

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ

Методичні вказівки до виконання практичних робіт
для студентів спеціальностей

Обладнання лісового комплексу
Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів
Машини і технології пакування

Рекомендовано Вченою радою інженерно-хімічного факультету

Київ
НТУУ “КПІ”
2014

Математичне моделювання систем і процесів: Методичні вказівки до виконання практичних робіт для студентів спеціальностей: «Обладнання лісового комплексу»; «Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів»; «Машини і технології пакування» / Уклад.: М. С. Піргач, Я. Ю. Жураковський – К.: НТУУ «КПІ», 2014. – 42с.

*Гриф надано Вченою радою ІХФ
(Протокол № 1 від 27 січня 2014 р.)*

Навчальне видання

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ

Методичні вказівки до виконання практичних робіт для студентів
спеціальностей

Обладнання лісового комплексу
Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів
Машини і технології пакування

Укладачі: Піргач Микола Соловейович, к.т.н., доцент
Жураковський Ярослав Юрійович, ст. викл.

Відповідальний
редактор А. І. Жученко, д.т.н., проф.

Рецензент А. Р. Степанюк, к.т.н., доц.

Авторська редакція

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1. Розробка математичної моделі нитяного маятника.....	5
2. Розробка математичної моделі пружинного маятника	9
3. Дослідження вільних коливань вантажу за допомогою моделі нитяного маятника.	15
4. Дослідження вільних коливань тягача із допомогою моделі пружинного маятника	22
5. Розроблення математичної моделі згасального пружинного маятника	27
6. Дослідження згасальних коливань за допомогою згасального пружинного маятника	30
Список рекомендованої літератури.....	40

Вступ

Дисципліна “Математичне моделювання систем і процесів” призначена для підвищення рівня наукових знань та вдосконалення навичок у галузі математичного моделювання як окремих систем і технологічних процесів, так і хіміко-технологічних систем. Після вивчення курсу студент має знати:

- форми представлення стаціонарних хіміко-технологічних систем і процесів;

- методи розроблення гносеологічних та інформаційних математичних моделей;

- принципи використання математичних та інформаційних моделей для дослідження будови та властивостей систем і процесів; оптимального конструювання хімічних апаратів;

- експериментальні методи одержання математичних моделей систем і процесів на базі використання ЕОМ у реальному масштабі часу.

Після вивчення курсу студент має вміти:

- створювати математичні моделі як окремих технологічних процесів, так і закінчених хіміко-технологічних систем та комплексів;

- досліджувати вплив конструктивних і технологічних параметрів на статичні і динамічні властивості системи;

- знаходити оптимальні конструктивні параметри систем, використовуючи сучасні методи оптимізації;

- використовувати сучасні комп’ютерні технології та засоби програмних середовищ для реалізації і дослідження розроблених чи запозичених математичних моделей.

1. Розробка математичної моделі нитяного маятника

З метою отримання математичної моделі нитяного маятника розглянемо його принципову схему (рис. 1.1).

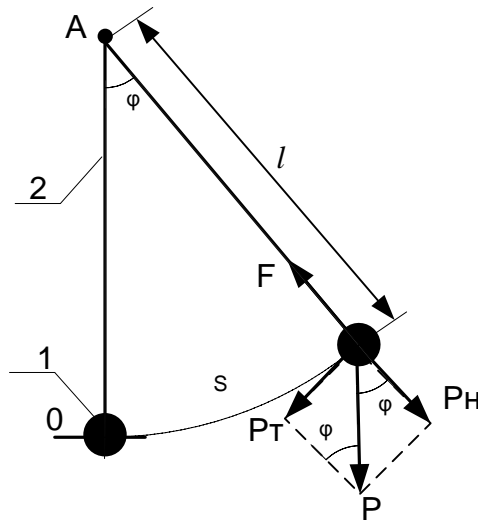


Рис. 1.1 – Принципова схема нитяного маятника:

1 – тягар, 2 – нитка.

Маятник – це кулька (тягар) 1, що підвішена на нитці 2. Розміри кульки будемо вважати малими у порівнянні з довжиною нитки l , таким чином її можна вважати матеріальною точкою. Нитку будемо вважати нерозтяжною.

У цьому випадку кулька буде рухатися за дугою кола радіуса l (див. рис. 1.1). Її положення у будь-який момент часу t визначається кутом φ , який нитка підвісу утворює із вертикаллю OA (цей кут будемо вимірювати у радіанах).

Замість кута φ можна також використовувати довжину дуги

$$S=l\varphi. \quad (1.1)$$

Знак S , що співпадає із знаком φ , показує, у яку сторону від A змістилася кулька.

Рух кульки відбувається під дією сили тяжіння P та сили натягання нитки F . Для аналізу цього руху розкладемо силу P на дві складові: тангенціальну P_T , спрямовану за дотичною до траєкторії кульки, та нормальну P_N , спрямовану вздовж нитки перпендикулярно траєкторії.

Нормальна складова сили тяжіння P_N і сила натягання нитки F утворюють доцентрове прискорення a_c та примушують кульку рухатися за колом, змінюючи весь час напрямок швидкості. Однак ці сили не змінюють величини швидкості. Навпаки, тангенціальна складова сили тяжіння P , що спрямована вздовж швидкості, утворює тангенціальне прискорення a_t і змінює величину швидкості.

З рис. 1.1 видно, що величина тангенціальної складової вектора P в момент t , коли маятник відхилився на кут φ , визначається формулою:

$$P_T = -P \sin \varphi = -mg \sin \varphi. \quad (1.2)$$

Знак мінус стоїть тому що для додатних кутів φ ($\sin \varphi > 0$) тангенціальна складова спрямована у від'ємну сторону, і навпаки. Це повертаюча сила, яка завжди намагається повернути кульку у положення рівноваги.

Згідно 2-го закону Ньютона:

$$P = m a_T, \quad (1.3)$$

Для обчислення тангенціального прискорення a_t треба знайти другу похідну від шляху $S=l\varphi$ за часом:

$$a_t = S'' = l\varphi'' \quad (1.4)$$

При диференціюванні було враховано, що величина l є постійною і може бути винесена за знак диференціювання.

Підставимо тепер (1.2) та (1.4) у вираз (1.3):

$$-mg \sin \varphi = ml\varphi''.$$

Перенесемо обидва члени в один рядок та скоротимо на m . В результаті маємо:

$$\varphi'' + (g/l) \sin \varphi = 0 \quad (1.5)$$

Це і є диференціальне рівняння, що описує коливання маятника.

Якщо коливання маятника мають малу амплітуду, так, що маятник відхиляється на невеликий кут, то рівняння (1.5) можна спростити.

