МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ У ЗАДАЧАХ АВТОМАТИЗАЦІЇ ВИРОБНИЦТВА

Навчально-методичний посібник

з курсу „Спеціальні розділи математики” для студентів спеціальності „Автоматизоване управління технологічними процесами” напряму „Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології”

Затверджено Методичною радою НТУУ „КПІ”

Київ

НТУУ „КПІ”

2008

Теорія ймовірностей у задачах автоматизації виробництва: Навчально-методичний посібник з курсу “Спеціальні розділи математики” для студ. спец. „Автоматизоване управління технологічними процесами” напряму „Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології” / Уклад.: А.І. Жученко, В.В. Миленький, Л.Д. Ярощук. – К.:НТУУ «КПІ» , 2008. - 70 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ „КПІ”

(Протокол № 7 від 27 березня 2008 р.)

Навчальне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ У ЗАДАЧАХ

АВТОМАТИЗАЦІЇ ВИРОБНИЦТВА

Навчально-методичний посібник

з курсу „Спеціальні розділи математики” для студентів спеціальності „Автоматизоване управління технологічними процесами” напряму „Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології”

Укладачі: Жученко Анатолій Іванович
Миленький Володимир Васильович
Ярощук Людмила Дем'янівна

Відповідальний редактор Є.М. Панов, докт. техн.наук, проф.

Рецензенти: В.М. Казак, д.т.н.,проф..
О.І. Шаров, к.фіз.-мат.наук, доцент

Редактор М.В. Лукінюк

Вступ

Дослідження об’єктів та систем автоматизації вимагає від фахівця знань про закономірні та випадкові явища.

Закономірності відображають законами тепло- та масообміну, гідро- та газодинаміки тощо. Випадкові явища вивчають за допомогою теорії ймовірностей та математичної статистики.

Комплекс задач, який наведено у посібнику, підібрано таким чином, щоб відобразити зв’язок теорії ймовірності з предметною областю “Автоматизація технологічних процесів та виробництв”.

Посібник надає можливість викладачу створювати модульні контрольні роботи або формувати розрахункову роботу з низки окремих задач, об’єднавши їх певним логічним зв’язком.

Посібник складається з двох розділів: “Випадкові події” та “Випадкові величини”. Для задач першого розділу наведено по 30 варіантів завдань. Індивідуальні параметри для задач другого розділу визначаються через номер студента у списку академічної групи.

Методика розв’язування задач пояснюється на контрольних прикладах.

У посібнику наведено таблиці, які треба використати при виконанні розрахунків.

Увага! Оскільки результат виконання завдання визначається співпаданням відповіді студента з правильною відповіддю, то визнано недоцільним наводити відповіді у посібнику. Викладачам, які будуть використовувати цей посібник у своїй роботі, автори нададуть пакет правильних відповідей.

Посібник можна використовувати для будь-якої форми навчання студентів.

1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1. Теоретичні положення

Подія є результатом організованого дослідником випробування чи звичайного спостереження (далі називатимемо їх ***дослідженнями***). **Випадкова подія** (далі **подія**)– може відбутися або не відбутися у результаті дослідження. **Елеметарною подією** Ω_i є результат кожного дослідження. **Повна система подій** (**простір елементарних подій**) Ω – це набір усіх можливих елементарних подій, які характеризують певне явище чи можуть бути у дослідженнях $(\Omega_i \in \Omega)$. Система подій називається **системою несумісних подій**, якщо всі події в системі попарно несумісні.

Кількісною мірою можливості появи події можуть служити її відносна частота і ймовірність.

Відносна частота події A визначається експериментально, як відношення кількості появ події A, N_A до загальної кількості подій (дослідів), N:

$$W(A) = N_A / N; \ (0 \le W(A) \le 1). \qquad (1.1)$$

Імовірність $P(A)$ випадкової події A визначається теоретично, до випробувань, як очікувана частка появи цієї події від загальної кількості дослідів, $(0 \le P(A) \le 1)$.

Умовною ймовірністю називається ймовірність події A, яка залежить від іншої події B, обчислена за умови, що подія B відбулася , її позначають $P_B(A)$ чи $P(A|B)$.

Наведемо **класифікацію подій**:

– **достовірна** (**вірогідна**) – подія, що відбудеться обов'язково, вона характеризується ймовірністю 1;

- неможлива – подія, що не відбудеться ніколи, вона характеризується ймовірністю 0;

– **сумісні** (несумісні) – події, що можуть (не можуть) відбуватися одночасно;

– **залежні** (незалежні) – події, які характеризуються тим, що поява однієї з них змінює (не змінює) ймовірності появи інших;

– **протилежні** – група подій, яка складається лише з двох несумісних подій (A та $\overline{A}$);

– **рівноможливі** – події, що мають однакові ймовірності.

Можливі наступні комбінації подій:

– **наступність** ($A \subset B$): здійснення події A спричиняє здійснення події B;

– **рівність** ($A = B$): одночасно виконуються умови $A \subset B$ і $B \subset A$;

– **сума** ($A \cup B$ чи $A+B$): відбувається хоча б одна з цих подій (A чи B, чи обидві разом);

– **добуток** ($A \cap B$ чи $A \cdot B$): відбуваються обидві події одночасно (і A, і B);

– **різниця** ($A \setminus B$): подія A відбувається, а подія B не відбувається.

Імовірність суми подій $A \cup B$ визначається за такою формулою:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

або

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad (1.2)$$

Якщо подіїї несумісні, то формула (1.2) спрощується і приймає вигляд

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1.3)$$

Цю формулу можна узагальнити на випадок суми будь-якої кількості попарно несумісних подій A_i:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_N) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i) \ .$$

Якщо $A \cup \overline{A}$ – є повною групою подій, то, враховуючи формулу (1.3), отримуємо

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \quad (1.4)$$

В тому випадку, коли несумісні події $A_1, A_2 ..., A_N$ створюють повну групу, то сума їх імовірностей дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_N) = 1.$$

Імовірність добутку подій $A \cap B$ в загальному випадку обчислюється за такою формулою:

$$P(A \cap B) = P_B(A) \cdot P(B). \qquad (1.5)$$

Отже, при залежних подіях *A* і *B* треба враховувати умовну імовірність $P_B(A)$ - імовірність появи події *A* за умови, що подія *B* уже відбулась. При незалежних подіях умовна ймовірність дорівнює звичайній імовірності, а саме $P_B(A) = P(A)$.

Якщо події незалежні, то формула (1.5) спрощується і приймає вигляд

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (1.6)$$

Імовірність спільної появи довільної кількості (*N*) взаємно незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто

$$P(A_1 A_2 \cdots A_N) = P(A_1) P(A_2) \cdots P(A_N).$$

Якщо подія *A* залежить від подій повної системи подій $\mathrm{B} = \{B_1, B_2, ..., B_K\}$, то ймовірність події *A* обчислюють за **формулою повної ймовірності**

$$P(A) = \sum_{i=1}^{K} P_{B_i}(A) P(B_i). \qquad (1.7)$$

У цьому випадку разом із появою події *A* відбувається одна і тільки одна подія із системи *B*.

Якщо подія A вже відбулася, то можна обчислити умовну імовірність того, що разом із подією A здійснювалася саме подія B_i:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}, \qquad (1.8)$$

де $P(A)$ - повна імовірність події A.

Отриману формулу називають **формулою Байєса**. За допомогою цієї формули можна після випробування уточнити ймовірність появи події B_i. Сума ймовірностей подій B_i повинна дорівнювати одиниці.

При розв′язуванні задач теорії ймовірностей часто використовують такі поняття комбінаторики, як **перестановка**, **розміщення** і **сполучення**.

Нехай дано множину Ω, яка складається із N елементів: $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N$. Всілякі послідовності з усіх N об'єктів називають **перестановками**. Нехай N=3. Тоді можливі такі перестановки: $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, $\{\omega_3,\omega_1,\omega_2\}$, $\{\omega_2,\omega_1,\omega_3\}$, $\{\omega_1,\omega_3,\omega_2\}$ $\{\omega_2,\omega_3,\omega_1\}$, $\{\omega_3,\omega_2,\omega_1\}$. Загальну кількість, E_N різноманітних перестановок із N об'єктів обчислюють за формулою

$$E_N = N!, \qquad (1.9)$$

де $N!$ – факторіал N; $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots N$, при цьому вважають, що $0! = 1$.

Розміщеннями називають упорядковані послідовності об'єктів підмножини $\Omega 1$ множини Ω. Нехай множина Ω містить N =3 елементи, її підмножина $\Omega 1$ містить M =2 елементи. Тоді розміщеннями по два є такі пари елементів $\{\omega_1\omega_2\}$, $\{\omega_2\omega_1\}$, $\{\omega_1\omega_3\}$, $\{\omega_3\omega_1\}$, $(\omega_2\omega_3\}$, $(\omega_3\omega_2\}$. Загальну кількість різноманітних розміщень із N об'єктів по M, R_N^M обчислюють за формулою

$$R_N^M = \frac{N!}{(N-M)!} = N(N-1)...(N-M+1). \qquad (1.10)$$

Сполученнями (комбінаціями) називають невпорядковані підмножини $\Omega 1$ множини Ω із декількох елементів. Нехай множина Ω містить N =3 елементи, її підмножина $\Omega 1$ містить M =2 елементи. Тоді сполученнями по два є такі пари елементів $\{\omega_1\omega_2\}$, $\{\omega_1\omega_3\}$, $(\omega_2\omega_3\}$. Треба зауважити, що пари $\{\omega_1\omega_2\}$ та $\{\omega_2\omega_1\}$ дають два розміщення, але одне сполучення. Загальну кількість різноманітних сполучень із N об'єктів по M, C_N^M обчислюють за формулою

$$C_N^M = \frac{N!}{M!(N-M)!} \qquad (1.11)$$

Правило множення. Якщо потрібно виконати одну за одною будь-які K дій, які в свою чергу можна виконати відповідно N_1, N_2, …, N_K способами, то всі K дій разом можуть бути виконані $N_1\ N_2\ N_3 \ldots N_K$ способами.

Правило додавання. Якщо дві дії, що виключають одна одну, можуть виконуватися відповідно M або N способами, то виконати будь-яку з цих дій можна $M + N$ способами.

Повторні випробування. Припустимо, що подія A відбувається в результаті N незалежних випробувань, причому у кожному випробуванні імовірність події A стала і дорівнює P. Результатом кожного випробування є або подія A, або протилежна подія $\overline{A}$. Остання відбувається з імовірністю $q = 1 - P$.

Якщо розглядати усі N випробувань як одне, то його результатом є добуток подій A та $\overline{A}$. Тут через незалежність окремих випробувань важливий не порядок подій, а кількість повторень події A. Кількість випадків появи події A позначимо через K. Імовірність появи події A точно K разів обчислюють за формулою Бернуллі:

$$P_N(K) = C_N^K P^K q^{N-K} \qquad (1.12)$$

Якщо потрібно обчислити ймовірності для всіх значень K ($0 \le K \le N$), то можна скористатися формулою, за допомогою якої $P_N(K)$ обчислюється за значенням $P_N(K-1)$:

$$P_N(K) = \frac{N-K+1}{K} \cdot \frac{P}{q} P_N(K-1),\ K = 1,...,N. \qquad (1.13)$$

Тоді $P_N(0)$ варто обчислювати за формулою (1.12), що при $K = 0$ приймає вигляд $P_N(0) = q^N$, а всі інші $P_N(K)$ – за формулою (1.13). Формула Бернуллі забезпечує високу точність розрахунків, але при великих значеннях N і K обчислення стають занадто громіздкими. Тому використовуються також наближені методи обчислення імовірності $P_N(K)$.

Найімовірніша кількість K_{max} подій A лежить в інтервалі:

$$NP - q \le K_{max} \le NP + P.$$

Довжина цього інтервалу дорівнює одиниці, тому якщо границя інтервалу – ціле число, то є дві найімовірніші частоти, у противному випадку – тільки одна.

Замість формули (1.12) можна використати **локальну теорему Муавра - Лапласа**, яка формулюється таким чином:

якщо при *N* незалежних випробуваннях подія *A* відбувається з постійною імовірністю *P*, яка не дуже близька до нуля й одиниці (0<*P*<1), то при досить великій кількості випробувань *N* імовірність того, що подія *A* відбудеться *K* разів, приблизно дорівнює

$$P_N(K) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{NPq}}, \qquad (1.14)$$

де $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{K-NP}{\sqrt{NPq}}$.

