$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = P_1 + P_2 x + \frac{1}{2!} p_3 x^2 + \frac{1}{3!} P_4 x^3$$

Після підстановки у Гамільтона - Якобі - Беллмана і знехтування 5-м і вищим ступенем x:

$$p_1^2 + 2p_1p_2x + \left(p_2^2 + p_1p_3 - 1\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}p_1p_4 + p_2p_3 - 2p_1\right)x^3 +$$

$$+\left(\frac{1}{4}p_3^2 + \frac{1}{3}p_2p_4 - 2p_2\right)x^4 = 0 \quad \text{для } x$$

$$\Rightarrow p_1 = 0; \quad p_2 = 1; \quad p_3 = 0; \quad p_4 = 6 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = x + x^3 \Rightarrow$$

$$u = -\frac{\partial V}{\partial x} = -x - x^3$$

врегульована система: $\mathbf{x}' = -x \;\; \forall \; x_0$

2.4. Узагальнена проблема:

$$H\left(x,\ u,\ \frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\partial V}{\partial x}\left[f_1(x) + f_2(x)\cdot u\right]$$

$$\min_u H: \ \frac{\partial H}{\partial \overline{u}} = u + \frac{\partial V}{\partial x}\cdot f_2 = 0 \Rightarrow u^* = -\frac{\partial V}{\partial x} f_2$$

$$\Rightarrow H^*\left(x, \frac{\partial V}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2} f_2^2 \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + 2f_1\frac{\partial V}{\partial x} + \varphi(x) = 0$$

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Методичні вказівки
до самостійної роботи студентів з курсу “Математичні методи оптимізації” для студентів спеціальності “Автоматизоване управління технологічними процесами”

Затверджено
на засіданні кафедри
автоматизації хімічних виробництв
Протокол №5 від 16.01.2013

Київ НТУУ «КПІ» 2013

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів з курсу
“Математичні методи оптимізації”
для студентів спеціальності “Автоматизоване управління технологічними процесами ”

/Укл.: Л.Р. Ладієва – К.: НТУУ, “КПІ”,2013.-56 с.

Навчальне видання
Методичні вказівки
до самостійної роботи студентів з курсу
“Математичні методи оптимізації”
для студентів спеціальності “Автоматизоване управління
технологічними процесами ”

Укладачі: Ладієва Леся Ростиславівна

Відповідальний редактор А.І.Жученко

Рецензенти: А.І.Кубрак
М.С. Піргач

2.1. Лінеаризований об'єкт: $\mathbf{x}' = u$

Рівняння Ріккаті:

$$-\overline{P}^2 + 1 = 0 \Rightarrow \overline{P} = \pm 1 \Rightarrow \overline{K} = 1 \Rightarrow u = -x$$

Врегульована система: $\mathbf{x}' = x^3 - x; \quad x(0) = x^0$

Стабільний діапазон:

$$\left(x_0^3 - x_0\right)\operatorname{sign}x_0 < 0 \Leftrightarrow x_0^2 < 1 \Leftrightarrow |x_0| < 1$$

2.2. Рівняння Гамільтона - Якобі - Беллмана:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \underset{u}{\mathrm{Min}}\, H\left(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0$$

тут тимчасово – інваріантна задача, $t_e \to \infty \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

$$H\left(x, u, \frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 + u^2\right) + \frac{\partial V}{\partial x}\left(x^3 + u\right)$$

$\underset{\bar{u}}{\min}\, H : \frac{\partial H}{\partial \bar{u}} = u^* + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow u^* = -\frac{\partial V}{\partial x}$ (min, тому що опукла проблема)

$$\Rightarrow H^*\left(x, \frac{\partial V}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial x}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x^3 \pm x\sqrt{x^4 + 1}$$

причому $u^* = -\frac{\partial V}{\partial x} = -x^3 - x\sqrt{x^4 + 1}$

врегульована система: $\mathbf{x} = -x\sqrt{x^4 + 1} \quad \forall x_0$

2.3. Числовий ряд:

$$V(x) = P_0 + P_1 x + \frac{1}{2!}P_2 x^2 + \frac{1}{3!}P_3 x^3 + \frac{1}{4!}P_4 x^4$$

Точка завдання	Шлях	Σt_i	Σp_i	Примітка
1.1. а) перша альтернатива	$A \to B_1$	12	12	мінімальний час
1.1. б) друга альтернатива	$A \to B$	12	8	мінімальний час
1.1. в) третя альтернатива	$A \to B$	12	10	мінімальний час
1.2. (в сторону B_1)	$A \to B_1$	20	21	максимальна
		15	21	кількість пасажирів
1.2. (в сторону B_2)	$A \to B_2$	23	21	максимальна
		16	21	кількість пасажирів

Вступ

Як показав досвід, самостійна робота студентів-заочників найбільш ефективно реалізується при самостійному вивченні контрольних питань, коли доводиться поєднувати теорію з практикою – застосовувати відповідні умови оптимальності для задач динамічної оптимізації.

Мета методичних вказівок – допомогти студентам самостійно опанувати розділи дисципліни і застосовувати знання на практичних прикладах.

Методичні вказівки складені стосовно наступних розділів теорії оптимального керування:

1. Варіаційне числення.
2. Принцип максимуму Понтрягіна.
3. Динамічне програмування.

Методичні вказівки складаються з двох частин. У першій частині надані у лаконічній формі теоретичні відомості про необхідні умови оптимальності, варіанти граничних умов, лінійно-квадратичну оптимізацію, у другій – приклади рішення задач динамічної оптимізації.