При малих кутах

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Якщо $0 \leq \varphi \leq 0,114$ радіан, то

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

із точністю 0,0005.

Таким чином, нелінійне диференціальне рівняння (1.5) можна записати так:

$$\begin{aligned}\varphi'' + \frac{g}{l}\varphi &= 0, \\ 0 \leq \varphi \leq 0,114 \text{ радіан}, \\ 0 \leq \varphi \leq 10 \text{ град.}\end{aligned}\tag{1.6}$$

Позначимо

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\tag{1.7}$$

Це є власна частота ниткового маятника, с^{-1} .

Тоді лінійне диференціальне рівняння (1.5) можна записати і так:

$$\begin{aligned}\varphi'' + \omega_0^2\varphi &= 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 0,114\end{aligned}\tag{1.8}$$

Диференціальне рівняння (1.8) – це лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку. Воно описує малі коливання маятника.

Важливою особливістю цього рівняння є те, що невідома функція φ та її друга похідна φ'' входять у нього лінійно з коефіцієнтом ω_0^2 , що не залежить від часу t .

Період коливань маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \text{с}$$

або

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.9)$$

Аналіз формули (1.9) показує, що період коливань ниткового маятника не залежить від маси тягара (кульки), початкового кута відхилення φ_0 , залежить від довжини маятника l та прискорення вільного падіння g .

2. Розробка математичної моделі пружинного маятника

З метою отримання математичної моделі пружинного маятника розглянемо його принципову схему (рис. 2.1).

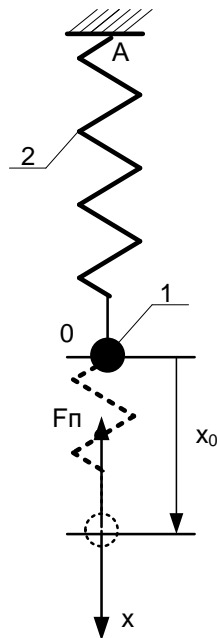


Рис. 2.1 – Принципова схема пружинного маятника:

1 – тягар, 2 – пружина.

Пружинний маятник – це кулька (тягар), яка підвішена на пружині циліндричній (геліоцентричній?). В даному випадку кульку не можна вважати матеріальною точкою, параметрами якої можна зневажати.

Така кулька має масу m . Вона підвішена на пружині, яка під дією сили пружності розтягується або стискається. В цьому випадку кулька (тягар) буде рухатися за віссю OX (рис. 2.1). Її положення у будь-який момент часу t визначається зміщенням x тягара від положення рівноваги (точка O).

Припустимо, що тягар із масою m , який пов'язаний із пружиною 2, здійснює коливання вздовж осі OX . Точку відліку обрано у стані, коли тягар знаходиться у спокої, тобто коли $x = 0$.

Рух тягара відбувається згідно 2-го закону Ньютона:

$$m \cdot a = F_{\text{п}}, \quad (2.1)$$

де a – прискорення тягара, $F_{\text{п}}$ – сила пружності.

Як відомо, сила пружності

$$F_{\text{п}} = -k \cdot x, \quad (2.2)$$

де k – жорсткість пружини, x – зміщення тягара від положення рівноваги.

Будемо розглядати значення відхилення тягара від положення рівноваги як деяку функцію від часу $x(t)$.

Необхідно знайти цю функцію. Нагадаємо, що прискорення тягара це друга похідна від його зміщення $x(t)$, тобто:

$$a = x''(t). \quad (2.3)$$

Підставимо вираз (2.2) та (2.3) у формулу (2.1). Тоді

$$m x''(t) = -k x(t)$$

або

$$x''(t) + (k/m) x(t) = 0.$$

Звідки

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \quad (2.4)$$

де $\omega_0^2 = k/m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – власна частота пружинного маятника.

Таким чином, пружинний маятник представлено лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку (2.4).

Період коливань пружинного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{k/m}. \quad (2.6)$$

Аналіз формули (2.6) показує, що період коливань пружинного маятника не залежить від начального відхилення x_0 , а залежить від маси тягаря m і жорсткості пружини k .

Період його не залежить від сили тяжіння!

Висновки

1. Період коливань пружинного маятника в СІ вимірюється в [с].

Дійсно, жорсткість пружини

$$[k] = F_{\pi}/x = \text{Н/м},$$

$$1 \text{ Н} = \text{кг} \cdot (\text{м}/\text{с}^2), P = mg.$$

Отже

$$[k] = \text{кг} \cdot (\text{м}/\text{с}^2) \cdot 1/\text{м} = \text{кг}/\text{с}^2$$

тому

$$m/k = \text{кг}/(\text{кг}/\text{с}^2) = \text{с}^2.$$

Звідки період

$$T = 2\pi \sqrt{k/m} = \text{с}.$$

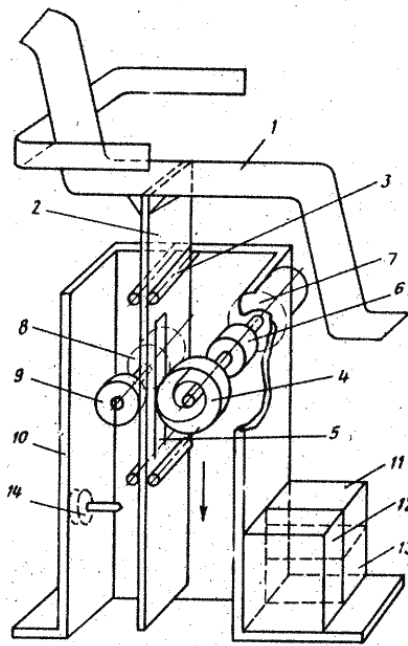
2. Гармонічні коливання ПМ виникають під дією сили пружності $F_{\text{п}}$.
Період і частота такого маятника не залежать від прискорення сили тяжіння g , а лише від його маси m і жорсткості k .

Даний маятник здійснюватиме коливання з однаковим періодом T і частотою f у будь-якій точці земної поверхні, на іншій планеті або у міжпланетному кораблі.

Цю властивість ПМ можна використати для порівняння маси різних тіл.

Розглянемо принцип дій та будову масметра – приладу для вимірювання маси космонавта в умовах невагомості.

Масметр – це коливна система, яка складається з пружини і крісла, в якому розміщується космонавт.



а)

б)

Рис. 2.2 – Масметр:

а) схема з патенту: 1 – крісло, 2 – пластина, 3 – опори, 4 – барабан із спіральною пружиною, 5 – пружинна стрічка; б) на космічній станції

Космонавт, сидячи в кріслі, виводить його із положення рівноваги і починає власне коливатися. Частота коливань космонавта вимірюється частотоміром.