Функція $f(x)$ – парна, тобто $f(-x)=f(x)$, і приймає тільки невід’ємні значення (рис.1.1).

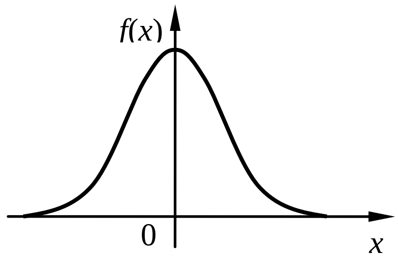


Рис. 1.1. Графік функції $f(x)$

Для неї складені таблиці (див. табл. Д1.1). Оскільки графік функції симетричний відносно осі ординат, то таблиці складені тільки для додатніх значень аргументу.

Якщо імовірність P реалізації події A наближається до нуля, то варто використати **теорему Пуассона**, яку формулюють так:

якщо при незалежних випробуваннях подія *A* відбувається з близькою до 0 імовірністю *P*, то при досить великому *N* імовірність здійснення цієї події *K* разів приблизно дорівнює

$$P_N(K) \approx \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}, \tag{1.15}$$

де $\lambda = NP$.

Для функції Пуассона також складені таблиці (див. табл. Д1.2).

Часто треба знайти ймовірність того, що частота появи події A не менша a і не більша b. Цю проблему дозволяє вирішити **інтегральна теорема Муавра-Лапласа:**

якщо в незалежних випробуваннях подія *A* відбувається з постійною ймовірністю *P*, яка відрізняється від 0 і 1, то при досить великому *N* імовірність того, що частота *K* події *A* знаходиться в інтервалі [*a*, *b*],

приблизно дорівнює

$$P_N(a \le K \le b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (1.16)$$

де $x_1 = \dfrac{a - NP}{\sqrt{NPq}}$, $x_2 = \dfrac{b - NP}{\sqrt{NPq}}$;

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \qquad (1.17)$$

Функція $\Phi(x)$ є інтегралом від функції $f(x)$ (1.14) і називається функцією Лапласа. Вона приймає значення в інтервалі [-0,5; 0,5], при цьому $\Phi(-\infty) = -0{,}5$, $\Phi(\infty) = 0{,}5$. Графік функції $\Phi(x)$ наведено на рис.1.2. Для функції $\Phi(x)$ складено таблиці (Д1.3).

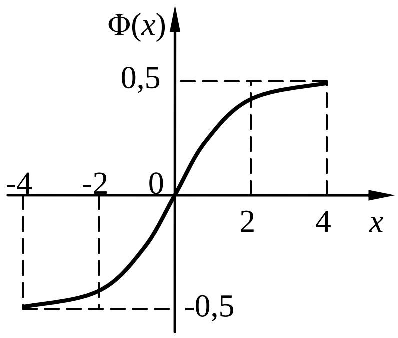


Рис.1.2. Графік функції $\Phi(x)$

Таблиці враховують тільки невід'ємні значення аргументу. Для від'ємних аргументів значення функції можна одержати з цієї ж таблиці, використовуючи співвідношення $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Для визначення ймовірності того, що відносна частота K/N події A відрізняється за абсолютною величиною від імовірності P події A не більше ніж на ε (ε>0), скористаємось формулою (1.16) та запишемо такий вираз:

$$P\left(\left|\frac{K}{N} - P\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{N}{Pq}}\right). \qquad (1.18)$$

1.2. Задачі до розділу №1

При розв'язуванні задач необхідно виконати наступне:

- переписати текст задачі, замінюючи всі параметри їхніми значеннями для конкретного варіанту;
- визначити, в чому полягає шукана подія та елементарні події;
- виконати необхідні розрахунки.

Задача 1.1

Пристрій сформовано з двох паралельно з'єднаних блоків (див.рис.1.3), числа $N1$ та $N2$ позначають їхні номери.

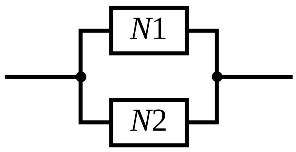


Рис. 1.3. Загальна схема пристрою

Кожний блок складається з п'яти елементів. Значення ймовірностей безвідмовної роботи впродовж часу T цих елементів для всіх варіантів наступні: P_1=0,95; P_2=0,99; P_3=0,80; P_4=0,86; P_5=0,90.

У задачі треба розрахувати ймовірність безвідмовної роботи впродовж часу T пристрою заданої структури.

$N1$ та $N2$ визначаються номером варіанту завдання. Відповідність між варіантом та номерами $N1$, $N2$ показано у табл. Д2.1, структури блоків наведені на рис. 1.4.

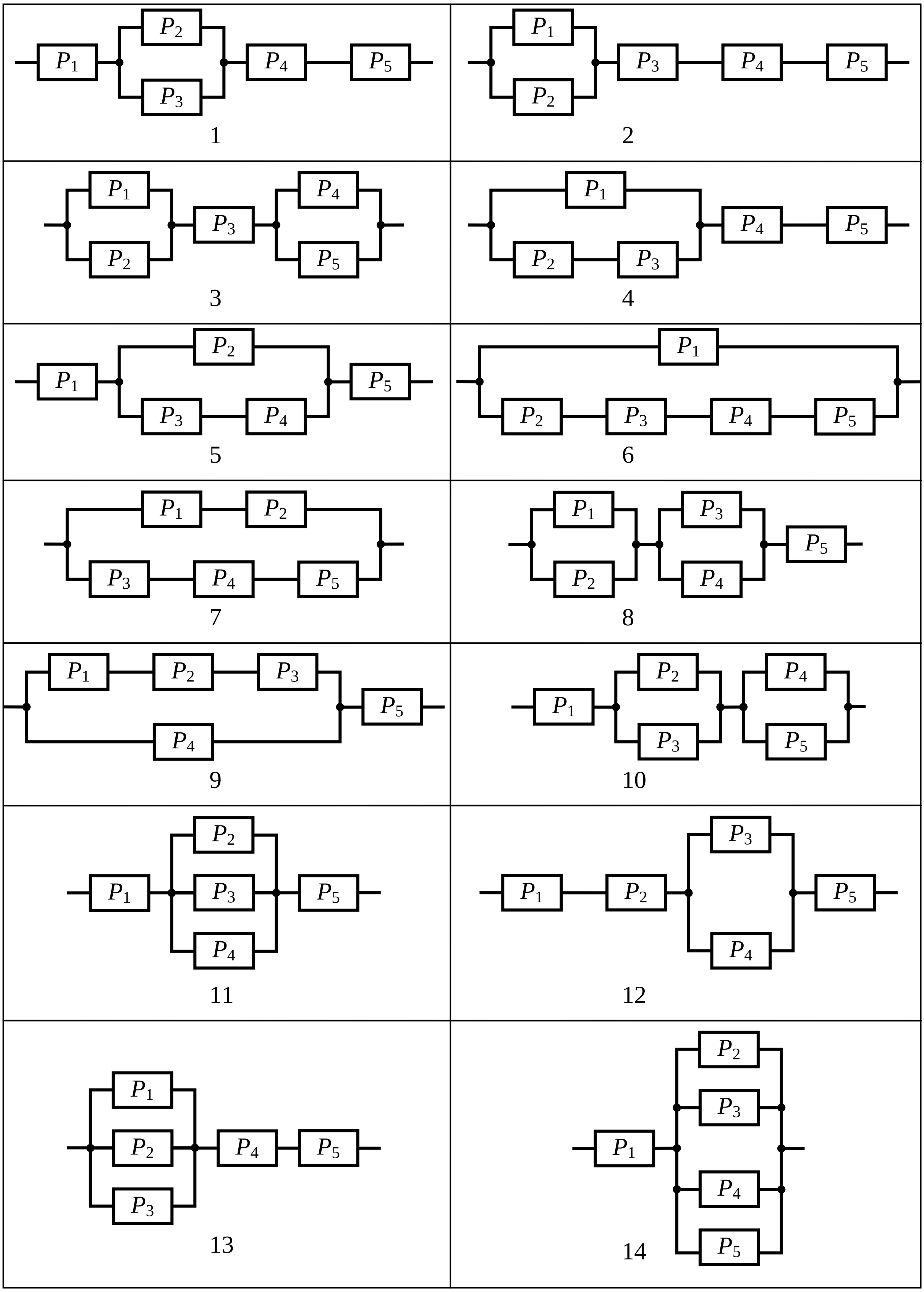


Рис. 1.4. Структури блоків для задачі 1.1

Задача 1.2

Пристрій складається з трьох незалежних елементів, що працюють безвідмовно протягом часу T відповідно з імовірностями P_1, P_2 і P_3. Знайти ймовірності того, що за час T вийде з ладу:

а) тільки один елемент;

б) хоча б один елемент.

Дані для розрахунків наведено в таблиці Д2.2.

Задача 1.3

У першому ящику знаходиться K придатних і L бракованих деталей, а в другому ящику M придатних і N бракованих деталей. З першого ящика виймають навмання P деталей, а з другого – Q деталей. Знайти ймовірності того, що серед вийнятих деталей:

а) усі деталі одного типу;

б) тільки дві деталі придатні;

в) хоча б одна придатна деталь.

Значення параметрів K, L, M, N, P і Q згідно з варіантами наведені у табл.Д2.3.

Задача 1.4

В одному ящику знаходиться A резисторів і B конденсаторів, а в другому – C резисторів і D конденсаторів. З першого ящика випадковим чином виймають E деталей і переносять у другий ящик. Після цього з другого ящика також випадково виймають F деталей. Знайти ймовірність того, що з другого ящика було вийнято тільки резистори.

Значення параметрів за варіантами наведено у табл. Д2.4.

Задача 1.5

У цеху контрольно-вимірювальних приладів і автоматики до кожного пневматичного пристрою приєднують фільтр стислого повітря. Фільтри постачають три заводи. На складі є фільтри цих заводів відповідно у кількості M_1, M_2 і M_3 штук, які можуть безвідмовно працювати до кінця гарантійного терміну з імовірностями P_1, P_2 і P_3. Слюсар цеху бере навмання один фільтр і монтує його до пристрою. Знайти ймовірності того, що змонтований і працюючий безвідмовно до кінця гарантійного терміну фільтр, виготовлено відповідно на першому, другому або третьому заводі. Значення параметрів наведено у таблиці Д2.5.

Задача 1.6

Система сигналізації аварійних ситуацій у реакторі спрацьовує через різні причини. Кожне з N спрацювань системи аварійної сигналізації (які розглядають як незалежні випробування) обумовлюється перевищенням тиску в реакторі (подія A) із постійною імовірністю P. Обчислити усі ймовірності $P_N(K)$, K=0,1,2,...,N, де K – кількість подій A серед N випробувань. Побудувати діаграму ймовірностей $P_N(K)$. Знайти найімовірнішу кількість порушень технологічного процесу через перевищення тиску у реакторі. Значення параметрів N і P наведено у таблиці Д2.6.

Задача 1.7

Помилкове спрацювання системи аварійної сигналізації має ймовірність P. Знайти ймовірності того, що серед усіх N спрацювань відбуваються:

а) точно K помилкових спрацювань;

б) менше ніж L помилкових спрацювань;

в) більше ніж M помилкових спрацювань.

Значення параметрів P, N, K, L і M наведено у таблиці Д2.7.

1.3. Рекомендації та приклади розв’язання задач розділу №1

Задача 1.1

Кожний з блоків задачі складається із послідовно чи паралельно з’єднаних п’яти елементів.

При ***послідовному*** з’єднанні елементів схема працює, якщо працюють усі її елементи. Безвідмовну роботу впродовж часу *T* послідовного з’єднання *N* елементів (подія *A*) можна розглядати, як добуток подій A_i, ($i = \overline{1, N}$), отже

$$P(A) = \prod_{i=1}^{N} P(A_i),$$

де A_i - безвідмовна робота *i*-о елемента впродовж часу *T*.

Розглянемо ***паралельно*** з’єднані елементи. Така схема буде працювати (подія В) доти, доки працює хоча б один елемент, а вийде з ладу тоді (подія $\overline{B}$), коли всі елементи вийдуть з ладу. Ймовірність безвідмовної роботи впродовж часу *T* паралельного з’єднання *N* елементів доцільно визначати через імовірність події $\overline{B}$. Тоді $\overline{B}$ можна розглядати як добуток подій $\overline{B_i}$ ($i = \overline{1, N}$), отже, $P(\overline{B}) = \prod_{i=1}^{N} P(\overline{B_i})$. Шукана ймовірність $P(B)$ визначається так:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}).$$

Рекомендація. При розв’язуванні задачі паралельно з’єднані елементи схем треба замінити одним умовним елементом, імовірність безвідмовної роботи якого дорівнює ймовірності безвідмовної роботи цього паралельного з’єднання.