Мінімізація функціоналу без додаткових обмежень

1. Стаціонарний кінцевий час

$$J\left[\bar{x}(t)\right]=\int_{t_a}^{t_f}F\left[\bar{x}(t),\bar{\mathbf{x}}'(t),t\right]dt \rightarrow \underset{\bar{x}}{Min};\bar{x}\in R^n;F\in C^2;\bar{x}\in C^2$$

t_a, t_f стаціонарні; $\bar{x}(t_a)$, $\bar{x}(t_f)$ частково стаціонарні, частково відкриті

Необхідні умови для локального мінімуму:

(1) $\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \bar{\mathbf{x}}'} = \bar{0}$ диференціальне рівняння Ейлера-

(2) Лагранжа 2-го порядку

(3) $\frac{\partial F^T}{\partial \bar{\mathbf{x}}'}\delta\bar{x} = 0$ для t_a, t_f умова трансверсальності

(4) дані граничні умови для $\bar{x}(t_a), \bar{x}(t_f)$

(Двоточкова крайова задача 2-го порядку)

2. Вільний (відкритий) кінцевий час

$t_a = 0$; $\bar{x}(t_a)$ стаціонарний: без суттєвих обмежень

1.3.

Функція якості: $J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\varphi(x) + U^2\right)dt$

де $\varphi(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ и $\varphi(0) = 0$ (додатньо визначена функція).

Рішення

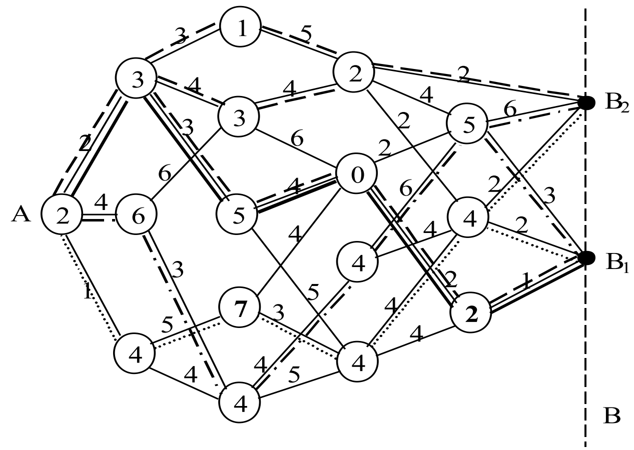
Завдання 1.

Перевірка.

.1. а) Оптимальний шлях

б) Оптимальний шлях (3 варіант рішення)

.2. Оптимальний шлях (4 варіант рішення)



Завдання 2.

Для нестійких об'єктів регулювання

$$x' = x^3 + U, \quad x(0) = x_0$$

пошук закону регулювання для мінімізації функціонала якості

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x^2 + U^2\right)dt$$

2.1.Лінеаризуйте відрізки регулювання в стані рівноваги (0, 0) і візьміть похідну від ЛК - регулятора. Визначити стабільну область стану спокою (0, 0) для системи, що регулюється.

2.2.Представте рівняння Гамільтона - Якобі - Беллмана і визначте оптимальний закон регулювання, а також рівняння стану регульованої системи в її області стабільності (0, 0).

2.3.Визначити приблизне рішення закону регулювання, в якому застосовується розклад у ряд

$$V(x) = p_0 + p_1 x + \frac{1}{2!}p_2 x^2 + \frac{1}{3!}p_3 x^3 + \frac{1}{4!}p_4 x^4$$

Знехтувати всіма складовими вище четвертого порядку. Задайте рівняння стану регульованої системи і її області стабільності навколо (0, 0)

2.4.Необхідно за допомогою рівняння Гамільтона - Якобі - Беллмана визначити наступні узагальнені постановки задачі:

білінійний регулюючий відрізок

$$x' = f_1(x) + f_2(x)U$$

$t_f, \ \bar{x}(t_f)$ вільний або стаціонарний

$$J\left[\bar{x}(t), t_t\right] = G\left[\bar{x}(t_f), t_f\right] + \int_0^{t_f} F\left[\bar{x}(t), \bar{\mathbf{x}}'(t), t\right]dt \to \underset{\bar{x}}{\mathrm{Min}}; G \in C^2$$

Необхідні умови для локального мінімуму:

(1) $\dfrac{\partial F}{\partial \bar{x}} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial \bar{\mathbf{x}}'} = \bar{0}$ як у (1)

(2) $\left[\dfrac{\partial G}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial F}{\partial \bar{\mathbf{x}}'}\right]^T_{t_f} \delta \bar{x}^f = 0$ умова трансверсальності

(3) дані граничні умови для $\bar{x}(0), \ \bar{x}(t_f)$

(4) $\left[\dfrac{\partial G}{\partial t_f} + F - \dfrac{\partial F}{\partial \bar{\mathbf{x}}}^T \bar{\mathbf{x}}'\right]_{t_f} \delta t_f = 0$

умова трансверсальності для t_f

3. Загальна умова кінцевого часу

$$\bar{g}\left[\bar{x}(t_f), \ t_f\right] = \bar{0}; \ \bar{g} \in R^q; \ \bar{g} \in C^2$$

$$\Theta\left[\bar{x}(t_f), \ \bar{v}, \ t_f\right] = G\left[\bar{x}(t_f), \ t_f\right] + v^T \bar{g}\left[\bar{x}(t_f), \ t_f\right]$$

Необхідні умови для локального мінімуму:

Застосування (1) ÷ (4) із 2. з Θ замість G

(5) $\bar{g}\left[\bar{x}(t_f),\ t_f\right] = \bar{0}$

4. Умова Лежандра

Необхідні умови 2-го порядку для локального мінімуму (максимуму):

$$F_{\bar{x}'\bar{x}'}\Big|_* \geq 0 \qquad \left(F_{\bar{x}'\bar{x}'}\Big|_* \leq \bar{0}\right) \qquad \forall t \in \left[t_a, t_f\right]$$