Частота звичайна і частота колова пов'язані так:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi / T.$$

Оскільки колова частота

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

ТО

$$2\pi f = \sqrt{k/m} \text{ або } 4\pi^2 f^2 = k/m.$$

Звідси випливає, що маса космонавта

$$m = k/(4\pi^2 f^2)$$

або

$$m = c/f^2, c = k/(4\pi^2).$$

Шкалу частотоміра градуюють не в Герцах, а у кілограмах.

Хитавиця (вертикальна) корабля

а) Судно знаходиться у спокої. У цьому випадку на нього діє сила тяжіння F і архімедова сила F_1 (рис. 2.3).

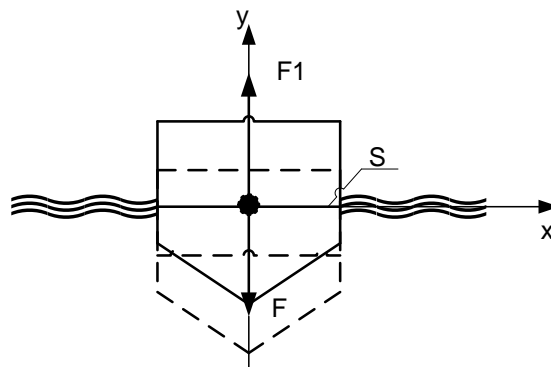


Рис. 2.3

б) Судно виведено із положення рівноваги і воно починає коливатися по вертикалі. Тепер архімедова сила стає рівною F_2 , вона збільшилася на

$S\rho y$ (де ρ – густина води, y – вертикальне зміщення відносно точки прикладання сили F_1).

У цьому випадку сила пружності

$$F_2 = S\rho y,$$

або

$$F_2 = ky, \quad k = S\rho,$$

де S – площа поперечного перерізу судна по ватерлінії.

Отже, період T власних коливань судна

$$T = 2\pi \sqrt{m / S\rho}.$$

Звідси видно, що період хитавиці судна обернено пропорційний площі поперечного перерізу судна по ватерлінії і прямо пропорційний його масі. Що більша маса, то більший період коливання, але менша частота цих коливань.

3. Дослідження вільних коливань вантажу за допомогою моделі нитяного маятника.

Як відомо(пр. роб №1) нитяний маятник представляється наступним лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку:

$$\varphi'' + \omega_0^2 \varphi = 0 \tag{3.1}$$

Важливою особливістю рівняння (3.1) є те, що невідома функція φ та її друга похідна φ'' входять в нього лінійно з коефіцієнтами, що не залежать від часу t . Такі рівняння називаються лінійними рівняння з постійними коефіцієнтами. Вони представляють собою самий простий тип диференціальних рівнянь.

Загальним вирішенням рівняння 3.1 має вигляд:

$$\varphi = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \quad (3.2)$$

де

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \text{ c}^{-1} \quad (3.3)$$

Вирішення (3.2) залежить, як і має бути для рівняння 2-го порядку, від двох довільних постійних C_1 та C_2 . Надаючи їм різні числові значення, ми будемо отримувати різні часткові рішення.

Перевіримо, що функція (3.2) дійсно задовольняє рівняння (3.1). Її диференціювання дає:

$$\varphi' = -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t \quad (3.4)$$

Тут ми врахували, що похідна «*sin*» рівна «*cos*», а похідна «*cos*» рівна «*-sin*». Повторне диференціювання функції 3.4 дозволяє вирахувати другу похідну:

$$\varphi' = -C_1 \omega_0^2 \cos \omega_0 t - C_2 \omega_0^2 \sin \omega_0 t \quad (3.5)$$

Підставляючи (3.2) та (3.5) в ліву частину рівняння (3.1), та приймаючи до уваги формулу (3.3) для частоти ω_0 , отримуємо:

$$-C_1 \omega_0^2 \cos \omega_0 t - C_2 \omega_0^2 \sin \omega_0 t + \omega_0^2 (C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t) = 0$$

Формул (3.2) показує, що висіння маятника, підкоряється рівнянню (3.2), являє собою гармонічні коливання з коловою частотою ω_0 (3.3),

тобто: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ та періодом T .

Так як $\omega_0 = 2\pi f$, а $f = \frac{1}{T}$, c^{-1} , Гц

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{g}{l}} &= \frac{2\pi}{T}, \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Постійні C_1 та C_2 в загальному вирішенні (3.2) знаходяться з початкових умов. Припустимо, наприклад, що в деякий момент часу, який ми умовно приймемо за момент $t = 0$, маятник відхилили на деякий кут φ_0 , та спокійно, без поштовху, відпустили.

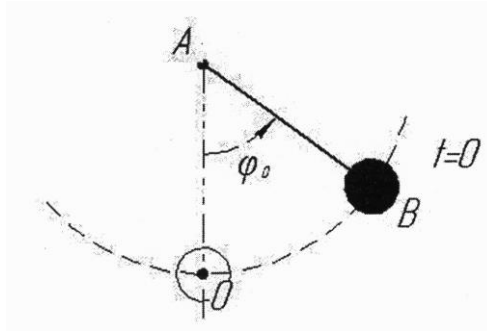


Рис. 3.1

Такий спосіб виклику коливань можна описати за допомогою початкових умов:

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi_0 \\ \varphi'(0) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Перше з цього співвідношення очевидне, друге означає, що початкова швидкість маятника, приймається рівна 0. Знайдемо вирішення, що описує коливання маятника при такому способі збудження. Для цього приймемо в формулі (3.2), що $t = 0$ та скористаємося першою умовою (3.7), а саме $\varphi(0) = \varphi_0$. Тоді:

$$\varphi(0) = C_1 \cos \omega_0 0 + C_2 \sin \omega_0 0 = \varphi_0$$

$$\cos \omega_0 0 = 1, \sin \omega_0 0 = 0$$

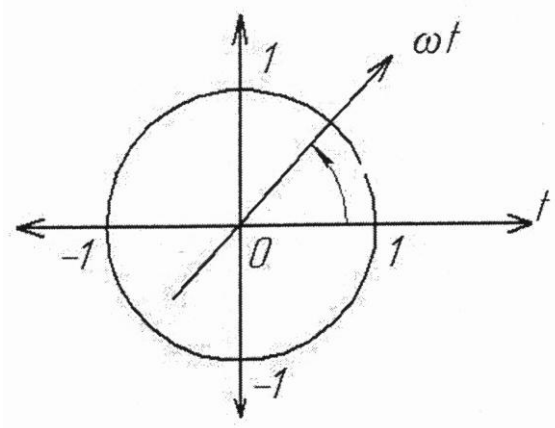


Рис. 3.2

Отримуємо:

$$C_1 \cdot 1 = \varphi_0 \quad (3.8)$$

Так само в (3.4) $t = 0$, використаємо другу умову, а саме:

$$\varphi'(0) = 0$$

$$\varphi'(0) = -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 \cdot 0 + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 \cdot 0 = 0,$$

$$\sin \omega_0 \cdot 0 = 0, \cos \omega_0 \cdot 0 = 1,$$

$$\varphi'(0) = C_2 \omega_0 \cdot 1 = 0,$$

$$C_2 = 0. \quad (3.9)$$

Підставляючи знайдені значення C_1 та C_2 в формулу (3.2) отримаємо:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega_0 t \quad (3.10)$$