Задача 1.2

Пристрій складається з трьох незалежних елементів, які працюють протягом часу T безвідмовно. Ймовірності їх безвідмовної роботи для контрольного прикладу становлять відповідно P_1= 0,9; P_2= 0,8; P_3=0,7. Знайти ймовірності того, що за час T вийде з ладу:

а) тільки один елемент;

б) хоча б один елемент.

Розв'язок. Випробування, тобто роботу за час *T,* потрібно розглядати на двох рівнях: на рівні пристрою і на рівні елементів. Введемо позначення елементарних подій:

B_1 – перший елемент виходить з ладу; $\overline{B}_1$ – перший елемент не виходить з ладу;

B_2 – другий елемент виходить з ладу; $\overline{B}_2$ – другий елемент не виходить з ладу;

B_3 – третій елемент виходить з ладу; $\overline{B}_3$ – третій елемент не виходить з ладу.

Розглянемо кожну із вказаних у завданні подій.

а) Подія A_1 полягає у виході з ладу за час T тільки одного елемента. Вона може відбутися за наступної умови:

$$A_1 = (B_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3) \cup (B_2 \cap \overline{B}_1 \cap \overline{B}_3) \cup (B_3 \cap \overline{B}_1 \cap \overline{B}_2).$$

З огляду на незалежність елементів пристрою, несумісність подій B_i та $\overline{B}_i$ для розрахунку $P(A_1)$ використаємо формулу повної ймовірності (1.7), яка використовує (1.3) та (1.6):

$$P(A_1) = P(B_1)P(\overline{B}_2)P(\overline{B}_3) + P(B_2)P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_3) + P(B_3)P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2).$$

За умови, що

$$P(\bar{B}_1) = P_1 = 0,9;\ P(\bar{B}_2) = P_2 = 0,8;\ P(\bar{B}_3) = P_3 = 0,7,$$

за формулою (1.4) отримуємо

$$P(B_1) = 0,1; P(B_2) = 0,2; P(B_3) = 0,3.$$

Таким чином,

$$P(A_1) = 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,7 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,7 + 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,3 = 0,398.$$

б) Подія A_2 полягає у виході з ладу за час T хоча б одного елемента пристрою.

Подія, яка визначається словами “хоча б один елемент виходить з ладу”, має протилежну подію $\bar{A}_2$ – “за час T всі елементи працюють безвідмовно”. Ця остання подія може відбутися за наступної умови:

$$\bar{A}_2 = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3.$$

Визначимо ймовірність безвідмовної роботи всіх елементів $P(\bar{A}_2)$:

$$P(\bar{A}_2) = P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2)P(\bar{B}_3) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504.$$

Таким чином, шукана ймовірність визначиться так

$$P(A_2) = 1 - (\bar{A}_2) = 1 - 0,504 = 0,496.$$

Відповіді: $P(A_1) = 0,398$, $P(A_2) = 0,496$.

Задача 1.3

У першому ящику знаходиться 6 придатних і 4 браковані деталі, а в другому ящику 5 придатних і 6 бракованих деталей. З першого ящика взяли випадковим чином 4 деталі, а з другого – 2 деталі. Знайти імовірності того, що серед вийнятих деталей:

а) всі деталі одного типу;

б) тільки дві придатні деталі;

в) хоча б одна придатна деталь.

Розв'язок. Деталі виймали з обох ящиків незалежно. Випробуваннями вважаються виймання чотирьох деталей із першого ящика і двох деталей з другого. Елементарними подіями будуть сполучення по 4 деталі з 10 деталей або по 2 деталі з 11 відповідно.

Визначимо для кожного ящика можливі елементарні події:

B_1 – із першого ящика вийнято 4 придатні деталі;

B_2 – із першого ящика вийнято 3 придатні і 1 браковану деталі;

B_3 – із першого ящика вийнято 2 придатні і 2 браковані деталі;

B_4 – із першого ящика вийнято 1 придатну і 3 браковані деталі;

B_5 – із першого ящика вийнято 4 браковані деталі;

C_1 – із другого ящика вийнято 2 придатні деталі;

C_2 – із другого ящика вийнято 1 придатну і 1 браковану деталі;

Cз – із другого ящика вийнято 2 браковані деталі.

а) Подія A_1 полягає у тому, що виймають деталі одного типу, тобто вони всі або придатні, або браковані. Ця подія може відбутися за наступної умови:

$$A_1 = (B_1 \cap C_1) \cup (B_5 \cap C_3),$$

а звідси, з огляду на незалежність і несумісність подій, одержуємо:

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(C_1) + P(B_5) \cdot P(C_3).$$

Знайдемо кількість появ елементарних подій N_1 та N_2 для першого та другого ящика відповідно. Скористаємось (1.11) і отримаємо

$$N_1 = C_{10}^4 = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210; \quad N_2 = C_{11}^2 = \frac{10 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 55.$$

Знайдемо кількість появ кожної з названих вище елементарних подій за (1.11):

$$B_1 : N_{B_1} = C_6^4 = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15; \qquad B_2 : N_{B_2} = C_6^3 C_4^1 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 80;$$

$$B_3 : N_{B_3} = C_6^2 C_4^2 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 90; \quad B_4 : N_{B_4} = C_6^1 \cdot C_4^3 = 6 \cdot 4 = 24;$$

$$B_5 : N_{B_5} = C_4^4 = 1;$$

$$C_1 : N_{C_1} = C_5^2 = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10; \qquad C_2 : N_{C_2} = C_5^1 C_6^1 = 5 \cdot 6 = 30;$$

$$C_3 : N_{C_3} = C_6^2 = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15.$$

Отже, імовірність шуканої події A_1 розрахуємо наступним чином

$$P(A_1) = \frac{15}{210} \cdot \frac{10}{55} + \frac{1}{210} \cdot \frac{15}{55} = 0,013 + 0,001 = 0,014.$$

б) Подія A_2 полягає у тому, що серед витягнутих деталей тільки 2 придатні. Ця подія може відбутися за такої умови:

$$A_2 = (B_3 \cap C_3) \cup (B_4 \cap C_2) \cup (B_5 \cap C_1),$$

а звідси, з огляду на незалежність і несумісність подій, одержуємо

$$P(A_2) = P(B_3) \cdot P(C_3) + P(B_4) \cdot (C_2) + P(B_5) \cdot P(\mathrm{C}_1).$$

Враховуючи методику п.а, визначимо ймовірність події A_2:

$$P(A_2) = \frac{90}{210} \cdot \frac{15}{55} + \frac{24}{210} \cdot \frac{30}{55} + \frac{1}{210} \cdot \frac{10}{55} = 0,117 + 0,062 + 0,001 = 0,180.$$

в) Подія A_3 полягає у тому, що серед витягнутих деталей є принаймні одна придатна. Розглянемо спочатку протилежну подію $\overline{A}_3$, яка полягає в тому, що серед витягнутих деталей немає жодної придатної.

Ця подія може відбутися за наступної умови:

$$\overline{A}_3 = B_5 \cap C_3,$$

а звідси одержуємо

$$P(\overline{A}_3) = P(B_5) \cdot P(C_3);$$

$$P(\overline{A}_3) = \frac{1}{210} \cdot \frac{15}{55} \approx 0,001.$$

Тоді ймовірність шуканої події A_3 розраховується так

$$P(A_3) = 1 - P(\overline{A}_3) = 1 - 0,001 = 0,999.$$

Відповіді: $P(A_1) = 0,014$; $P(A_2) = 0,180$; $P(A_3) = 0,999$.

Задача 1.4

В одному ящику знаходиться 5 резисторів і 5 конденсаторів, а в другому - 4 резистори і 7 конденсаторів. З першого ящика випадковим чином виймають 2 деталі і переносять у другий ящик. Після цього з другого ящика також випадково виймають 3 деталі. Знайти імовірність того, що з другого ящика було вийнято тільки резистори.

Розв'язок. У цій задачі випробування відбуваються у два етапи: спочатку випадковим чином виймають деталі з першого ящика й переносять їх у другий, а потім, знову-таки випадково, виймають деталі з другого ящика. Шукана подія A – отримати з другого ящика 3 резистори. Розглянемо елементарні події, які можуть відбутися при вийманні деталей з першого ящика:

B_1 – із першого ящика взяли 2 резистори;

B_2 – із першого ящика взяли 1 резистор і 1 конденсатор;

B_3 – із першого ящика взяли 2 конденсатори.

Для розрахунку імовірності $P(A)$ використаємо формулу повної імовірності (1.7):

$$P(A)=P_{B_1}(A)\cdot P(B_1)+P_{B_2}(A)\cdot P(B_2)+P_{B_3}(A)\cdot P(B_3)+P_{B_4}(A)\cdot P(B_4).$$

Кількість елементарних подій на першому етапі дорівнює

$$N_1=C_{10}^2=\frac{9\cdot 10}{1\cdot 2}=45,$$

а на другому етапі

$$N_2=C_{13}^3=\frac{11\cdot 12\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}=286.$$

Розрахуємо умовні імовірності події A при кожній з вищевказаних елементарних подій.

При B_1:

$$N_{11}=C_5^2=\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}=10; \qquad P(B_1)=\frac{N_{11}}{N_1}=\frac{10}{45}=0,222;$$

$$N_{12}=C_6^3=\frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}=20; \qquad P_{B_1}(A)=\frac{N_{12}}{N_2}=\frac{20}{286}=0,070.$$

При B_2:

$$N_{21}=C_5^1C_5^1=\frac{5\cdot 5}{1\cdot 1}=25; \qquad P(B_2)=\frac{N_{21}}{N_1}=\frac{25}{45}=0,556;$$

$$N_{22}=C_5^3=\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}=10; \qquad P_{B_2}(A)=\frac{N_{22}}{N_2}=\frac{10}{286}=0,035.$$

При B_3:

$$N_{31}=C_5^2=\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}=10; \qquad \mathrm{P(B_3)}=\frac{N_{31}}{N_1}=\frac{10}{45}=0,222;$$

$$N_{32}=C_4^3=4; \qquad P_{B_3}(A)=\frac{N_{32}}{N_2}=\frac{4}{286}=0,014.$$

Імовірність події A обчислимо, як було сказано, за формулою повної імовірності (1.7):

$$P(A)=0,222\cdot 0,070+0,556\cdot 0,035+0,222\cdot 0,014=0,016+0,019+0,003=0,038.$$

Відповідь: $P(A)$=0,038.

Задача 1.5

У цеху контрольно-вимірювальних приладів і автоматики до кожного пневматичного пристрою приєднують фільтр стислого повітря. Фільтри постачають три заводи. На складі є фільтри цих заводів відповідно у кількості 16, 9 і 14 штук, які можуть безвідмовно працювати до кінця гарантійного терміну з імовірностями 0,88, 0,79 та 0,74. Слюсар цеху бере навмання один фільтр і монтує його до пристрою. Знайти ймовірності того, що змонтований і працюючий безвідмовно до кінця гарантійного терміну фільтр, виготовлено відповідно на першому, другому або третьому заводі.

Розв'язок. Першим випробуванням є вибір фільтра, другим – безвідмовна робота фільтра під час гарантійного терміну. Подія A – випадково вибраний фільтр працює безвідмовно до кінця гарантійного терміну.

Розглянемо елементарні події:

B_1 – слюсар бере фільтр, який виготовлено на 1-у заводі;

B_2 – слюсар бере фільтр, який виготовлено на 2-у заводі;

B_3 – слюсар бере фільтр, який виготовлено на 3-у заводі.

В умові задачі визначені умовні ймовірності $P_{B_i}(A)$:

$$P_{B_1}(A) = 0{,}88;\ P_{B_2}(A) = 0{,}79;\ P_{B_3}(A) = 0{,}74.$$

Умовною ймовірністю $P_{B_i}(A)$ є ймовірність того, що вибраний фільтр працює (подія A) за умови, що він виготовлений на i-у заводі (подія B_i).