5. Динамічна оптимізація з обмеженнями у формі рівностей

додатково введено:

$$\bar{f}\left[\bar{x}(t), \bar{X}(t), t\right] = \bar{0} \quad \forall t \in \left[0, t_f\right]; \quad \bar{f} \in C^2; \quad \bar{f} \in R^p$$

функція Лагранжа:

$$L\left[\bar{x}(t), \bar{X}(t), \bar{\lambda}(t), \bar{v}, t_f\right] = \theta\left[\bar{x}(t_f), t_f\right] + \overline{v^T}\bar{g}\left[\bar{x}(t_f), t_f\right] + \\ + \int_0^{t_f}\left\{F\left[\bar{x}(t), \bar{X}(t), t\right] + \bar{\lambda}(t)^T \bar{f}\left[\bar{x}(t), \bar{X}(t), t\right]\right\} dt$$

де $\bar{\lambda}(t) \in R^p$ множники Лагранжа

Необхідні умови для локального мінімуму:

λ(t) існує постійно, не перетворюється у нуль на кінцевому тривалому часовому інтервалі, так що

Завдання 1.

Автобус повинен їхати по намальованій сітці з пункту А у пункт В={B_1, B_2} де рух здійснюється зліва на право. Час їзди t_i для частини відрізків шляху, а також Pj зупинок (кружків) з особами, що очікують представлено в діаграмі. Всі пасажири хочуть в пункт В. Час перебування на зупинках є невагомо маленький.

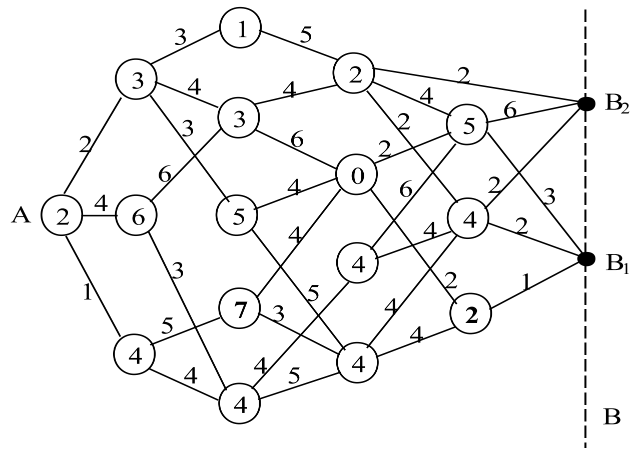
1.1. Визначити самий короткий за часом маршрут

а) з А у B_1

б) з А у В (ціль або B_1 або B_2).

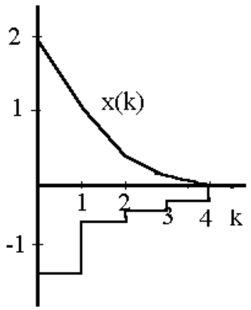
1.2. Визначити шлях при якому загальна кількість пасажирів доставлених в В буде максимальною.

1.3. Порівняти для випадків 1.1. та 1.2. відповідно кількість перевезених пасажирів і час їзди.



$$u(k) = -L(k) \cdot x(k)$$

$$S \to \infty : P(0) = \frac{34}{21} \Rightarrow J^* = \frac{1}{2} x_0^2 P(0) = 3.238$$



3.3

$$k \to \infty : \quad \overline{P} = \overline{P} + 1 - \frac{\overline{P}^2}{r + \overline{P}} \Rightarrow \overline{P}^2 - \overline{P} - r = 0 \Rightarrow \overline{P} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + r}$$

$$\overline{L} = \frac{\overline{P}}{r + \overline{P}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4r}}{2r + 1 + \sqrt{1 + 4r}};$$

Замкнутий регулюючий контур:

$$x(k+1) = \left(1 - \overline{L}\right) x(k) = \frac{2r}{\underbrace{1 + 2r + \sqrt{1 + 4r}}_{\Lambda(r)}} \cdot x(k)$$

$$0 \le \Lambda(r) < 1 \quad \forall r \ge 0$$

$$r = 0: \quad \overline{P} = \overline{L} = 1; \quad \Lambda = 0$$

$r \to \infty: \ \overline{P} \to \infty; \ \overline{L} \to 0; \ \Lambda \to 1$: без регулювання.

необхідні умови 1-го порядку для $L\left[\overline{x}(t), \overline{X}(t), \overline{\lambda}(t), \overline{v}, t_f\right]$ виконуються.

Умова Лежандра для локального мінімуму:

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial \overline{X}^2}\right|_* \ge 0 \quad \text{u.d.R.} \quad Y = \left\langle \delta \overline{X} \;\middle|\; \left.\frac{df}{d\overline{X}}\right|_* \delta \overline{X} = \overline{0} \right\rangle$$

Оптимальне управління динамічної системи з застосуванням принципу максимуму

1. Постановка задачі

$$J\left[\overline{x}(t), \overline{u}(t), t_f\right] = G\left[\overline{x}(t_f), t_f\right] + \int_0^{t_f} F\left[\overline{x}(t), \overline{u}(t), t\right] dt \to Min$$

враховуючи

$\dot{\overline{X}}(t) = \overline{f}\left[\overline{x}(t), \overline{u}(t), t\right] \quad 0 \le t \le t_f$ диференціальне рівняння стану