В цьому випадку амплітуда коливань $A = \varphi_0$, а початкова фаза коливань може бути рівна $\pi/2$, тобто $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

У відповідності з виразом (3.10) на (рис. 3.3 б) побудуємо графік зміни відхилення вантажу від положення рівноваги (графік з урахуванням початкових умов (3.7)).

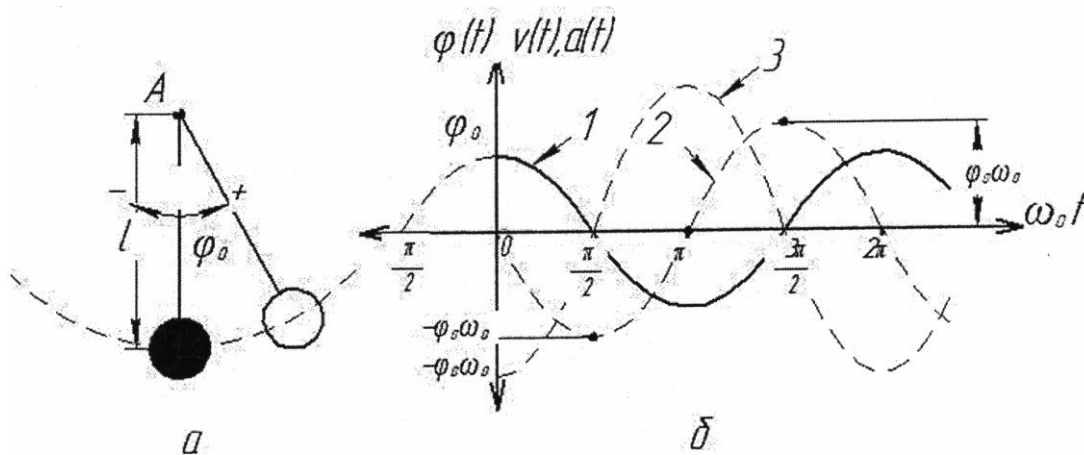


Рис. 3.3 – Вільні коливання нитяного маятника:

а – схема маятника, б – графіки зміни: 1 – відхилення вантажу, 2 – швидкості вантажу, 3 – прискорення коливального руху вантажу.

Проекція миттєвої швидкості вантажу відповідно формулі (3.10):

$$v(t) = \dot{\varphi}(t) = -\varphi_0 \omega_0 \sin \omega_0 t,$$

$$\sin \omega_0 t = -\cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Тому:

$$v(t) = \varphi_0 \omega_0 \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.11)$$

Графік залежності показано на рис. 3.3, б. максимальна швидкість коливального руху вантажу:

$$v_{max} = \varphi_0 \omega_0 \quad (3.12)$$

Прискорення коливального руху вантажу:

$$a(t) = \dot{v}(t) = -\varphi_0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t \quad (3.13)$$

Графік залежності зображено на рис. 3.3 в графіку 3. Максимальне значення прискорення вантажу при $t=0$.

$$a_{max} = \varphi_0 \omega_0^2 \quad (3.14)$$

Аналіз рішень (3.10), (3.11), (3.13) показує, що період коливань нитяного маятника залежить від циклічної(кругової) частоти ω_0 (власної частоти маятника) та не залежить від початкового значення амплітуди φ_0 та маси вантажу m .

4. Дослідження вільних коливань тягача із допомогою моделі пружинного маятника

Відомо (див. п. 2) пружинний маятник представлено лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \quad (4.1)$$

Важливою особливістю цього рівняння є те, що невідома функція $x(t)$ та її друга похідна $x''(t)$ входять у нього лінійно із коефіцієнтами, що не залежать від часу t .

Загальний розв'язок рівняння (4.1) має вигляд:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \quad (4.2)$$

де

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (4.3)$$

– власна частота пружинного маятника.

Розв'язок (4.2) можна записати так:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (4.4)$$

де A – амплітуда коливань,

α – початкова фаза.

Перехід від виразу (4.2) до виразу (4.4) дуже легко здійснити, якщо використати формулу для синусу суми. Дійсно

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha) = A \sin \alpha \cos \omega_0 t + A \cos \alpha \sin \omega_0 t \quad (4.5)$$

При порівнянні виразів (4.2) та (4.5) бачимо, що:

$$C_1 = A \sin \alpha, \quad (4.6)$$

$$C_2 = A \cos \alpha. \quad (4.7)$$

Якщо початкові умови такі, що

$$\begin{cases} x(0) = x_0; \\ x'(0) = x'_0. \end{cases} \quad (4.8)$$

то сталі A і α можна визначити через x_0 і x'_0 .

Дійсно, з виразу (4.4)

$$x''(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (4.9)$$

Тоді початкові умови (4.8) приймають такий вигляд:

$$\begin{cases} x_0 = A \sin(\omega_0 t + \alpha); \\ x'_0 = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha). \end{cases} \quad (4.10)$$

Звідки:

$$\begin{cases} \sin \omega_0 t + \alpha = \frac{x_0}{A}; \\ \cos \omega_0 t + \alpha = \frac{x'_0}{A\omega_0}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Піднесемо до квадрату кожне з рівнянь цієї системи і додамо їх. Тоді

$$\left(\frac{x_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{x'_0}{A\omega_0}\right)^2 = 1.$$

Отже, амплітуда коливань

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x'_0}{\omega_0}\right)^2}. \quad (4.12)$$

Тепер поділимо рівняння системи рівнянь (4.11). Тоді

$$\operatorname{tg} \omega_0 t + \alpha = \frac{x_0}{x'_0} \omega_0. \quad (4.13)$$

Звідси можна визначити початкову фазу коливань α .