Імовірність події A обчислимо за формулою повної ймовірності (1.7):

$$P(A) = P_{B_1}(A)\cdot P(B_1) + P_{B_2}(A)\cdot P(B_2) + P_{B_3}(A)\cdot P(B_3).$$

Знайдемо імовірності подій B_i:

$$P(B_1)=16/39=0{,}410;\ P(B_2)=9/39=0{,}231;\ P(B_3)=14/39=0{,}359;$$

$$P(A)=0{,}88\cdot 0{,}410 + 0{,}79\ 0{,}231 + 0{,}74\cdot 0{,}359=0{,}809.$$

За формулою Байєса (1.8) обчислимо умовні імовірності подій (гіпотез) B_i:

$$P_A(B_1) = \frac{0,410 \cdot 0,88}{0,809} = 0,446;$$

$$P_A(B_2) = \frac{0,231 \cdot 0,79}{0,809} = 0,226;$$

$$P_A(B_3) = \frac{0,359 \cdot 0,74}{0,809} = 0,328.$$

Відповіді: $P_A(B_1) = 0,446$; $P_A(B_2) = 0,226$; $P_A(B_3) = 0,328$.

Задача 1.6

У кожному з N=12 спрацювань системи аварійної сигналізації подія A, тобто перевищення тиску, відбувається з постійною імовірністю 0,4. Обчислити всі ймовірності $P_{12}(K)$, K= 0,1,2,...,12, де K – кількість подій A. Побудувати діаграму імовірностей $P_{12}(K)$. Визначити найімовірнішу кількість порушень технологічного процесу через перевищення тиску у реакторі K_{max}.

Задано: N = 12, P = 0,4, q= 1 – P= 0,6.

Знайти: $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ і величину K_{max}.

Розв'язок. Значення $P_{12}(0)$ обчислимо за формулою Бернуллі (1.12):

$$P_0 = C_{12}^0 \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^{12} = 0,6^{12} \approx 0,0022.$$

Інші імовірності розрахуємо за формулою (1.13), для якої визначимо постійний множник

$$P/q = 0,4/0,6 = 0,6667.$$

Результати обчислень занесемо в таблицю 1.1. Правильність розрахунків перевіряють умовою $\sum_{K=0}^{N} P_{12}(K) = 1$.

Табл.1.1 Таблиця відповідностей між *K* та $P_{12}(K)$

K	P_K	K	P_K
0	0,0022	7	0,1009
1	0,0174	8	0,0420
2	0,0639	9	0,0125
3	0,1419	10	0,0025
4	0,2128	11	$3{,}02\cdot10^{-4}$
5	0,2270	12	$1{,}677\cdot10^{-5}$
6	0,1766	Σ	1

Використавши отримані значення імовірностей, побудуємо діаграму (рис.1.5).

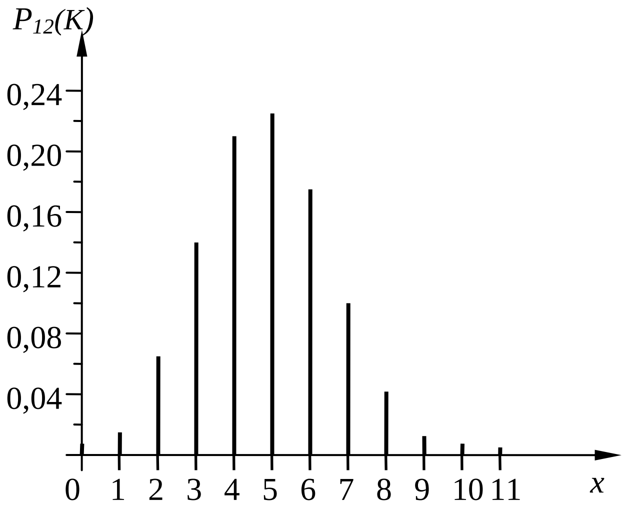


Рис. 1.5 Діаграма ймовірностей $P_{12}(K)$

За заданими умовами знайдемо найімовірнішу кількість подій *A*:

$$NP - q \le K_{\max} \le NP + P,$$

$$NP - q = 12\cdot0{,}4 - 0{,}6 = 4{,}8 - 0{,}6 = 4{,}2;$$

$$NP + P = 12\cdot0{,}4 + 0{,}4 = 4{,}8 + 0{,}4 = 5{,}2.$$

Отже, найімовірніша кількість $K_{max} = 5$, і це підтверджує правильність отриманого раніше результату (див.табл.1.1), згідно з яким значення $P_{12}(5)$ є максимальним.

Задача 1.7

Помилкове спрацювання системи аварійної сигналізації відбувається з імовірністю 1/200. Знайти ймовірність того, що серед усіх 200 спрацювань відбуваються:

а) точно 1-е помилкове спрацювання;

б) менше 3-х помилкових спрацювань;

в) більше 2-х помилкових спрацювань.

Розв'язок. У даному прикладі: N=200, P=1/200. Імовірність події мала, тому використаємо формулу Пуассона (1.15) або табл.Д1.2.

а) Задано, що кількість спрацювань $K = 1$.

Знайти: $P_{200}(1)$.

Розрахуємо параметр λ:

$$\lambda = 200\frac{1}{200} = 1.$$

З таблиці визначимо, що $P_{200}(1) = 0{,}3679$.

б) Задано, що кількість спрацювань $K<3$.

Знайти: $P_{200}(K<3)$.

$$P_{200}(K<3) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) = 0{,}3679 + 0{,}3679 + 0{,}1839 = 0{,}9197.$$

в) Задано, що кількість спрацювань $K>2$.

Знайти: $P_{200}(K>2)$.

Цю задачу можна розв'язати простіше – знайти ймовірність протилежної події, в цьому випадку потрібно обчислити менше доданків. Приймаючи до уваги попередній випадок, маємо

$$P_{200}(K>2) = 1 - P_{200}(K\le 2) = 1 - P_{200}(K<3) = 1 - 0{,}9197 = 0{,}0803.$$

Відповіді: $P_{200}(1) = 0{,}3679$; $P_{200}(K<3) = 0{,}9197$: $P_{200}(K>2) = 0{,}0803$.

2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

2.1. Теоретичні положення

Випадковою називають величину, значення якої схильні до розкиду при повторенні дослідів. Прикладами випадкових величин, можуть бути кількість та розміри виготовлених деталей, температури, тиски та інші показники технологічних процесів і т. ін.

Випадкові величини бувають дискретними і неперервними.

Випадкова величина є **дискретною**, якщо приймає кінцеву множину значень. Прикладами є кількість дефектних виробів у партії, число відмов пристрою за заданий проміжок часу і т.ін.

Випадкова величина називається **неперервною**, якщо вона може приймати будь-які значення з деякого кінцевого або нескінченного інтервалу. Кількість імовірних значень неперервної випадкової величини нескінченна. Прикладами є вологість, щільність, рівень речовини в ємкості, час безвідмовної роботи засобів автоматизації і т.ін.

Випадкові величини звичайно позначають великими літерами латинського алфавіту: X, Y, Z і т.д., а їх імовірні конкретні значення - малими літерами того ж алфавіту: $x_1, x_2, \dots, x_N$; $y_1, y_2, \dots, y_M$; $z_1, z_2, \dots, z_K$.

Перераховані значення випадкової величини можна розглядати як події, що з'являються при випробуваннях.

Позначимо ймовірності цих подій через P із відповідними індексами:

$$P(X=x_1)=P_1;\ P(X=x_2)=P_2;\ . . ;\ P(X=x_N)=P_N .$$

Події $x_1 - x_N$ утворюють повну групу N несумісних подій, отже, сума ймовірностей усіх імовірних значень випадкової величини X дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{N} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{N} P_i = 1.$$

Законом розподілу випадкової величини називають відповідність між значеннями випадкової величини та ймовірностями їх появи. Випадкові величини вважають ***незалежними***, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від значень іншої.

Закон розподілу випадкової величини може бути заданий у вигляді ***таблиці, багатокутника розподілу, функції розподілу і функції щільності розподілу***.

Таблиця розподілу має вигляд табл.2.1.

Табл.2.1 Загальний вид таблиці розподілу

X	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_N
P	P_1	P_2	P_3	…	P_i	…	P_N

При упорядкуванні таблиці звичайно формують варіаційний ряд, тобто розташовують дані в порядку зростання. Таким чином, у наведеній таблиці дотримані співвідношення $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_i \le x_N$.

Таблична форма запису може бути використана при порівняно невеликій кількості вимірів дискретної величини. Така форма називається ще ***рядом розподілу***.

У першому рядку цієї таблиці наведено всі значення дискретної випадкової величини X, а в другому рядку - імовірності P_i того, що випадкова величина отримає значення x_i. Сума всіх імовірностей дорівнює одиниці.

Найбільш загальною формою задання закону розподілу неперервних і дискретних випадкових величин є функція розподілу. Звичайно її позначають $F(x)$.

Функція розподілу - це імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше фіксованого дійсного числа x, тобто

$$F(x) = P(X < x) \ . \tag{2.1}$$

Функція розподілу $F(x)$ - це функція, яка не зменшується, визначена на всій числовій осі, при цьому $F(-\infty)=0$ і $F(\infty)=1$.

Функцію розподілу дискретної випадкової величини X можна одержати на основі ряду її розподілу:

$$F(x)=\sum_{x_i<x} P_i \ . \qquad (2.2)$$

Формулу (2.2) можна записати у вигляді, який ілюструє неперервність зліва функції розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ P_1, & x_1 < x \le x_2 \\ P_1+P_2, & x_2 < x \le x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \sum_{i=1}^{N-1} P_i, & x_{N-1} < x \le x_N \\ 1, & x > x_N \end{cases} \qquad (2.3\ )$$

Графіком функції розподілу дискретної випадкової величини є східчаста лінія (рис.2.1.).

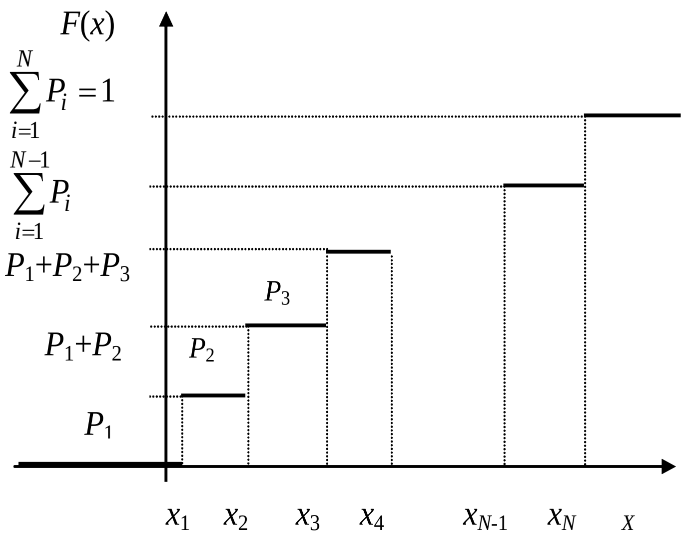


Рис. 2.1. Графік функції розподілу *F(x)* дискретної випадкової величини *X*

Графік функції розподілу *F(x)* неперервної випадкової величини наведено на рис. 2.2.

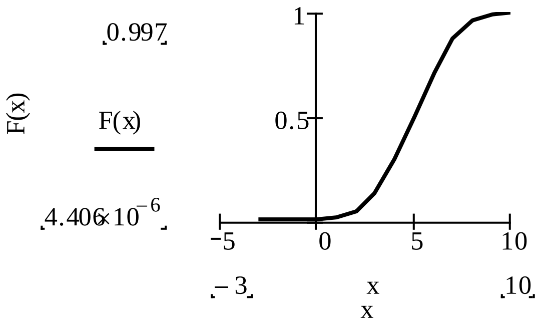


Рис. 2.2. Графік функції розподілу *F(x)* імовірності неперервної випадкової випадкового величини *X*

Функцією щільності розподілу ймовірностей $f(x)$ **є перша похідна від інтегральної функції** $F(x)$**:**

$$f(x) = F'(x). \qquad (2.4)$$

З (2.4) випливає, що функцію розподілу неперервної випадкової величини *X* можна подати у вигляді інтеграла

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (2.5)$$

Формула (2.5) визначає площу під графіком функції *f(x)* в інтервалі $[-\infty, x]$ (див.рис.2.3).