$\overline{x}(0) = \overline{x^0}$ стаціонарна початкова умова

$\overline{g}\left[\overline{x}(t_f),\ t_f\right] = \overline{0}$ узагальнена кінцева умова

t_f стаціонарний або вільний

$\overline{x} \in R^n; \ \overline{u} \in R^m; \ F, \overline{f} \in C^2$

2. Необхідні умови оптимальності

Функція Гамільтона

$$H\left[\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{\lambda}(t),,t\right] = F\left[\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right] + \bar{\lambda}(t)^T \bar{f}\left[\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right]$$

Необхідна умова для локального мінімуму:

λ(t) існує постійно, не перетворюється у нуль на кінцевому тривалому інтервалі, так що:

(1) $\bar{\mathbf{x}}' = \dfrac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}} = \bar{f}$ диференціальне рівняння стану

(2) $\bar{\lambda}' = -\dfrac{\partial H}{\partial \bar{x}} = -\dfrac{\partial F}{\partial \bar{x}} - \dfrac{\partial \overline{f^T}}{\partial \bar{x}}\bar{\lambda}$ рівняння для спряжених змінних

(3) $\dfrac{\partial H}{\partial \bar{u}} = \bar{0} = +\dfrac{\partial F}{\partial \bar{u}} + \dfrac{\partial \overline{f^T}}{\partial \bar{u}}\bar{\lambda}$

(4) $\left[\dfrac{\partial G}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{x}}\bar{v} - \bar{\lambda}\right]^T_{t_f} \delta \bar{x}_f + \left[H + \dfrac{\partial G}{\partial t_f} + \overline{v^T}\dfrac{\partial g}{\partial t_f}\right]_{t_f} \delta t_f = 0$

умова трансверсальності

(5) $\bar{x}(0) = \overline{x_0}$ початкова умова

$\bar{g}\left[\bar{x}(t_f),t_f\right] = \bar{0}$ кінцева умова

3. Обробка граничних умов

$T = 3;\ \lambda_1 = -t + c;\ \lambda_2 = -t + c;\ c = t_3\quad (H(t_f) = 0)$

3. Завдання.

3.1 $A = 1,\ B = 1,\ Q = 1,\ R = r \ge 0$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{A}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{B}\left[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{B}\right]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{A} = \frac{r + (r+1)P(k+1)}{r + P(k+1)};$$

$$L(k) = \left[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T P(k+1)\mathbf{B}\right]^{-1}\mathbf{B}^T P(k+1)\mathbf{A} = \frac{P(k+1)}{r + P(k+1)};\quad u(k) = -L(k)\cdot x(k)$$

3.2 $K = 4;\ r = 1;\ S \to \infty\ \ (\bar{x}(k) = \bar{0}\ \ \text{fest})$

k	4	3	2	1	0
P(k)	S	$\frac{1+2s}{1+s}$	$\frac{3+5s}{2+3s}$	$\frac{8+13s}{5+8s}$	$\frac{21+34}{13+21}$
L(k)		$\frac{s}{1+s}$	$\frac{1+2s}{2+3s}$	$\frac{3+5s}{5+8s}$	$\frac{8+13s}{13+21s}$
L(k) $S \to \infty$		1	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{13}{21}$
x(k)	0	0.095	0.286	0.762	2
u(k)		-0.095	-0.191	-0.476	-1.238

2. Випадок: q_1, q_2 функції часу. У цьому випадку не можна подати загальний сингулярний закон регулювання. У конкретній задачі можна однак прийти фізичними міркуваннями до конкретного рішення.

Як завжди: сингулярний випадок можна практично подати, в якому є

$$s_1 = s_2 + \varepsilon!$$

2.5 $\frac{s_2}{s_1} = 2 > 1;\quad E_s$ можливі наступні переключення

$$\{u_{\min}\}, \{u_{\max}\}, \{u_{\max}\}, \{u_{\min}\}.$$

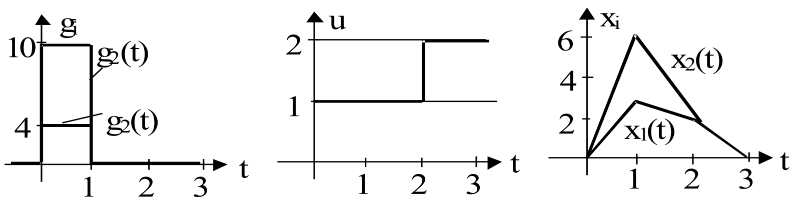
В відповідності з вказівкою вибираємо 3 послідовності переключення

$0 \le t \le 1:\quad u = u_{\min} = 1;\quad \mathbf{x}_1 = 3;\quad \mathbf{x}_2 = 6$

$1 \le t \le t_s:\quad u = u_{\min} = 1;\quad \mathbf{x}_1 = -1;\quad \mathbf{x}_2 = -4$

$t_s \le t \le t_e:\quad u = u_{\max} = 2;\quad \mathbf{x}_1 = -2;\quad \mathbf{x}_2 = -2$