Сталі A і α , що визначені через початкові умови A і α , необхідно підставити в рівняння (4.4). В цьому випадку отримаємо частинний розв'язок диференційного рівняння (4.1), яке задовольняє початковим умовам (4.8).

Розглянемо випадок, коли

$$\begin{cases} x(0) = x_0; \\ x'(0) = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Відповідно до формули (4.12)

$$A = x_0.$$

Звідси випливає, що зміщення маятника від положення рівноваги відповідно до виразу (4.4) визначається як:

$$x(t) = x_0 \sin \omega_0 t$$

В цьому випадку амплітуда коливань $A = x_0$, а початкова фаза може бути прийнятою такою, що дорівнює $\frac{\pi}{2}$, тобто $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$x(t) = x_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

або

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t. \tag{4.15}$$

Миттєва швидкість руху тягаря

$$v(t) = -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t$$

або

$$v(t) = -x_0 \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{4.16}$$

Прискорення коливального руху маятника

$$a(t) = -x_0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t. \quad (4.17)$$

У відповідності до (4.15 - 4.17) на рис. 4.1 побудовано графік зміни зміщення, швидкості та прискорення коливаний тягаря.

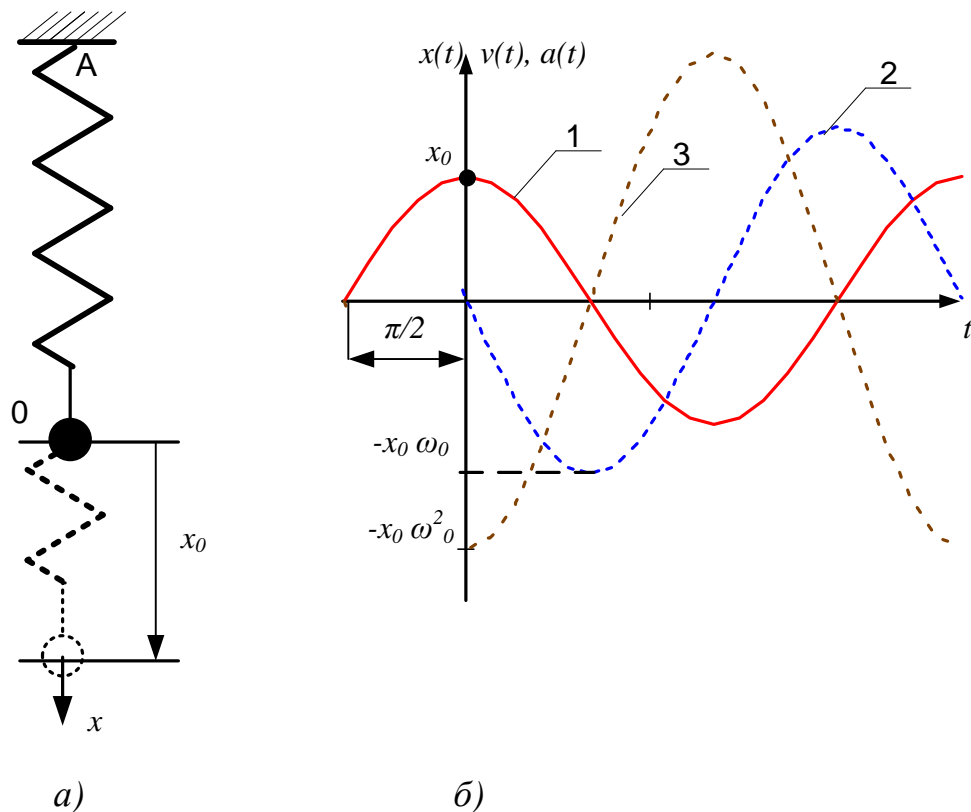


Рис. 4.1 – Вільні коливання пружинного маятника: а – схема маятника; б – графіки зміни: 1 – зміщення тягаря; 2 – швидкості тягаря; 3 – прискорення коливального руху тягаря.

5. Розроблення математичної моделі згасального пружинного маятника

Під час розгляду руху пружинного маятника (ПМ), (див. п. 2) було прийнято гіпотезу про те, що силою тертя вантажу (кулі) у навколишньому середовищі можна знехтувати. Якщо такий ПМ вивести із стану спокою, то він буде здійснювати незгасальні коливання вічно ($t \rightarrow \infty$). В дійсності, як ми бачили, будь-яке коливання з часом ($t \rightarrow \infty$) згасає. Отже, потрібно мати таку модель, за допомогою якої можна вивчати згасальні коливання. Це можна зробити за допомогою згасального пружинного маятника (ЗПМ), рис 5.1.

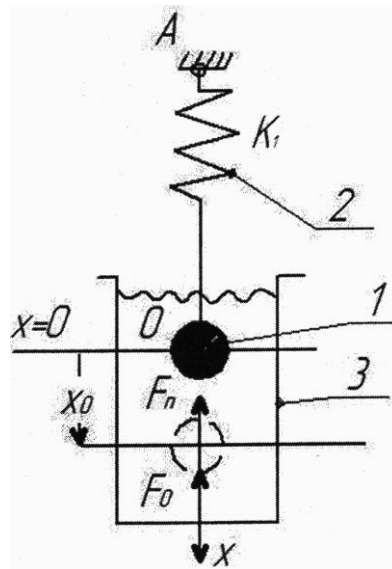


Рис. 5.1 – Схема ЗПМ

Як бачимо, ЗПМ складається з кулі 1, геліоцентричної пружини 2 і циліндра 3, у якому знаходиться в'язка рідина. Якщо кулю вивести із

стану спокою і плавно, без поштовху! Відпустити, то кулька почне здійснювати коливання, які з часом ($t \rightarrow \infty$) згасають.

На кульку масою m , яка зміщується вздовж осі x , діє дві сили: сила пружності \vec{F}_n і сила опору \vec{F}_o середовища.

Сила пружності:

$$F_n = -k_1 x \quad (5.1)$$

де k_1 – жорсткість пружини, x – відхилення кульки від положення рівноваги (точка 0) або зміщення кульки.

Сила опору середовища:

$$F_o = -6\pi\eta R\dot{x} \quad (5.2)$$

де η – в'язкість середовища, R – радіус кульки.

Вираз 5.2 можна подати і так:

$$F_o = -k_2 \dot{x} \quad (5.3)$$

де $k_2 = 6\pi\eta R$.