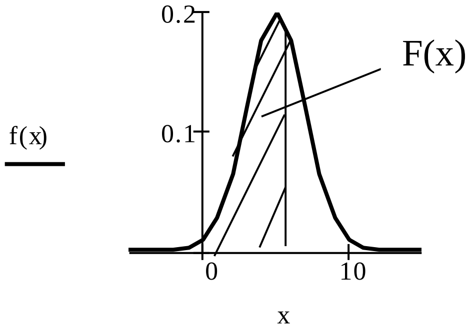


Рис. 2.3. Графік функції щільності розподілу ймовірностей

З властивості функції розподілу випливає, що площа під графіком $f(x)$ на всьому інтервалі існування X дорівнює 1:

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1. \qquad (2.6)$$

Якщо задані два значення x_1 і x_2 неперервної випадкової величини X, причому $x_1<x_2$,, то ймовірність того, що X прийме значення в інтервалі $[x_1, x_2]$, визначають так

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x1}^{x2} f(t)dt. \qquad (2.7)$$

Підставивши $x_1 = x_2$, отримаємо

$$P(x_1 = X = x_2) = \int_{x1}^{x2} f(t)dt = 0. \qquad (2.8)$$

Нерівність $f(x_1)>f(x_2)$ (див. рис.2.3) означає, що при досить великій кількості випробувань поблизу точки x_1 виявиться більше значень випадкової величини X, ніж поблизу точки x_2. Якщо всі отримані значення зобразити у вигляді точок на числовій осі, то навколо точки x_1 вони будуть розташовані щільніше, ніж навколо точки x_2. Виходить, що чим більше значення має функція щільності розподілу ймовірностей, тим більша ймовірність того, що випадкова величина прийме значення поблизу цієї точки (не обов'язково значення в самій точці).

Закон розподілу неперервної випадкової величини описується або функцією розподілу ймовірностей, або функцією щільності розподілу ймовірностей. Для дискретних випадкових величин функція щільності розподілу ймовірностей не визначена.

Закон розподілу цілком характеризує випадкову величину із імовірнісної точки зору.

При розв’язуванні практичних задач необов’язково знати всі можливі значення випадкової величини і відповідні їм імовірності, а зручніше користуватися певними кількісними показниками, які дають у стислій формі достатню інформацію про випадкову величину.

Такі показники називаються ***числовими характеристиками випадкової величини.***

Математичне сподівання. Воно є центром групування усіх значень випадкової величини і приблизно визначається як середнє арифметичне цих значень. Позначимо середнє арифметичне M_x.

Середнє значення дискретної випадкової величини розраховують за формулою:

$$M_x = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot P_i, \qquad (2.9)$$

Середнє значення неперервної випадкової величини обчислюється за формулою

$$M_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx, \qquad (2.10)$$

Середнє значення для дискретних та неперервних випадкових величин має такі властивості:

- $M_c = C$, де C - константа, тобто середнє значення сталої величини дорівнює цій величині;

- $M_{Cx} = CM_x$, тобто сталу величину можна виносити з-під знаку середнього значення;

- $M_{x+y} = M_x + M_y$, тобто середнє значення суми випадкових величин дорівнює сумі середніх значень цих випадкових величин;

- якщо випадкова величина $X \geq 0$, то і середнє значення $M_x \geq 0$;

- якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $M_{xy} = M_x M_y$, тобто середнє значення добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку середніх значень цих величин.

Дисперсія Дисперсія характеризує ступінь розсіювання випадкової величини відносно її середнього значення, вона позначається D_x і визначається наступним чином

$$D_x = M_{(X - M_x)^2} \qquad (2.11)$$

Якщо використати формулу (2.11) і врахувати властивості середнього значення, то можна отримати наступну формулу для визначення дисперсії:

$$D_x = M_{x^2} - (M_x)^2. \qquad (2.12\ )$$

Дисперсія дискретної випадкової величини обчислюється на основі (2.9), (2.11) і (2.12) за формулою:

$$D_x = \sum_{i=1}^{N} (x_i - M_x)^2 \cdot P_i \qquad (2.13\ )$$

або

$$D_x = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \cdot P_i - (M_x)^2\ . \qquad (2.14\ )$$

Відповідно з (2.10) - (2.12), одержуємо формули для обчислення дисперсії неперервної випадкової величини:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_x)^2 f(x) dx \qquad (2.15\ )$$

або

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (M_x)^2. \qquad (2.16)$$

Дисперсія має такі властивості:

- дисперсія константи дорівнює нулю: $D_C = 0$;
- дисперсія завжди невід'ємна: $D_X \geq 0$;
- константу можна винести з-під знака дисперсії, піднесши її попередньо у квадрат:

$$D_{Cx} = C^2 \cdot D_x;$$

- зміна випадкової величини на будь-який коефіцієнт не змінює її дисперсію:

$$D_{(C+x)} = D_x;$$

- якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $D_{(x \pm y)} = D_x + D_y$, тобто дисперсія суми або різниці незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих випадкових величин.

Середнім квадратичним відхиленням (стандартним) називається квадратний корінь із дисперсії $\sqrt{D_x}$. Середнє квадратичне відхилення визначає абсолютне середнє відхилення випадкової величини від її середнього значення.

Моменти. Узагальненням основних числових характеристик випадкової величини є поняття моменту цієї величини. Моменти розділяються на початкові та центральні.

Початковим моментом порядку *r* називається величина

$$\nu_{\text{ïr}} = M_{x^r}. \qquad (2.17)$$

Центральним моментом порядку *r* називається величина

$$\nu_{\text{ör}} = M_{(X-M_x)^r}. \qquad (2.18\ )$$

З цих визначень очевидно, що середнє значення є моментом першого порядку ($\nu_{\text{ï}1} = M_{x^1} = M_x$), а дисперсія - центральним моментом другого порядку ($\nu_{\text{ö}2} = M_{(X-M_x)^2} = D_x$).

Модою (*Mo*) називають значення випадкової величини, яке зустрічається частіше усього, тобто має максимальну ймовірність для дискретної випадкової величини або максимум функції щільності розподілу ймовірностей при неперервній випадковій величині.

Та сама випадкова величина може мати одну або декілька мод. Проте можливо, що випадкова величина і не має моди, якщо усі її значення мають однакову ймовірність появи (наприклад, при рівномірному розподілі).

Медіаною (*Me*) випадкової величини називається таке її значення, при якому має місце рівність

$$P(X < Me) = P(X > Me),$$

тобто рівноймовірно, що випадкова величина виявиться менше або більше медіани. З геометричної точки зору медіана - це таке значення випадкової величини, при якому площа, обмежена кривою щільності розподілу, ділиться навпіл.

Визначено декілька теоретичних типів законів розподілу. Розглянемо деякі з них.

Біномний розподіл. Випадкова величина *X*, що має біномний розподіл, утворюється при повторних незалежних випробуваннях. Значеннями випадкової величини *X* є кількість появ події *A* у цих випробуваннях, тобто ціле число в інтервалі $[0,N]$. Це означає, що випадкова величина з біномним розподілом - дискретна.

Імовірність появи кожного значення обчислюють за формулою Бернуллі (1.12). Відповідно до формули (2.2) можна записати функцію розподілу ймовірностей біномного закону:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sum\limits_{K<x} C_N^K P^K q^{N-K}, & 0 < x \le N, \\ 1, & x > N. \end{cases} \qquad (2.19)$$

Параметрами біномного розподілу є N та P. Те, що випадкова величина X має біномний розподіл із параметрами N та P, можна позначити так $X \in B$ (N, P). Середнє значення X визначається як $M_x=NP$, а дисперсія $D_x = NPq$. Модою є найімовірніша частота**.**

Розподіл Пуассона. Випадкова величина, яка має розподіл Пуассона, приймає значення 0,1,2, ... N. Імовірність P_N(K)того, що вона прийме значення $K \geq 0$, обчислюють за формулою Пуассона (1.15). Функція розподілу ймовірностей такої випадкової величини, виходячи з формули (2.2), визначається співвідношенням

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sum\limits_{K<x} \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}, & 0 < x \leq N, \\ 1, & x > N. \end{cases} \qquad (2.20)$$

де λ = const, λ >0.

Параметром розподілу Пуассона є величина λ, яка дорівнює і середньому значенню, і дисперсі випадкової величини X: $\lambda = M_X = D_X = NP$.

Рівномірний розподіл. Випадкова величина X, яка має рівномірний розподіл, приймає значення тільки в інтервалі [a, b]. Функція щільності розподілу ймовірностей *f(x)* у цьому інтервалі є сталою величиною (константа). За умовою (2.6) можна визначити цю константу і записати функцію щільності розподілу ймовірностей рівномірного розподілу у вигляді:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases} \qquad (2.21)$$

Функцію розподілу можна знайти за формулою (2.5):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases} \tag{2.22}$$

Графіки цих функцій зображені на рис. 2.4 і 2.5.

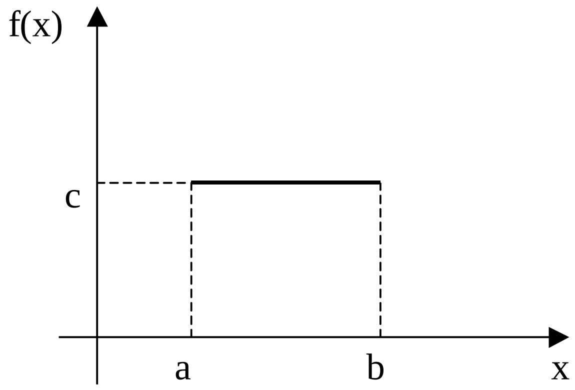


Рис. 2.4. Графік функції щільності розподілу ймовірностей *f(x)* для рівномірного закону

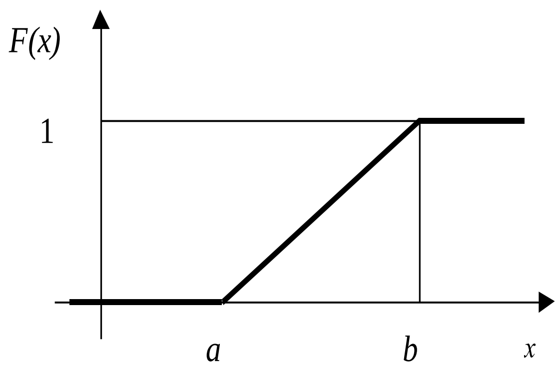


Рис. 2.5. Графік функції розподілу ймовірностей *F(x)* для рівномірного закону

Середнє значення M_x одержуємо за формулою (2.10):

$$M_x = (a+b)/2,$$

а дисперсію D_X - за формулою (2.16):

$$D_X = (b - a)/12.$$

Рівномірний розподіл не має моди, а медіана збігається із середнім значенням.

Нормальний розподіл. Нормальний розподіл є найпоширенішим розподілом випадкових величин, які мають місце у виробничій сфері, економіці, медицині і т.д. Випадкова величина із нормальним розподілом імовірностей може приймати будь-які значення в інтервалі $-\infty < x < +\infty$ і має функцію щільності розподілу ймовірностей виду

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (2.23)$$

де μ і σ - параметри нормального розподілу: математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення відповідно (таким чином, $\mu = M_x$, $\sigma^2 = D_x$).

Як показує дослідження функції *f(x),* вона визначена на всій числовій осі, всі її значення невід'ємні. При $|x| \to \infty$ значення функції зменшуються, $f(x) \to 0$, тобто вісь x є асимптотою функції *f(x).* Функція *f(x)* досягає в точці $x = \mu$ максимуму, що дорівнює $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$, і має перегини в точках $x_1 = \mu - \sigma$ та $x_2 = \mu + \sigma$

При зміні значення μ графік функції *f(x)* зсувається уздовж осі x (рис.2.6). При зміні значення σ змінюється і вид графіка: при збільшенні значення σ у m разів максимальне значення функції зменшується у m разів і графік "витягується" в обидві сторони уздовж осі x. При зменшенні значення σ відбувається протилежне (рис. 2.7).