Графічне рішення



n граничних умов через $\bar{x}(0) = \overline{x^0}$

a) Стаціонарний кінцевий час t_f

a1) Стаціонарний кінцевий стан

$$\bar{x}(t_f) = \overline{x_f}$$

a2) Вільний кінцевий стан

$$\bar{\lambda}(t_f) = \frac{\partial G}{\partial \bar{x}(t_f)}$$

a3) Узагальнені кінцеві умови

$$\bar{g}\left[\bar{x}(t_f)\right] = \bar{0}$$

$$\left[\frac{\partial G}{\partial \bar{x}(t_f)} - \bar{\lambda}(t_f) + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{x}(t_f)}\bar{v}\right] = \bar{0}$$

b) Вільний кінцевий час

b1) Стаціонарний кінцевий стан

$$\bar{x}(t_f) = \overline{x_f}$$

$$\left[H + \frac{\partial G}{\partial t_f}\right]_{t_f} = 0$$

b2) Вільний кінцевий стан

$$\bar{\lambda}(t_f) = \frac{\partial G}{\partial \bar{x}(t_f)}$$

$$\left[H + \frac{\partial G}{\partial t_f}\right]_{t_f} = 0$$

b3) Узагальнені кінцеві умови

$$\bar{g}\left[\bar{x}(t_f), t_f\right] = \bar{0}$$

$$\left[\frac{\partial G}{\partial \bar{x}(t_f)} - \bar{\lambda}(t_f) + \frac{\partial \overline{g^T}}{\partial \bar{x}(t_f)} \bar{v}\right] = \bar{0}$$

$$\left[H + \frac{\partial G}{\partial t_f} + \overline{v^T} \frac{\partial \bar{g}}{\partial t_f}\right]_{t_f} = 0$$

Сингулярне керування:

$$k \equiv 0 \Leftrightarrow t\left(1 - \frac{s_2}{s_1}\right) + \frac{s_2}{s_1} C_2 - C_1 \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow s_1 = s_2; \quad C_1 = C_2 = C$$

$$\mathbf{H}(t) = x_1 + x_2 + (-t + c) \cdot s_1 \left(\frac{q_1(t)}{s_1} + \frac{q_2(t)}{s_2} - 1\right)$$

Висновки: перехрестя в обидва напрямках має max потік

$s_1 = s_2$

1. Випадок: q_1, q_2 Константи для спостерігаємого інтервалу часу $\Rightarrow \mathbf{H}(t) \equiv 0$ так що

   $\bar{x}(0) = \bar{x}(t_e) \Rightarrow \frac{q_1}{s_1} + \frac{q_2}{s_2} = 1$ або $q_1 + q_2 = s_1 = s_2$ і

   $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = 0$: це Вказує на відсутність накопичення і світлофор так відрегульований, що кожний потік рухається відразу ж, може проїхати: $u = q_1$, але з допустимого діапазону!

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min} \;:\;\; a)\;\; \text{для}\;\; k>0 \quad u=u_{min} \\ u\in U \quad b)\;\; \text{для}\;\; k<0 \quad u=u_{max} \end{array}\right\} \text{регульоване}$$

управління

або $u=\frac{1}{2}u_{max}(1-\text{sign}k)+\frac{1}{2}u_{min}(1+\text{sign}k)$

c) для $k\equiv 0$ на інтервалі

$$0\le t_1\le t\le t_2\le t_e:\quad u=u_{\sin gular}$$

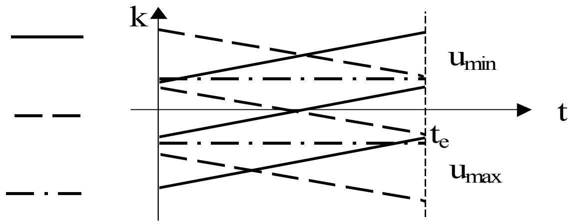
2.4

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1'=-1\Rightarrow \lambda_1(t)=-t+c_1 \\ \lambda_2'=-1\Rightarrow \lambda_2(t)=-t+c_2 \end{array}\right\}\Rightarrow k=t\left(1-\frac{s_2}{s_1}\right)+c'$$

$\frac{s_2}{s_1}<1$

$\frac{s_2}{s_1}>1$

$\frac{s_2}{s_1}=1$



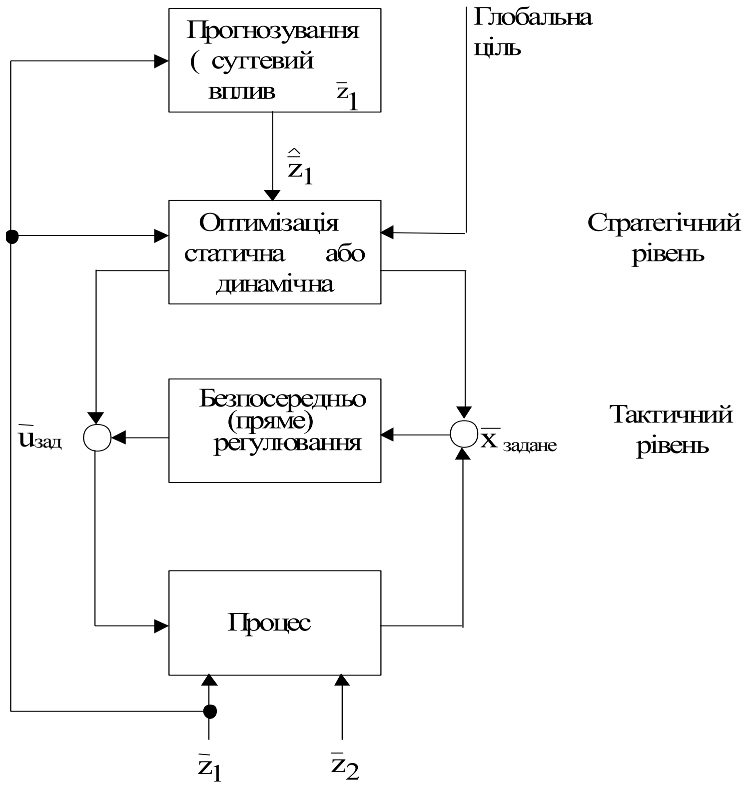
a) $\frac{s_1}{s_2}<1 \;\; u:\{u_{max}\},\ \{u_{max},u_{min}\},\ \{u_{min}\}$

b) $\frac{s_2}{s_1}>1 \;\; u:\{u_{min}\},\ \{u_{min},u_{max}\},\ \{u_{max}\}$

c) $\frac{s_2}{s_1}=1$ або $k\ne 0$ $(c'\ne 0)$ $u:\{u_{max}\},\{u_{min}\}$

Практичне використання оптимального управління

Багатостадійна концепція регулювання



стратегічний рівень	тактичний рівень
у даному випадку спрощено, наприклад також статична загальна модель процесу	у даному випадку лінеаризована динамічна модель процесу (частина)
тривалий горизонт прогноз більш суттєвий (повільніше) збурення	короткострокове реагування оптимізації на швидке збурення
вибір заданої траєкторії для ефективного ведення процесу	стабілізація заданої траєкторії (корекція / стабілізація)
on – line оптимізація	off – line оптимізація