Згідно з 2-им законом Ньютона:

$$m\ddot{x}(t) = -k_2 \dot{x}(t) - k_1 x(t)$$

або

$$mx''(t) + k_2 x'(t) + k_1 x(t) = 0.$$

Отже:

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (5.4)$$

де

$$2\delta = \frac{k_2}{m} \rightarrow \delta = \frac{k_2}{2m} \quad (5.5)$$

Добротність ЗПМ:

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{m} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad (5.6)$$

власна частота ПМ.

Добротність ЗПМ пов'язана з характером згасання τ співвідношенням:

$$2\delta = \omega_0 \tau \quad (5.7)$$

Оскільки $[\tau] = c, a [\omega_0] = c^{-1}$, то $[\delta]=1$.

Добротність δ визначає тип згасальних коливань.

1. Якщо $\omega_0 \tau = 2\delta > 1$, то $\delta = \frac{1}{2} = 0,5$

У цьому випадку виникають підкритичні коливання.

2. Якщо $\omega_0 \tau = 2\delta = 1$, то $\delta = \frac{1}{2} = 0,5$

У цьому випадку будуть так звані критичні коливання.

3. Якщо $\omega_0 \tau = 2\delta < 1$, то $\delta < \frac{1}{2} = 0,5$

Це вже надкритичні коливання.

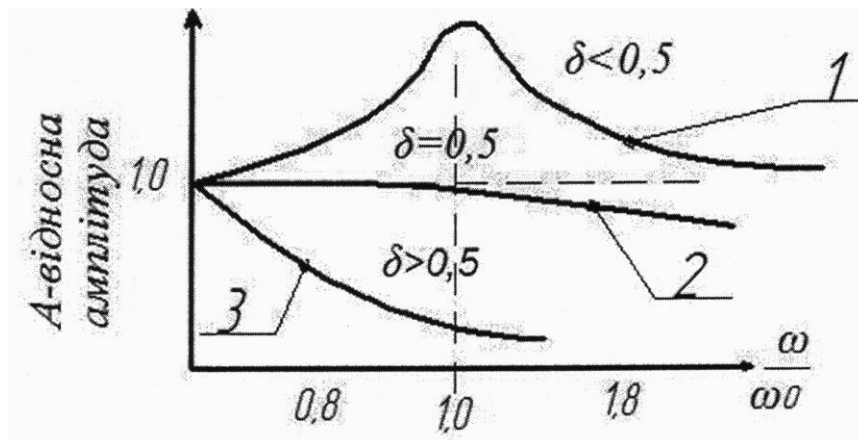


Рис. 5.2 – Види коливань:

1 – надкритичні, 2 – критичні, 3 – підкритичні.

6. Дослідження згасальних коливань за допомогою згасального пружинного маятника

Як було показано у практичній роботі №5, математична модель згасального пружинного маятника (ЗПМ), представляється наступним диференціальним рівнянням:

$$x''(t) + 2\delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (6.1)$$

де

$$\delta = \frac{k_2}{2m}, k_2 = 6\pi\eta R$$

Добротність ЗПМ:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} - \text{власна частота коливань ПМ}$$

а) Якщо $\delta = 0$, тобто $k_2 = 0$. Отже опору середовища немає, то вантаж буде здійснювати гармонічні коливання згідно із законом

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

де A і α – амплітуда і початкова фаза коливання.

Якщо

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ то}$$

$$x(t) = A \cos \omega_0 t. \quad (6.2)$$

б) Якщо $\delta < 0,5$, то рух ЗПМ здійснюється згідно закону:

$$x(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \alpha), \quad (6.3)$$

де

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (6.4)$$

– циклічна частота ЗПМ.

Покажемо, як було одержано розв'язок диференціального рівняння (6.1), тобто (6.3). Диференціальне рівняння (6.1) можна записати і так:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

У зображеннях Лапласа це рівняння має вигляд:

$$p^2 + 2\delta p + \frac{\omega_0^2}{x(p)} = 0, \quad \frac{d}{dt} = p$$

Отже, характеристичне рівняння $(p^2 + 2\delta p + \omega_0^2) = 0$ має такі корені:

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2},$$

$$\delta^2 - \omega_0^2 = -(\omega_0^2 - \delta^2).$$

Позаяк, $\sqrt{-1} = j \rightarrow j^2 = -1$. Тому:

$$\delta^2 - \omega_0^2 = -(\omega_0^2 - \delta^2) = (\omega_0^2 - \delta^2)j^2.$$

Отже:

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)j^2},$$

або

$$p_{1,2} = -\delta \pm \omega_1^2 j,$$

де

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \delta^2.$$

Якщо корені характеристичного рівняння диференціального рівняння комплексно спряжені, то його розв'язок матиме саме такий вигляд:

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \alpha),$$

де A і α – сталі, які визначаються з початкових умов, або

$$x(t) = e^{-\delta t} (c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t),$$

або

$$x' = Ae^{-\delta t}(-\delta \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t),$$

$$x' = A[UV],$$

де

$$U = e^{-\delta t} \quad V = -\delta \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t.$$

$$x'' = A[U'V + UV'],$$

де

$$U' = -\delta e^{-\delta t}, \quad V' = -\delta \omega_1 \cos \omega_1 t + \omega_1^2 \sin \omega_1 t.$$

Тому

$$x'' = A[-\delta e^{-\delta t}(-\delta \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t) + e^{-\delta t}(-\delta \omega_1 \cos \omega_1 t + \omega_1^2 \sin \omega_1 t)].$$

Тобто

$$x'' = -A\delta e^{-\delta t}(-\delta \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t) + Ae^{-\delta t}(-\delta \omega_1 \cos \omega_1 t + \omega_1^2 \sin \omega_1 t).$$

Для побудови графіку зміщення вантажу ЗПМ під час дослідження згасальних коливань, скористаємося рівнянням (6.3)

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \alpha)$$

Якщо

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ то}$$

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \cos \omega_1 t \quad (6.5)$$

