tau/T$.

Представимо вираз (6.5) і (6.6) у формулу (6.3). Тоді матимемо:

$$g_{11}(z) = \frac{z-1}{z} k_0 z^{-k} \frac{(1-ap)z}{(z+1)(z-ap)} = k_0 \frac{(1-ap)z^{-1}}{(1-apz^{-1})} z^{-k}.$$

Отже, дискретна передавальна функція каналу керування 11

$$g_{11}(z) = \frac{y(z)}{U(z)} = k_0 \frac{(1-ap)}{1-apz^{-1}} z^{-(k+1)}. \qquad (6.7)$$

Дискретну передавальну функцію каналу збурення 21 можна одержати із передавальної функції (6.7), поклавши k=0.

Отже, дискретна передавальна функція каналу збурення 21

$$g_{12}(z) = \frac{y(z)}{f(z)} = -k_f \frac{(1-ap)}{1-apz^{-1}} z^{-1}. \qquad (6.8)$$

Таким чином, збирач рідини з "довгим" трубопроводом подачі рідини як ТОК рівня рідини представляється двома дискретними передавальними функціями (6.7), (6.8):

$$\begin{cases} y_{11}(z) = \frac{y(z)}{U(z)} = k_0 \frac{(1-ap)}{1-apz^{-1}} z^{-(k+1)}, \\ y_{12}(z) = \frac{y(z)}{f(z)} = -k_f \frac{(1-ap)}{1-apz^{-1}} z^{-1}. \end{cases} \qquad (6.9)$$

У відповідності з системою рівнянь (6.9) на рис 6.2 показано структурну схему розглядуваного ОВО.

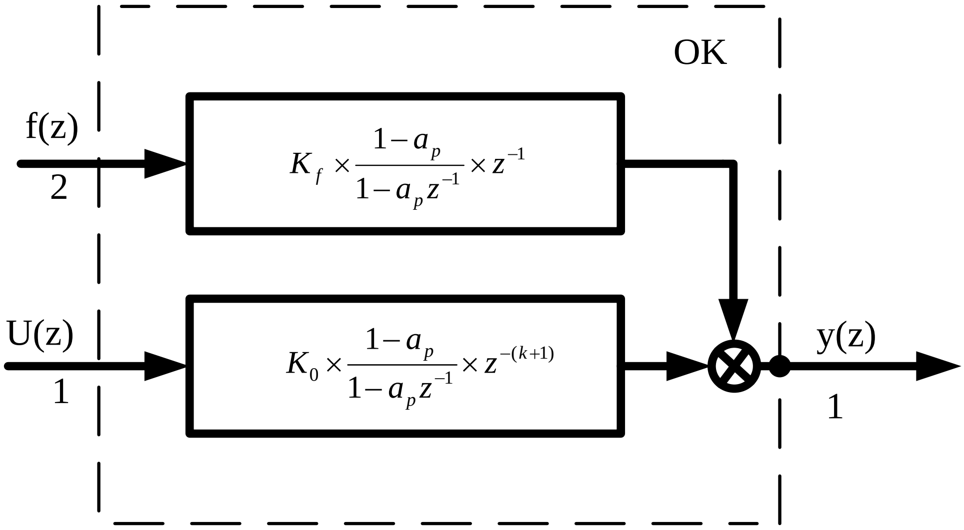


Рис. 6.2. Структурна схема збирача рідини з «довгим» трубопроводом подачі рідини, як ТОК рівнем рідини (дискретний варіант)

Завдання:

Отримати дискретні передавальні функції для одновимірного об’єкта. Для цього підставити значення параметрів об’єкта у рівняння (6.9).

Порядок захисту

Студент подає оформлений протокол із результатами розрахунків та відповідає на питання.

Контрольні запитання

1. Що таке дискретна передавальна функція.

2. Що таке період дискретизації та як його отримати.

3. Як подається запізнення у вигляді дискретної передавальної функції.

4. Яким чином отримується рівняння (6.9).

Додаток 1

Z-перетворення функцій часу

Номер	Оригінал *f(t)*	Перетворення Лапласа *F(p)*	Z-перетворення *F(x)*
1	1(t)	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{z-1^{\;2}}$
3	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2 z}{z(z-1)^3}$
4	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-d}$, $d=\exp(-\alpha T)$
5	$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}$, $d=\exp(-\alpha T)$
6	$1-e^{\alpha(t-\tau)}$	$\frac{\alpha e^{-p\tau}}{p(p+\alpha)}$	$\frac{(1-d)z^{-(k+1)}}{(z-1)(z-d)}$, $d=\exp(-\alpha T)$
7	$1-e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}$	$\frac{\alpha\beta}{(p+\alpha)(p+\beta)p}$	$\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\frac{z^2}{(z-d_1)(z-d_2)}$, $d_1=\exp(-\alpha T)$ $d_2=\exp(-\beta T)$

Список рекомендованої літератури

Основна література

1. Буйлов Г. П. Автоматическое управление технологическими процессами целлюлозно-бумажного производства [Текст]: учеб. пособие / Г. П. Буйлов, В. А. Доронин, Н. П. Серебряков. – Л.: "Издательство Ленинградского университета", 1989. – 262с. – Библиогр.: С.258–260. – 1275 экз.

2. Бойков А. К. Монтаж, наладка и эксплуатация автоматических устройств в целлюлозно-бумажном производстве [Текст]: Учебн. для техникумов. / А. К. Бойков – М.: Лесн. пром-сть, 1986. – 304 с. – Библиогр.: С.300–301. – 2500 экз.

3. Справочник по автоматизации целлюлозно – бумажных предприятий [Текст] / Э. В. Цешковский, Н. С. Пиргач, Г. Д. Ерашкин и др. 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Лесн. пром-сть, 1989. – 368 с. – Библиогр.: С. 33; С. 78; С. 118; С. 197–198; С. 303–304; С. 358. – 2800 экз. ISBN 5–7120–0166–7.

4. Кондрашкова Г. А. Технологические измерения и приборы целлюлозно-бумажной промышленности [Текст] / Г. А. Кондрашкова, В. Н. Леонтьев, О. М. Шапоров – М.: Лесн. пром-сть, 1974. – 344 с. Библиогр.: С.341 – 342. – 4000 экз. – ISBN 5–7120–0172–1

5. Пиргач Н. С. Автоматическое регулирование и регуляторы в целлюлозно-бумажной, лесохимической и деревообрабатывающей промышленности [Текст]: учебник для техн. – 2-е изд., испр. и доп. / Н. С. Пиргач, В. С. Пиргач – М.: Лесн. пром-сть, 1983. – 264 с. – Библиогр.: С.245 – 246. – 2300 экз.

6. Шамсон А. С. Автоматизация напорных ящиков быстроходных бумагоделательных машин [Текст] / А. С. Шамсон, Н. С. Пиргач. – М. : Лесн. пром-сть, 1965. – 103 с. : граф., табл. – Библиогр.: С. 103. –1100 экз.