У режимі реального часу

$x_0 = 2$

$J_u^* = 2$

$J_b^* = 2.72$

Завдання 2.

2.1 J = Загальний час очікування всіх учасників руху

2.2 2.2 Накопичування: $\mathbf{x}_1' > 0 \Rightarrow q_1 > u \rightarrow$ у напрямку 1;

$$q_2 > s_2 - \frac{s_2}{s_1} u \rightarrow \text{у напрямку 2.}$$

$$u = \frac{s_1 t_{1g}}{t_z}; \quad \frac{q_1}{s_1} > \frac{t_{1g}}{t_z}; \quad \frac{q_2}{s_2} > 1 - \frac{t_{1g}}{t_z} \Rightarrow \frac{q_1}{s_1} + \frac{q_2}{s_2} > 1:$$

умови для накопичування перехрестя

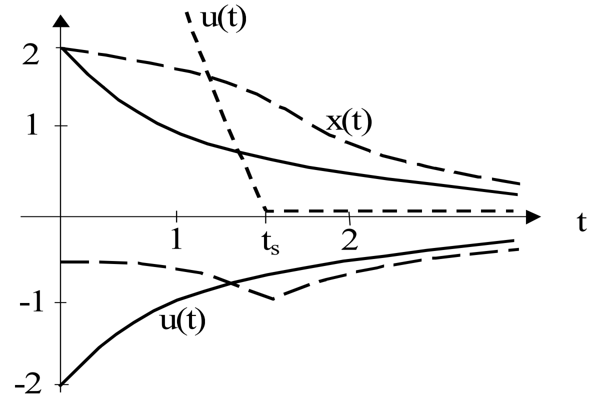
2.3 Оптимальний закон управління:

$$\mathbf{H} = x_1 + x_2 + \lambda_1 (q_1 - u) + \lambda_2 \left(q_2 - s_2 + \frac{s_2}{s_1} u \right) =$$

:

$$= \left(x_1 + x_2 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 - \lambda_2 s_2 \right) + u \underbrace{\left(-\lambda_1 + \frac{s_2}{s_1} \lambda_2 \right)}_{k}$$

1.3

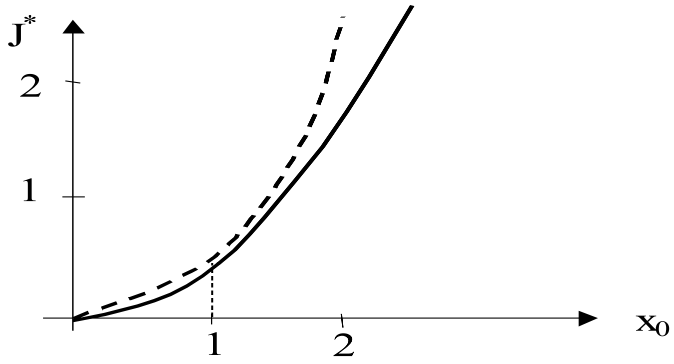


1.4 без обмежень: $J_u^* = \frac{1}{2}x_0^2 P(0) = \frac{1}{2}x_0^2; \quad P(0) = 1$

з обмеженнями:

$$J_b^* = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(x^2 + u^2)dt = \frac{1}{2}\int_0^{t_s}\left(x_0^2 - 2t + \frac{1}{x_0^2 - 2t}\right) + \frac{1}{2}x(t_s)^2 P(0) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(x_0^2 - 2t)^2 + \ln(x_0^2 - 2t)\right]_0^{t_s} = \frac{1}{8}(3 + x_0^4 + 4\ln x_0); \quad x_0 > 1$$



Лінійно – квадратична оптимізація

1. Постановка задачі.

$$\bar{\mathbf{x}}' = A(t)\bar{x} + B(t)\bar{u}\,; \; \bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

$$J = \frac{1}{2}\|\bar{x}(T)\|_S^2 + \frac{1}{2}\int_0^T \left[\|\bar{x}(t)\|_{Q(t)}^2 + \|\bar{u}(t)\|_{R(t)}^2\right]dt \to \min$$

$\bar{x} \in \mathbf{R}^n$; $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{R}^m$; **T** стаціонарне; $\bar{x}(\mathbf{T})$ відкрите; $\mathbf{S} \geq 0$;

$\mathbf{Q}(t) \geq 0$; $\mathbf{R}(t) \geq 0$

2. Рішення.

Оптимальний закон регулювання: $\bar{u}(t) = -K(t) \cdot \bar{x}(t)$

причому $K = R^{-1}B^T P$ та P з диференціального рівняння Ріккаті у матричній формі:

$\mathbf{P}' = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q$ з граничною умовою $\mathbf{P}(T) = \mathbf{S}$

3. Дискусія.