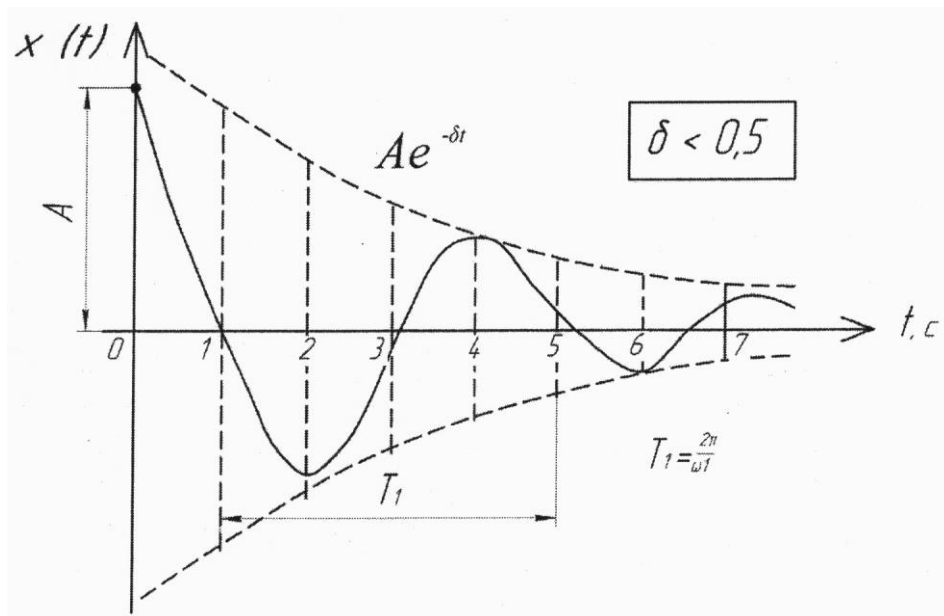


Рис. 6.1 – Графік згасальних коливань

Аналіз графіка згасальних коливань дозволяє виявити вплив опору середовища.

По перше. Циклічна частота коливання ω_1 зменшується – замість ω_0 вона стає

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

По друге. З появою множника $e^{-\delta t}$ розмах коливання з часом зменшується, позаяк $e^{-\delta t} \rightarrow 0$, якщо $t \rightarrow \infty$. При цьому на протязі одного періоду коливання, тобто за проміжок часу $[0, T_1]$ амплітуда коливань зменшується в

$$e^{\delta t} = e^{\frac{\delta \cdot 2\pi}{\omega_1}} \text{ раз.}$$

Доведемо це. Нехай графік згасального коливання має вигляд, рис 6.2

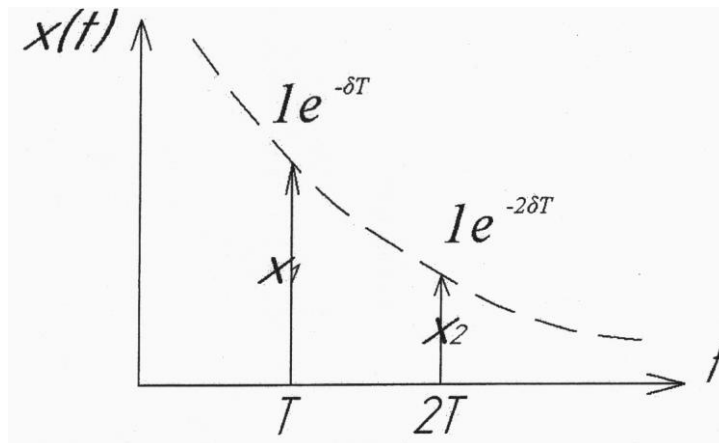


Рис. 6.2 – Графік згасального коливання на проміжку $t [T, 2T]$

Візьмемо відношення ординати x_1 до x_2 . Тоді:

$$a = \frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\delta T}}{e^{-\delta 2T}} = e^{-\delta T - (-\delta 2T)}$$

$$a = \frac{x_1}{x_2} = e^{\delta t} = e^{\delta \frac{2\pi}{\omega_1}}$$

$$\ln a = \delta T = \delta \frac{2\pi}{\omega_1}$$

Якщо

$$d = \frac{2\pi\delta}{\omega_1},$$

$$\text{то } d = \ln a = \frac{x_1}{x_2} \quad (6.6)$$

називається логарифмічним декрементом згасальних коливань.

Аналіз виразу (6.6) показує, що більший декремент d , то швидше згасають коливання. Через деякий час амплітуда коливання A стане настільки малою, що навіть чутливі прилади не дозволять зареєструвати їх.

Дещо інший характер руху ЗПМ буде тоді, коли опір середовища настільки великий, що

$$\omega_0 \tau = 2\delta > 1 \rightarrow \delta > 0,5$$

Наприклад, якщо коливання проходять не в повітрі, а в якій-небудь рідині. У цьому випадку вантаж, виведений із стану спокою, буде не коливатися, а плавно наблизитися до положення рівноваги по аперіодичному закону:

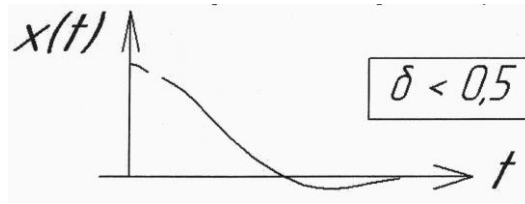


Рис. 6.3 – Аперіодичні згасання

На практиці зустрічається потреба як у зменшенні так і в збільшенні згасання. Так, наприклад, у багатьох вимірювальних приладах (ваг) бажано, щоб рухома частина приладу встановлювалася якомога швидше, не виконуючи великої кількості коливань, або навіть аперіодично.

З цією метою використовують різні демпфери – пристрої, які збільшують тертя або взагалі втрату енергії. У якості прикладу наведено два варіанти демпфірованого маятника (рис. 6.4, 6.5).