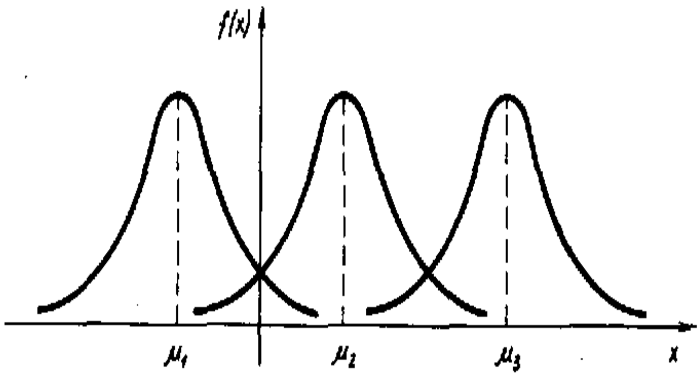


Рис. 2.6. Графіки *f(x)* при різних параметрах μ

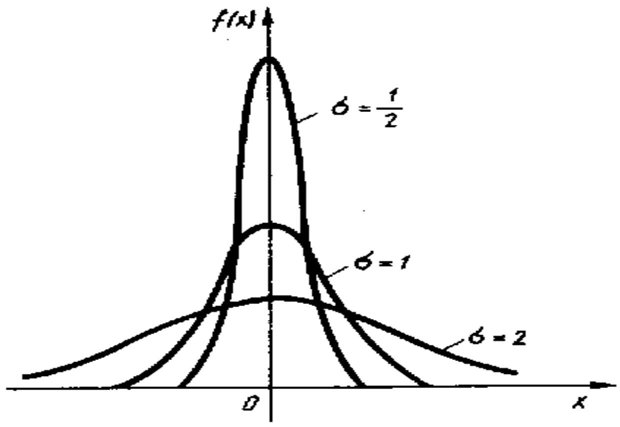


Рис. 2.7. Графіки *f(x)* при різних параметрах σ

На підставі формул (2.5) і (2.23), одержуємо функцію розподілу ймовірностей *F(x)* для нормального розподілу:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = 0 \qquad (2.24)$$

Для нормального закону характерно $M_x = M_0 = M_e = \mu$. Той факт, що випадкова величина X має нормальний розподіл із параметрами μ і σ, можна позначити наступним чином $X \in N(\mu, \sigma)$.

Особливе значення серед нормальних розподілів має нормований нормальний розподіл з параметрами $\mu = 0$ та $\sigma = 1$, тобто $X \in N(0,\ 1)$. Від довільного нормального розподілу $X \in N(\mu, \sigma)$ можна перейти до нормованого нормального розподілу, скориставшись наступним перетворенням змінних

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad , \tag{2.25 }$$

тоді функція розподілу прийме вигляд

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dt = 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dt = 0{,}5 + \Phi(z), \tag{2.26}$$

де $\Phi(z)$ - функція Лапласа (див. 1.17).

Ця функція дозволяє спростити розв'язок таких задач для випадкових величин з нормальним розподілом:

1) знайти ймовірність того, що випадкова величина $X \in N(\mu, \sigma)$ приймає значення в інтервалі [*a, b*], для розрахунку використовують формулу

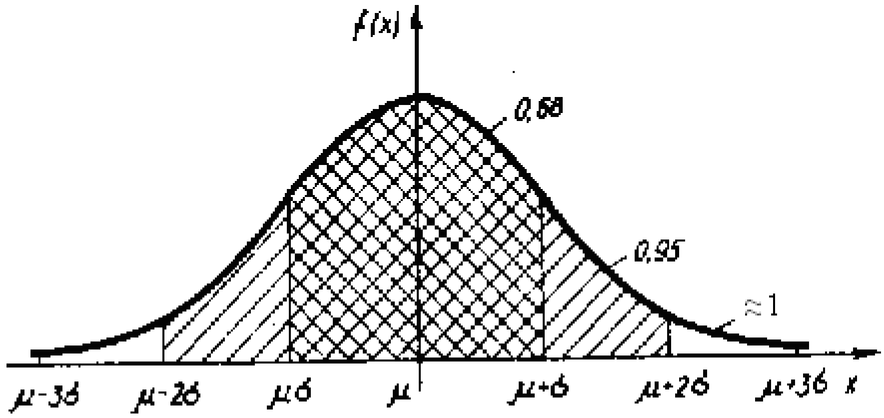
$$P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right), \tag{2.27}$$

2) знайти ймовірність того, що випадкова величина $\mathrm{X} \in \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ відрізняється від свого середнього значення μ за абсолютною величиною не більше ніж на ε:

$$P\left(\left|X - \mu\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{2.28 }$$

Остання формула випливає з (2.27).

Якщо $\varepsilon = \sigma$, то за (2.27) одержуємо P = 0,6826; якщо $\varepsilon = 2\sigma$, то P=0.9545, якщо $\varepsilon = 3\sigma$, то P = $0{,}9973 \approx 1$. Таким чином, випадкова величина X із нормальним розподілом імовірностей практично не приймає значень, які відрізнялися б від її середнього значення за абсолютною величиною більше ніж на 3σ. Це твердження називають правилом "трьох сигм", рис. 2.8 ілюструє його.



2.8. Графік *f(x)* з ілюстрацією правила. "трьох сигм"

Для нормального розподілу ймовірностей непарні центральні моменти дорівнюють нулю, а між парними існує рекурентне співвідношення, яке дозволяє подати момент вищого порядку (r) через моменти менших порядків (r-2):

$$\nu_{\ddot{o}r} = (r-1)\sigma^2 \nu_{\ddot{o}(r\text{-}2)}. \qquad (2.29)$$

Формули (2.27) і (2.28) схожі на формули інтегральної теореми Муавра - Лапласа (1.16) і (1.18), якщо в останніх замінити параметри M_x = NP на μ і $\sqrt{D_x} = \sqrt{NPq}$ на σ. При достатньо великому N такий перехід від біномного розподілу до нормального ґрунтується на законі великих чисел.

2.2. Задачі до розділу №2

При розв'язуванні задач необхідно виконати наступне:

- переписати текст задачі, замінюючи всі параметри їхніми значеннями для конкретного варіанту;
- виконати розрахунки і побудувати необхідні графіки.

Задача 2.1.

За результатами експериментів випадкову величину *X* (кількість спрацювань аварійної сигналізації у цеху випалювання цегли за даними чотирьох кварталів року) задано рядом розподілу (табл.2.2).

Табл.2.2. Таблиця розподілу кількості спрацювань аврійної сигналізації

X	x_1	x_2	x_3	x_4
P	P_1	P_2	P_3	P_4

Знайти функцію розподілу ймовірностей *F(x)* випадкової величини *X* і побудувати її графік. Обчислити для *X* її середнє значення M_x, дисперсію D_x і моду *Mo.* Значення параметрів $x_1 - x_4$, $P_1 - P_4$ визначено у таблиці Д2.8.

Задача 2.2.

Випадкову величину *X* (тиск пари у реакторі за наявності запобіжного клапана) задано функцією щільності розподілу ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x/A, & 0 < x \le B, \\ 0, & x > B. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу ймовірностей *F(x)* випадкової величини *X*. Побудувати графіки функцій *f(x)* і *F(x).* Обчислити для *X* її середнє значення M_x, дисперсію D_x, моду *Mo* і медіану *Me.*

Параметри набувають наступних значень: *A*=(№ варіанту+2), *B*= $\sqrt{2A}$.

Задача 2.3.

Вимірювання температури рідини на вході реактора має похибку δ. Як випадкова величина, похибка підпорядковується нормальному закону розподілу ймовірностей. Виконати наступні завдання:

1) розрахувати та побудувати графіки функцій розподілу та щільності розподілу ймовірностей похибки для таких умов:

а) математичне сподівання похибки становить *A*, середнє квадратичне відхилення дорівнює $\sigma_а$;

б) при такому, як у п.а математичному сподіванні, середнє квадратичне відхилення дорівнює $\sigma_б$;

в) математичне сподівання похибки становить 0°С, середнє квадратичне відхилення дорівнює $\sigma_в$;

2) визначити систематичні складові похибки для пп. а-в;

3) розрахувати для п.а центральні моменти цієї випадкової величини 1-4 порядків.

Параметри задачі визначають таким чином: *A*=№ варіанту; $\sigma_а$=A/5; $\sigma_б=2\sigma_а$; $\sigma_в=\sigma_а$.

Задача 2.4.

Досліджують випадкову величину $X \in N(\mu, \sigma)$ - вологість продукту після сушарки. Знайти ймовірність того, що ця випадкова величина прийме значення:

а) в інтервалі $[a, b]$;

б) менше ніж a,

в) більше ніж b;

г) яке відрізняється від її середнього значення за абсолютною величиною не більше ніж на ε. Параметри задачі визначаються так: μ=№ варіанту; σ=№ варіанту/10; a=0,9(№ варіанту); b=1,1(№ варіанту); ε=0,3(№ варіанту).

2.3. Рекомендації та приклади розв’язання задач розділу №2

Задача 2.1.

Нехай випадкова величина X (кількість спрацювань аварійної сигналізації у цеху випалювання цегли за даними чотирьох кварталів року), визначена наступним рядом розподілу ймовірностей (див.табл.2.3).

Табл. 2.3. Таблиця розподілу випадкової величини X

X	3	5	7	11
P	0,14	0,20	0,49	0,17

Знайти функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ випадкової величини X і побудувати її графік. Обчислити для X її середнє значення M_x, дисперсію D_x і моду Mo.

Розв'язок. Функцію розподілу ймовірностей знаходимо за формулами (2.2) і (2.3) для дискретних випадкових величин:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 3,\\ 0{,}14, & 3<x\leq 5,\\ 0{,}34, & 5<x\leq 7,\\ 0{,}83, & 7<x\leq 11,\\ 1, & x>11.\end{cases}$$

Побудуємо графік функції розподілу ймовірностей *F(x)* (рис. 2.9).

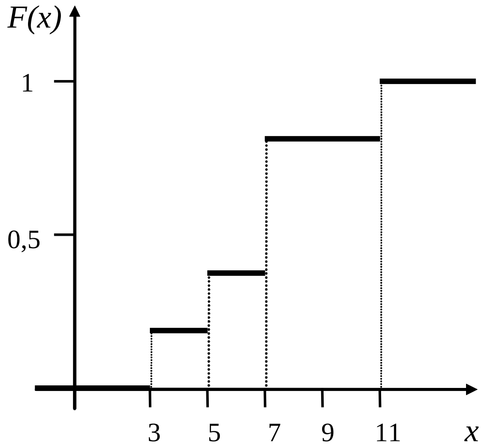


Рис. 2.9. Графік фінкції розподілу ймовірностей величини *X*

Середнє значення M_x обчислюємо за формулою (2.9):

$$M_x = 3\cdot 0{,}14 + 5\cdot 0{,}2 + 7\cdot 0{,}49 + 11\cdot 0{,}17 = 6{,}72 \approx 7.$$

Тобто, аварійна сигналізація у цеху випалювання цегли спрацьовує у середньому близько 7 разів на квартал.

Для визначення дисперсії скористаємося формулами (2.12) і (2.14):

$$M_x^{2} = 3^2\cdot 0{,}14 + 5^2\cdot 0{,}2 + 7^2\cdot 0{,}49 + 11^2\cdot 0{,}17 = 50{,}84,$$

$$D_x = 50{,}84 - 6{,}72^2 = 5{,}6816.$$

Моду *Mo* знайдемо за максимальною ймовірністю: P=0,49 при *Mo*=7. Отже, наймовірніша кількість аварій у цеху, при яких спрацьовує сигналізація, дорівнює 7.

Задача 2.2.

Випадкову величину X (тиск пари у реакторі за наявності запобіжного клапана) задано наступною функцією щільності розподілу ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x/2, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ випадкової величини X. Побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$. Обчислити для X її середнє значення M_x, дисперсію D_x, моду Mo і медіану Me.

Розв'язок. Функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ неперервної випадкової величини знайдемо за формулою (2.5):

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{2} dt = \left. \frac{t^2}{4} \right|_0^x = \frac{x^2}{4}, \quad 0 \le x \le 2.$$

Тому

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2/4, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Побудуємо графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ (рис. 2.10 і 2.11).