Вважається: **P**(t) симетрична; $\mathbf{P}(t) \geq 0$;

$$J^* = \frac{1}{2}(\bar{x}^0)^T P(0)\bar{x}^0 = \frac{1}{2}\|\bar{x}^0\|_{P(0)}^2$$

Реалізація закону:

Диференціальне рівняння контуру керування :

$$\bar{\mathbf{x}}' = (A - BR^{-1}B^T P)\bar{x}\,; \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

4. <u>Закон часових інваріант.</u>

Важливий частинний випадок: **A, B, Q, R** часово інваріантні; **S**=0

$$\mathbf{T} \to \infty$$

$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ керовані

у даному випадку $[\mathbf{A}, \mathbf{D}]$ спостережувані при чому

$$\mathbf{D}^T\mathbf{D} = \mathbf{Q}$$

звідки оптимальний закон: $\bar{u}(t) = -\overline{\mathbf{K}}\bar{x}(t)$ при чому

$$\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\overline{\mathbf{P}}$$

$t_s \le t < \infty \;\Rightarrow \mu = 0$:

$$\lambda' = -x = e^{-(t-t_s)} \Rightarrow \lambda(t) = e^{-(t-t_s)} + c$$

$\lambda(\infty) = 0$: ($x(\infty)$) $\Rightarrow c = 0$;

$$\lambda = e^{-(t-t_s)} \;\Rightarrow \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} = u + \lambda - \mu = 0$$

$$\frac{\lambda_0}{x_0} - \frac{x_0^2 - 1}{2} - \frac{1}{2x_0^2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1 + x_0^4}{2x_0}$$

$$\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x_0^2 - 2t\right)^{3/2} + \frac{1}{2}\left(x_0^2 - 2t\right)^{-1/2} \\ e^{-(t-t_s)} \end{cases} \text{ и } \mu = u + \lambda = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x_0^2 - 2t\right)^{3/2} - \frac{1}{2}\left(x_0^2 - 2t\right)^{-1/2} \\ 0 \end{cases}$$

$$\mu(t) > 0, \quad 0 \le t < t_s$$

в) $\min\limits_{u \in U} H : \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} = 0$ стало у б) вже зважаючи; умови

тривалості $\min\limits_{u \in U} H$ виконується так: $\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial u^2} = 1 > 0$

Всі необхідні умови виконуються $\Rightarrow$ передбачуваний закон регулювання = оптимальному закону регулювання для задачі з обмеженнями.

$$\Rightarrow x \cdot dx = -dt \Rightarrow \frac{x^2}{2} = -t + c'$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{c - 2t}; \quad x(0) = x_0 \Rightarrow c = x_0^2$$

$$x(t_s) = 1 \Rightarrow t_s = \frac{x_0^2 - 1}{2}$$

$t_s \le t < \infty: \quad u = -x; \quad \mathbf{x}' = -x; \quad x(t_s) = 1 \Rightarrow x = e^{-(t - t_s)}$

Скорочення: $\boldsymbol{\tau} = \sqrt{x_0^2 - 2t}; \quad \boldsymbol{\tau}_s = \sqrt{x_0^2 - 2t_s}$

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{x_0^2 - 2t} \\ e^{-(t - t_s)} \end{cases} \qquad u(t) = \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{x_0^2 - 2t}} & 0 \le t \le t_s \\ -e^{-(t - t_s)} & t_s \le t < \infty \end{cases}; \qquad t_s = \frac{(x_0^2 - 1)}{2}$$

б) $\widetilde{H} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}u^2 + \lambda u + \mu(-\frac{1}{x} - u)$

$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial u} = 0 = u + \lambda - \mu \Rightarrow \mu = u + \lambda; \quad \boldsymbol{\lambda}' = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x} = -x - \frac{\mu}{x^2}$$

необхідні умови:

$$0 \le t \le t_s: \quad \boldsymbol{\lambda}' = -\tau + \frac{1}{\tau^3} - \frac{\lambda}{\tau^2} = a(t) + b(t)\lambda$$

$$\lambda(t) = \tau\left(\frac{\lambda_0}{x_0} - t - \frac{1}{2x_0^2}\right) + \frac{1}{2\tau}$$

і $\overline{\mathbf{P}}$ з стаціонарного рівняння Ріккаті:

$$\overline{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\overline{\mathbf{P}} - \overline{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} = 0; \; \overline{\mathbf{P}} \ge 0$$

5. Приклад.

$$\mathbf{x}' = u; \; x(0) = x_0; \; x(T) = x_f = 0;$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T (x^2 + ru^2)dt; \; r > 0$$

6. Автоматизоване проектування.

о) Вимоги встановлюють, наприклад, бажаний час перехідного процесу, перерегулювання, обмеження величин стану та регулювання та інше.

I) **A** та **B** вводяться

II) Початковий вибір **Q, R,** наприклад, **Q=R=I.**

чи $\mathbf{Q} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\hat{x}_i^2}\right)$, $\mathbf{R} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\hat{u}_i^2}\right)$ причому $\hat{x}$ - номінальні або максимальні показники

або $\mathbf{Q} = \mathbf{R}; \mathbf{R} = \rho\,\mathrm{I}$

чи їх комбінації.

III) $\overline{\mathbf{P}}$ і $\overline{\mathbf{K}}$ розраховуємо

IV) Моделюємо контур керування; $\overline{u}(t), \overline{x}(t)$ зображаємо графічно чи оцінюємо у відношенні з вимогами, якщо вимоги виконуються, стоп.

V) **Q, R** цілеспрямовано модифікуємо, щоб виконувалися вимоги.

VI) Ідемо на (III).

7. Заданий запас стійкості.