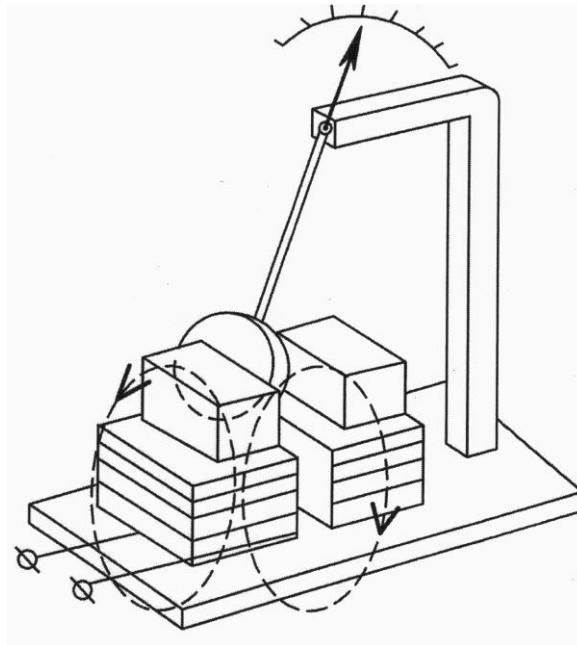


Рис. 6.4 – Маятник, демпфіруваний вихровим електричним струмом

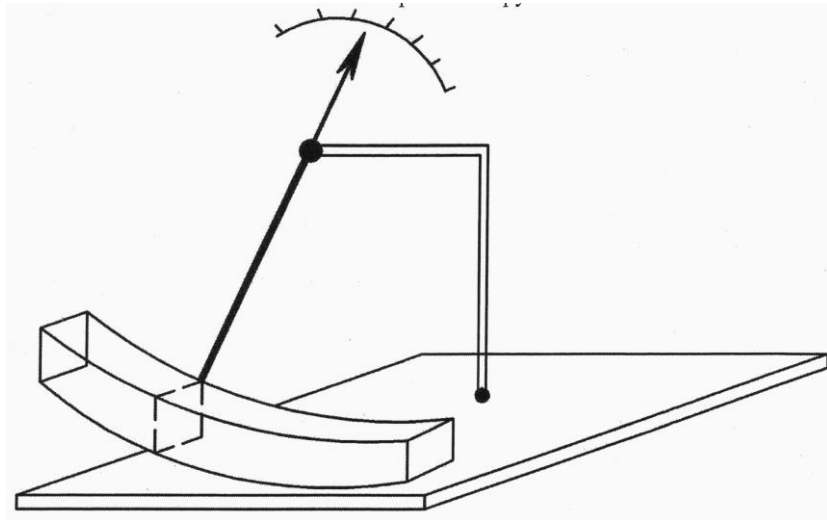


Рис. 6.5 – Маятник з повітряним демпфером.

Список рекомендованої літератури

1. Бишоп Р. Колебания: Пер. с англ. / Под ред. Я. Г. Пановко. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука. 1979, – 160с. Глава II. – С.35-52. Глава III. – С.55-78.
2. Жученко А.І., Ярощук Л.Д. Спеціальні розділи математики для дослідження комп'ютерних систем: Навч. посіб. – К.: ІВЦ “Видавництво «Політехніка»”, 2002. – 286с. Бібліогр.: – С.204-205. ISBN 966-622-084-9. Розділ 1. – С. 5-11. Розділ 2. – С. 14-36. Розділ 3. – С. 39-55. Розділ 4. – С. 57-77.
3. Жученко А.И., Кубрак А.И. Компьютерные алгоритмы интегрирования дифференциальных уравнений и их систем. –К.: Издательство ЧП ЭКМО, 2006. – 270с.
4. Жученко А.И. Базовые алгоритмы численного анализа: Учебн. пособие [Текст] / А.И. Жученко, Н.А. Кубрак, И.М. Голинко. – К.: НТУУ «КПИ», 2006. – 236с. Библиогр.: – С.323. – 200экз. ISBN 966-622-200-0. Глава 1. – С.5-19. Глава 2. – С.19-38. Глава 3. – С.39-51.
5. Жолдак М. І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. –К.: Техніка, 1997. – 303с. Бібліогр.: відсутня. ISBN 966-575-115-8.
6. Кваско М.З. Математичне моделювання та ідентифікація одно- і багатовимірних систем [Текст]: навч.посіб. / М.З. Кваско, Л.Р. Ладієва, М.С. Піргач. – К.: НТУУ «КПИ», 2006 – 308с. Бібліогр.: С.277 – 278. -200 пр. -ISBN 966-622-211-6. Розділ 1. – С. 9-145. Розділ 2. – С. 146-190. Розділ 3. – С.192-241. Розділ 4. – С.245-269.
7. Кваско М.З. Проектування і дослідження дискретних систем автоматичного керування технологічними процесами [Текст]:

- навч. посіб. / М.З. Кваско, М.С. Пиргач, Т.В. Аверіна. – К.: ІВЦ «Видавництво «Політехнік», 2003. – 360 с. С.60 – 61; С.130; С.192; С.237; С.263; С.307 – 309; С.339 – 340. -200 пр. – ISBN 966-622-116-0.
8. Кваско М.З. Математичне моделювання та ідентифікація одно- і багатовимірних систем [Текст]: навч. посіб. / М.З. Кваско, Л.Р. Ладієва, М.С. Пиргач. – К.: НТУУ «КПІ», 2006 – 308с. Бібліогр.: С.277 – 278. -200 пр. -ISBN 966-622-211-6.
9. Пиргач Н.С. Автоматическое регулирование и регуляторы в целлюлозно-бумажной, лесохимической и деревообрабатывающей промышленности [Текст]: учебн. для техн./ Н.С. Пиргач, В.С. Пиргач – 2-е изд., испр.и доп. – М.: Лесн.пром-сть, 1983. – 264 с. Бібліогр.: С.245 – 246. -2300 экз.
- 10.Справочник по автоматизации целлюлозно-бумажных предприятий [Текст]/ Э. В. Цешковский, Н. С. Пиргач, Г. Д. Ерашкин и др. 3-е изд., перероб.и доп. – М.: Лесн.пром-сть, 1989. – 368 с. Бібліогр.: С.33; С.73; С.118; С.197 – 198; С.303 – 305; С.358. -2800 экз. ISBN 7120-0166-7.
- 11.Шамсон А. С. Автоматизация напорных ящиков быстроходных бумагоделательных машин [Текст]/ А. С. Шамсон, Н. С. Пиргач. – М.: Лесн.пром-сть, 1965. – 104 с. Бібліогр.: С.103. – 1100 экз.

Додаткова література

- 12.Єрмаков А. І. Лінійна алгебра [Текст]: навч. посіб./ А. І. Єрмаков, М. М. Крамар – Луганськ: вид-во СНУ, 2000. – 176 с. Бібліогр.: С. 174. Розділ 2. – С. 24-50.

13. Жученко А.І. Математичні моделі цифрових систем керування [Текст]/ А. І. Жученко – К.: ІЗМН, 1977. – 240 с.
14. Кэмпбелл Д.П. Динамика процессов химической технологии [Текст]/ Д. П. Кэмпбелл. –М.: Госхимиздат, 1962. – 352 с. Библиогр.: – С. 69, – С. 140, – С. 188. Глава II. – С. 72-139. Глава III. – С. 142-187. Глава IV. – С. 189-241. Глава V. – С. 243-282. Глава VI. – С. 285-319.
15. Эйдлин И.Я. Бумагоделательные и отделочные машины [Текст]/ И. Я. Эйдлин. –М.: Лесн. пром-сть, 1970. – 624с. Библиогр.: С. 610-611. Глава I. – С. 5-13. Глава II. – С.14-47.
16. Fasel K.H., Jorgl H.P. Principels of Model Building and Identification. Automatica, vol.7, Pergamon Press Ltd, 1980. – P. 505-518.
17. Warren D. Seider and Daniel R. Levin. Process Design Principles: Synthesis, Analysis and Evaluation: New York, 1999. – 824 p.