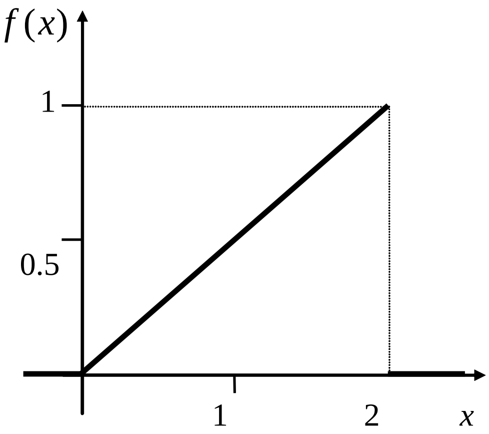


Рис. 2.10. Графік функції щільності розподілу ймовірностей *X*

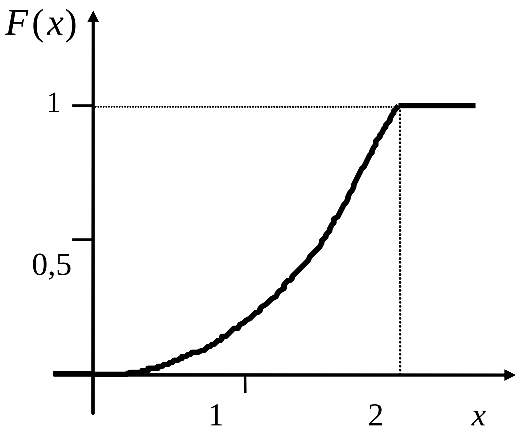


Рис. 2.11. Графік функції розподілу ймовірностей *X*

Середнє значення *X* обчислимо за формулою (2.10):

$$M_x = \int_0^2 x\,\frac{x}{2}\,dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2 = \frac{8}{6} = 1{,}33.$$

Для розрахунку дисперсії *X* скористаємося формулами (2.12) і (2.14):

$$M_{x^2} = \int_0^2 x^2\,\frac{x}{2}dx = \left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2 = \frac{16}{8} = 2;$$
$$D_x^2 = 2 - (4/3)^2 = 2 - 16/9 = 2/9 = 0{,}22.$$

З графіка (див. рис. 2.10) видно, що *f(x)* досягає максимуму в точці x=2, тобто, *Mo*=2. Для знаходження медіани *Me* потрібно розв'язати рівняння $x^2/4=1/2$, або $x^2=2$. Маємо $x=\sqrt{2}$. Випадкова величина визначена тільки на інтервалі [0, 2], тому $Me=\sqrt{2}$=1,414.

Задача 2.3.

Вимірювання температури рідини на вході реактора виконується з похибкою δ. Як випадкова величина, похибка підпорядковується нормальному закону розподілу ймовірностей. Виконати наступні завдання:

1) розрахувати та побудувати графіки функцій розподілу та щільності розподілу ймовірностей похибки для таких умов:

а) математичне сподівання похибки становить A=3,75°C, середнє квадратичне відхилення дорівнює $\sigma_а$= 0,5°C;

б) при такому, як у п.а математичному сподіванні, середнє квадратичне відхилення дорівнює $\sigma_б$= 1°C;

в) математичне сподівання похибки становить 0°C, середнє квадратичне відхилення дорівнює $\sigma_в$= 0,5°C;

2) визначити систематичні складові похибки δ для пп. а-в;

3) розрахувати для п.а центральні моменти цієї випадкової величини 1-4 порядків.

Розв'язок. 1. При розрахунку функції щільності розподілу п.1.а. можна використати табл.Д1.1. Функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(x) = \varphi(-x)$. Аргумент x фунукції $\varphi(x)$ у цій таблиці - нормована величина. Далі, згідно з 2.25, будемо позначати її z, тому перш ніж скористатися табл.Д1.1, треба зробити певні перерахунки. Так, натуральне значення похибки δ можна подати через нормоване z таким чином:

$$\delta = z \cdot \sigma_\delta + \mu_\delta .$$

Діапазон зміни z виберемо згідно з правилом "трьох сігм": від -3·1 до 3·1 (σ_z=1 оскільки z - нормована величина), крок зміни z нехай дорівнює 0,5.

Величини $\delta_а$, $\delta_б$, $\delta_в$ при цьому теж будуть змінюватися у діапазонах $\delta_a = A \pm 3\sigma_{\grave{a}}; \delta_{\acute{a}} = A \pm 3\sigma_{\acute{a}}; \delta_{\hat{a}} = 0 \pm \sigma_{\hat{a}}$.

При виконанні пп.1а-1в доцільно скласти таблицю розрахунків за структурою табл. 2.4., куди вносити відповідні значення нормованого (z) та натуральних ($\delta_а$, $\delta_б$, $\delta_в$) аргументів, а також шуканих функцій.

Між функціями нормованих величин $f(z_{k,i})$ та величин у натуральному масштабі $f(\delta_{k,i})$ існує наступна залежність:

$$f(\delta_{k,i}) = \frac{1}{\sigma_k} f(z_{k,i}),$$

де $\delta_{k,i}$, $z_{k,i}$ – натуральне та нормоване значення похибки k-о пункту завдання $(k = \overline{1а - 1\hat{a}})$ у i–у рядку таблиці; σ_k - середнє квадратичне відхилення для k-о пункту завдання.

Це означає, що для переходу до функції з натуральним аргументом функцію нормованої змінної треба розділити на середньоквадратичне відхилення.

Наприклад, для розрахунку $f(\delta_а)$ першого рядка таблиці (k=а; i=1; $B_а$=0,5):

$$f(\delta_{а,1}) = f(2{,}25) = \frac{1}{0{,}5} f(-3) = \frac{0{,}0044}{0{,}5} \approx 0{,}009.$$

Таблиця 2.4. Структура даних для розрахунку функцій *f(z)* та *F(z)*

z	$f(z)$	$F(z)$	$\delta_а$	$\delta_б$	$\delta_в$	$f(\delta_а)$	$f(\delta_б)$	$f(\delta_в)$
-3,0	0,0044	0,0014	2,25	0,75	-1,50	0,009	0,004	0,009
-2,5	0,0175	0,0062	2,50	1,25	-1,25	0,035	0,018	0,035
-2,0	0,054	0,0228	2,75	1,75	-0,500	0,108	0,054	0,108
...	...	...	...					
3,0·	0,0044	0,9987	5,25	6,75	1,50	0,009	0,004	0,009

Між функціями розподілу нормованих величин $F(z_{k,i})$ та величин у натуральному масштабі $F(\delta_{k,i})$ існує наступна залежність:

$$F(\delta_{k,i}) = F(z_{k,i}).$$

Функцію розподілу *F(z)* розрахуємо за формулою (2.26) і скористаємось таблицею функції Лапласа (табл. Д1.3).

Рекомендації. Графіки $f(\delta_а)$, $f(\delta_б)$, $f(\delta_в)$ розташуйте в одній системі координат, в одних координатах розташуйте також функції $F(\delta_а)$, $F(\delta_б)$, $F(\delta_в)$. Зразки зображення функцій наведено на рис.2.12 та 2.13.

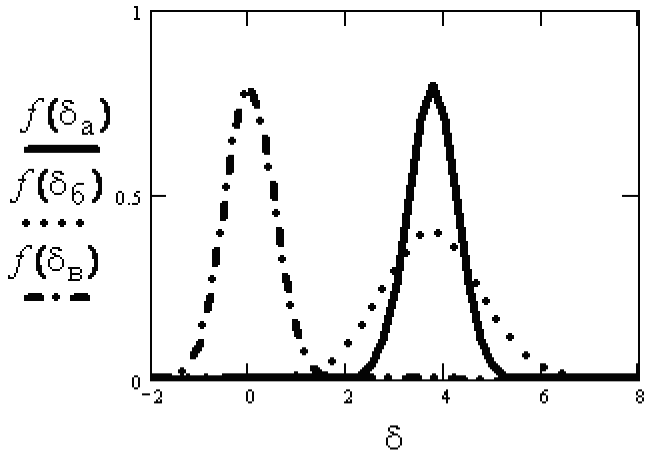


Рис.2.12. Графіки функцій щільності розподілу ймовірностей для прикладу 2.3

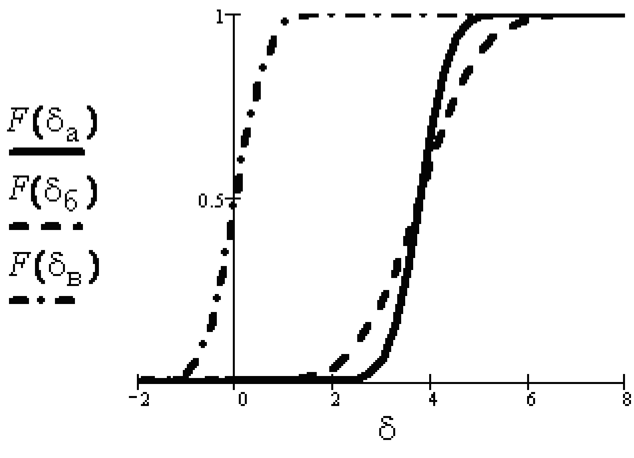


Рис.2.13. Графіки функцій розподілу ймовірностей для прикладу 2.3

2. Систематичні складові похибок дорівнюють математичним сподіванням цих випадкових величин.

3. Центральним моментом похибки другого порядку є її дисперсія (2.18). Центральний момент похибки четвертого порядку треба розрахувати за виразом (2.29).

Задача 2.4.

Досліджують випадкову величину $X \in N(\mu, \sigma)$ - вологість продукту після сушарки. Знайти ймовірність того, що ця випадкова величина прийме значення:

а) в інтервалі [-1, 2];

б) менше ніж (- 1);

в) більше ніж 2;

г) яке відрізняється від свого середнього значення за абсолютною величиною не більше ніж на 1.

Примітка. У цьому контрольному прикладі умисне присутнє від'ємне значення, показуючи, що і від]ємні значення можуть мати місце у задачах такого типу.

Розв'язок. У перших трьох випадках можна скористатися формулою (2.27), а в четвертому - фомулою (2.28).

а) Задано*:* μ=0, σ=2, a = -1, b = 2.

Знайти*:* $P(-1 \le X \le 2)$.

Маємо

$$P(-1 \le X \le 2) = \Phi\left(\frac{2-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1-0}{2}\right) = ;$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-0{,}5) = \Phi(1) + \Phi(0{,}5) =$$

$$= 0{,}3413 + 0{,}1915 = 0{,}5328.$$

б) Задано: μ=0, σ=2, a = -∞, b = -1.

Знайти: $P(X \le 1)$.

Отримуємо

$$P(X \le -1) = P(X \le -1) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{-1-0}{2}\right) = 0{,}5 + \Phi(-0{,}5) = 0{,}5 - \Phi(0{,}5) =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}1915 = 0{,}3085.$$

в) Задано: μ=0, σ=2, a = 2, b =∞.

Знайти: $P(X \ge 2)$.

Маємо

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \ge 2) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \le 2) = 1 - (0{,}5 + \Phi\left(\frac{2-0}{2}\right) = 1 - 0{,}5 - \Phi(1) =$$
$$= 1 - 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587.$$

г) Задано: μ=0, σ=2,ε=1.

Знайти $P(|X - 0| \le 1)$.

Отримуємо

$P(|X - 0| \le 1) = 2 \cdot \Phi(1/2) = 2 \cdot 0{,}1915 - 1 = 0{,}3830.$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНИЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высш. шк., 2001.–575 с.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988.–446
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. –М.:Высш. шк., 2000.–479 с.
4. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высш. шк., 1971.–328 с.
5. Жученко А.І., Ярощук Л.Д. Спеціальні розділи математики для дослідження комп'ютерних систем: Навч. посіб. – К.: ІВЦ «Видавництво "Політехніка"», 2002.-208 с.
6. Математическая статистика / Под ред. А.М. Длина.–М.:Высш. шк., 1975.–398 с.
7. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика.–М.:Наука, 1979.–496 с.
8. Коваленко И.Н.. Гнеденко Б.В. Теория вероятностей.–К.:Высш. шк.,1990.–327 с.
9. Новікова Л.В., Котляр Б.Д., Бичков В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. – К.: Техніка, 1996. – 184с.
10. Математическая статистика/ Иванова В.М., Калинина В.Н., Нешумова Л.А., Решетникова И.О.–М.:Высш. шк., 1981.–368 с.
11. Бублик Г.Ф. Фізичні процеси в прикладах і системах.– К.:Либідь, 1997.–199 с.
12. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. –М.:Статистика, 1979.–279 с.
13. Елисеева И.И., Юзбашев М.М. Общая теория статистики.–М.: Финансы и статистика, 2001.–480 с.

14. Четыркин Е.М., Калихман И.Л. Вероятность и статистика.–М.: Финансы и статистика, 1982.–319 с.

15. Теорія ймовірностей і елементи математичної статистики: Навчальний посібник /В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний.– К.: НМК, 1991. – 252с.

16. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. – М.: Высш. шк., 1986.–79 с.

17. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/ Под ред. А.А.Свешникова. – М.: Наука, 1970.–656 с.

18. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.–М.:Высш. шк., 2001.–398 с.

19. Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике.–Минск: Вышэйш. шк.,1975.–250 с.

20. Теорія ймовірностей. Збірник задач./За заг. ред. А.В. Скорохода. –К.: Вища шк., 1976. – 384 с.

Додаток 1

Статистичні таблиці

Табл. Д1.1. Значення функції: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathring{a}^{-\frac{\tilde{o}^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	2712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2974	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0655	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

Продовження табл. Д1.1.

2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Табл. Д1.2. Значення функції Пуассона: $Ð(\hat{e}) = \frac{\lambda^{\hat{e}}}{\hat{e}!}\,\mathring{a}^{-\lambda}$ $(\times 10^{-4})$

λ / k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066
1	0905	1638	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647
3	0002	0019	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494
4		0001	0002	0007	0016	0030	0050	0077	0111
5				0001	0002	0004	0007	0012	0020
6							0001	0002	0003

λ / k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	3679	1353	0498	0183	0067	0025	0009	0003	0001	0000
1	3679	2707	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011	0005
2	1839	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050	0023
3	0613	1804	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0050	0076
4	0153	0902	1680	1954	1766	1339	0912	0572	0337	0189
5	0031	0361	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607	0378
6	0005	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0001	0037	0216	0595	1044	1377	1490	1396	1171	0901
8		0009	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9		0002	0027	0132	0363	0688	1014	1241	1318	1251
10			0008	0053	0181	0413	0710	0993	1186	1251
11			0002	0019	0082	0225	0452	0722	0970	1137
12			0001	0006	0034	0126	0263	0481	0728	0948
13				0002	0013	0052	0142	0296	0504	0729
14				0001	0005	0022	0071	0169	0324	0521
15					0002	0003	0033	0090	0194	0347
16						0001	0014	0045	0109	0217
17							0006	0021	0058	0128
18							0002	0009	0029	0071
19							0001	0004	0014	0037
20								0002	0006	0019
21								0001	0003	0009
22									0001	0004
23										0002
24										0001,6

Табл. Д1.3. Значення функції Лапласа: $\hat{O}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

X	Ф *(x)*	*x*	Ф*(x)*	*x*	Ф *(x)*	*x*	Ф *(x)*
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,31	0,4050
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,32	0,4065
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,33	0,4080
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,34	0,4100
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,35	0,4115
0,05	0,0199	0,50	0,1^15	0,95	0,3289	1,36	0,4130
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,37	0,4145
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,38	0,4160
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,39	0,4175
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,40	0,4190
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,41	0,4205
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,42	0,4220
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,43	0,4235
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,44	0,4250
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,45	0,4265
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,46	0,4280
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,47	0,4290
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,48	0,4305
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,49	0,4320
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,50	0,4330
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,51	0,4345
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,52	0,4355
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,53	0,4370
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,54	0,4380
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,55	0,4395
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,56	0,4405
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,57	0,4420
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,58	0,4430
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,59	0,4440
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,60	0,4450
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,61	0,4465
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,62	0,4475
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,63	0,4485
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,64	0,4495
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,65	0,4505
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,66	0,4515
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,67	0,4525
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,68	0,4535
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,69	0,4545
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,70	0,4555
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,71	0,4565

Продовження табл. Д1.3

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,80	0,4641	2,00	0,4772	2,40	0,4918	2,80	0,4974
1,81	0,4649	2,02	0,4783	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,83	0,4664	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,84	0,4671	2,08	0,4812	2,48	0,4934	2,88	0,4980
1,85	0,4678	2,10	0,4821	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,12	0,4830	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,14	0,4838	2,51	0,4945	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,16	0,4846	2,56	0,4948	2,96	0,4985
1,89	0,4706	2,18	0,4854	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,20	0,4861	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,22	0,4868	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,24	0,4875	2,64	0,4959	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,26	0,4881	2,66	0,4961	3,60	0,499841
1,94	0,4738	2,28	0,4887	2,68	0,4963	3,80	0,499928
1,95	0,4744	2,30	0,4893	2,70	0,4965	4,00	0,499968
1,96	0,4750	2,32	0,4898	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,97	0,4756	2,34	0,4904	2,74	0,4969	5,00	0,499997
1,98	0,4761	2,36	0,4909	2,76	0,4971		
1,99	0,4767	2,38	0,4913	2,78	0,4973		

Додаток 2

Таблиці з параметрами завдань

Табл.Д2.1. Дані до задачі 1.1

Варіант	**Номери блоків**		**Варіант**	**Номери блоків**	
	N1	***N2***		***N1***	***N2***
1	1	14	**14**	8	14
2	1	13	**15**	8	13
3	2	12	**16**	9	12
4	2	11	**17**	9	11
5	3	10	**18**	10	5
6	3	9	**19**	10	9
7	4	8	**20**	11	8
8	4	7	**21**	11	7
9	5	6	**22**	12	6
10	6	4	**23**	12	5
11	6	3	**24**	13	4
12	7	2	**25**	13	3
13	7	1	**26**	14	2

Табл.Д2.2. Дані до задачі 1.2

Варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
$\boldsymbol{P_1}$	0,861	0,871	0,881	0,891	0,901	0,911	0,921	0,931	0,941	0,951	0,961	0,971	0,981	0,991	0,999
$\boldsymbol{P_2}$	0,761	0,771	0,781	0,791	0,801	0,811	0,821	0,831	0,841	0,851	0,861	0,871	0,881	0,891	0,899
$\boldsymbol{P_3}$	0,711	0,712	0,731	0,741	0,751	0,761	0,771	0,781	0,791	0,801	0,811	0,821	0,831	0,841	0,849

Варіант	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
$\boldsymbol{P_1}$	0,989	0,979	0,969	0,959	0,949	0,939	0,929	0,919	0,909	0,899	0,889	0,879	0,869	0,859	0,849
$\boldsymbol{P_2}$	0,889	0,879	0,869	0,859	0,849	0,839	0,829	0,819	0,809	0,799	0,789	0,779	0,769	0,759	0,749
$\boldsymbol{P_3}$	0,839	0,829	0,819	0,809	0,799	0,789	0,779	0,769	0,759	0,749	0,739	0,729	0,719	0,709	0,699

Табл. Д2.3. Дані до задачі 1.3

Варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
K	6	5	7	5	5	5	5	6	6	6	6	3	3	3	3
L	5	4	3	6	6	7	8	3	5	6	7	8	7	6	5
M	4	5	6	7	7	6	7	5	5	5	5	5	6	6	6
N	7	6	3	4	3	4	5	6	3	5	4	7	4	5	6
P	2	2	3	2	3	2	4	3	2	4	2	2	3	1	4
Q	2	3	1	4	2	2	1	3	2	1	3	3	3	4	1

Варіант	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
K	3	5	4	4	4	4	4	4	4	7	7	7	7	7	7
L	4	3	9	8	7	6	5	4	3	2	4	5	6	7	8
M	6	4	7	7	8	7	7	7	7	4	8	4	4	4	8
N	7	9	3	4	3	5	6	7	8	8	5	6	7	4	5
P	2	2	3	2	4	2	3	3	1	4	3	2	3	1	3
Q	2	3	3	3	1	2	2	3	4	1	3	2	2	4	3

Табл. Д2.4. Дані до задачі 1.4

Варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
A	7	7	7	7	6	6	3	3	3	3	3	3	3	7	7
B	7	6	5	4	3	2	2	3	4	3	6	7	6	2	3
C	2	2	2	2	3	3	6	6	6	6	6	6	6	2	2
D	2	3	4	5	7	8	8	7	6	5	4	3	2	8	6
E	3	2	3	3	3	3	2	2	3	3	2	3	3	2	2
F	2	2	4	3	3	4	4	3	3	4	5	2	3	3	2

Варіант	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
A	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6
B	5	4	3	2	3	4	5	6	7	8	8	7	6	5	4
C	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	3	3	3	3
D	7	6	5	4	3	5	4	6	7	8	9	3	4	5	6
E	2	3	2	3	3	4	2	3	2	3	3	4	3	4	4
F	3	3	4	4	2	3	4	3	4	3	4	3	2	3	2

Табл. Д2.5. Дані до задачі 1.5

Варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
P_1	0,86	0,87	0,85	0,89	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	0,98
P_2	0,77	0,78	0,76	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89	0,90	0,89
P_3	0,72	0,73	0,71	0,75	0,76	0,77	0,78	0,79	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,84
M_1	18	17	19	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	6
M_2	7	8	6	10	11	12	13	14	15	16	17	18	10	20	19
M_3	12	13	11	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	24

Варіант	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
P_1	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	0,89	0,88	0,87	0,86	0,85	0,84	0,83
P_2	0,88	0,87	0,86	0,85	0,84	0,83	0,82	0,81	0,80	0,79	0,78	0,77	0,76	0,75	0,74
P_3	0,83	0,82	0,81	0,80	0,79	0,78	0,77	0,76	0,75	0,74	0,73	0,72	0,71	0,70	0,69
M_1	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
M_2	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
M_3	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9

Табл. Д2.6. Дані до задачі 1.6

Варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
N	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	10	10	10	10	10
P	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39	0,40	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45

Варіант	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
N	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
P	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,60

Табл. Д2.7. Дані до задачі 1.7

Варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
$\boldsymbol{P \cdot 10^{-3}}$	3,0	2,5	2,0	1,6	1,4	1,13	1,1	1,0	0,90	0,80	0,80	0,71	0,67	0,30	0,56
K	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	4	3	4	5	1
L	4	5	6	7	8	3	4	5	6	7	4	1	4	5	6
M	3	4	5	6	7	3	4	2	6	4	3	2	3	2	3
$\boldsymbol{N \cdot 10^{3}}$	0,6	1,2	2,0	3,0	4,2	0,8	0,9	2,0	3,3	4,8	6,5	8,4	9,0	3,4	3,4

Варіант	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
$\boldsymbol{P \cdot 10^{-3}}$	0,55	0,53	0,50	0,48	0,45	0,43	0,42	0,40	0,38	0,37	0,36	0,34	0,33	0,32	0,31
K	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
L	7	5	3	4	5	4	7	8	3	4	5	6	7	8	3
M	2	2	5	6	2	3	4	5	6	2	4	8	2	3	2
$\boldsymbol{N \cdot 10^{3}}$	5,4	7,6	10,0	12,6	15,4	2,3	4,8	7,5	10,4	13,5	16,8	20,3	3,0	6,2	9,6

Табл. Д2.8 Дані до задачі 2.1

Варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
X_1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
X_2	7	9	11	9	11	13	15	13	15	17	19	17	19	21	23
X_3	10	13	16	11	14	17	20	15	18	21	24	19	22	25	28
X_4	16	21	26	15	20	25	30	19	24	29	34	23	28	33	38
P_1	0,13	0,11	0,10	0,14	0,13	0,11	0,10	0,14	0,13	0,1	0,10	0,14	0,13	0,11	0,10
P_2	0,17	0,14	0,13	0,20	0,17	0,14	0,13	0,20	0,17	0,14	0,13	0,20	0,17	0,14	0,13
P_3	0,50	0,50	0,44	0,49	0,50	0,50	0,44	0,49	0,50	0,50	0,44	0,49	0,50	0,50	0,44
P_4	0,20	0,25	0,33	0,17	0,20	0,25	0,33	0,17	0,20	0,25	0,33	0,17	0,20	0,25	0,33

	16	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
X_1	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
X_2	21	23	25	27	25	27	29	31	29	31	33	35	33	35	37
X_3	23	26	29	32	27	30	33	36	31	34	37	40	35	38	41
X_4	27	32	37	42	31	36	41	46	35	40	45	50	39	44	49
P_1	0,14	0,13	0,11	0,10	0,14	0,13	0,11	0,10	0,14	0,13	0,11	0,10	0,14	0,13	0,11
P_2	0,20	0,17	0,14	0,13	0,20	0,17	0,14	0,13	0,20	0,17	0,14	0,13	0,20	0,17	0,14
P_3	0,49	0,50	0,50	0,44	0,49	0,50	0,50	0,44	0,49	0,50	0,50	0,44	0,49	0,50	0,50
P_4	0,17	0,20	0,25	0,33	0,17	0,20	0,25	0,33	0,17	0,20	0,25	0,33	0,17	0,20	0,25

Зміст

ПРИМІТКИ