Додаткова вимога при постановці задачі 4: $\mathrm{Re}\{\Lambda_{RK,i}\} < -\alpha$ $\forall i$

Може бути досягнута через модифікований функціонал якості $J = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{2\alpha t}\left(\|\bar{x}\|_Q^2 + \|\bar{u}\|_R^2\right)dt \to \min$

Рішення: $\bar{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\overline{\mathbf{P}}_\alpha\bar{x}(t)$

$\overline{\mathbf{P}}_\alpha$ рішення стаціонарного рівняння Ріккаті з $A_\alpha = A + \alpha I$

8. Регулювання вихідної величини.

$\overline{\mathbf{x}}' = A(t)\bar{x} + B(t)\bar{u}$; $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$

$\bar{y} = \mathbf{C}(t)\bar{x}$

$\bar{y} \in \mathbf{R}^q$; $q \le n$; [**A**, **C**] спостерігаємі

від r шляхом обчислення стаціонарного рівняння Ріккаті.

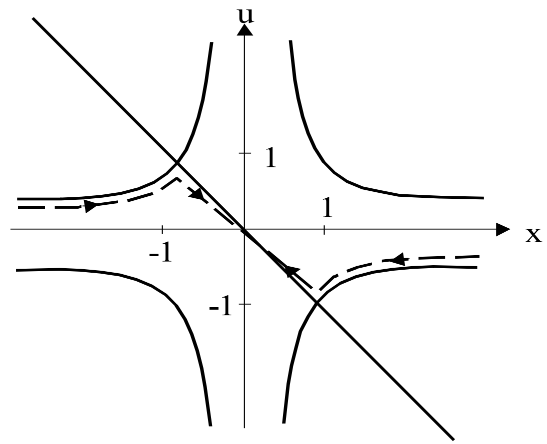
Вкажіть систему рівнянь замкнутого контуру управління (і обміркуйте для випадку r = 0; r → ∞).

Рішення

1. Завдання.

1.1 Передбачувана траєкторія лежить ближче ніж необмежена оптимальна траєкторія.

Закон регулювання: $u = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & |x| \ge 1 \\ -x & |x| \le 1 \end{cases}$



1.2 Необхідні умови:

а) Диференціальне рівняння (час переключення t_s)

$$0 \le t \le t_s: \quad u = -\frac{1}{x}; \quad \mathbf{x}' = u = -\frac{1}{x}$$

оптимальний вигляд x_1^*, x_2^*, u^* і розрахуйте тривалість процесу t_f .

Вказівка: покажіть, що для руху переключення перехідний період t_s=2.

Завдання 3.

Для лінійних, дискретних процесів

$$x(k+1) = x(k) + u(k); \qquad x(0) = x^0$$

найдіть оптимальний регулятор, що мінімізує функціонал якості

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{S}\ x(к)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1}\left[x(k)^2 + r\cdot u(k)^2\right]; \quad r \geq 0; \quad \mathbf{S} \geq 0$$

3.1 Складіть диференціальне рівняння Ріккаті у матричній формі $\mathbf{P}(k)$ і оберненій матриці $\mathbf{L}(k)$.

3.2 Розрахуйте $\mathbf{P}(k)$, $\mathbf{L}(k)$ для випадку K=4, r=1 у залежності від $\mathbf{S}$. Розрахуйте і зобразіть характер u(k), x(k) для $\mathbf{S} \to \infty$, x^0 = 2. Розрахуйте оптимальну величину функціонала якості.

3.3. Тепер нехай $\mathbf{K} \to \infty$. Розрахуйте стаціонарну величину матриці Ріккаті $\mathbf{P}$ і оберненої матриці $\mathbf{L}$ у залежності

$$J = \frac{1}{2}\|\bar{y}(T)\|^2_{\tilde{S}} + \frac{1}{2}\int_0^T\left[\|\bar{y}(t)\|^2_{\tilde{Q}(t)} + \|\bar{u}(t)\|^2_{R(t)}\right]dt \to \min; \quad \tilde{\mathbf{S}} \geq 0,$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t) \geq 0, \ \mathbf{R}(t) > 0$$

Рішення: установимо $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^\mathbf{T}\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{C}$, $\mathbf{S} = \mathbf{C}^\mathbf{T}\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{C}$ і вирішуємо стандартну **ЛК** – задачу для **A, B, S, Q, R**.

9. Зниження збурюючого впливу.

а) відомий збурюючий вплив

$$\bar{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}(t)\bar{x} + \mathbf{B}(t)\bar{u} + \bar{z}(t)$$

$\bar{z}(t), \ 0 \leq t \leq T$: відомий збурюючий вплив; J я у 1.

Рішення: $\bar{u} = -\mathbf{K}(t)\bar{x}(t) + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\bar{p}(t)$ з K(t) як у 2. И $\bar{p}$ з

$$\bar{\mathbf{p}}' + \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{P}\right)^T\bar{p} + \mathbf{P}\bar{z} = 0; \ \bar{p}(T) = \bar{0}$$

б) Вимірюємий збурюючий вплив

Випадок часових інваріант а): усі припущення з 4 виконуються і $\bar{z}(t) = \bar{z}' = \text{const}$

Рішення: $\bar{u}(t) = -\bar{\mathbf{K}}\bar{x}(t) + \bar{\mathbf{K}}_z\bar{z}$

при чому $\bar{\mathbf{K}}_\mathbf{z} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{P}}\right)^{-T}\bar{\mathbf{P}}$ і $\bar{\mathbf{K}}, \bar{\mathbf{P}}$ як у 4.

Стаціонарне рішення: $\bar{x}' = -\mathbf{A}_{RK}^{-1}\left(\mathbf{E} + \overline{\mathbf{P}}\mathbf{A}_{RK}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\right)^{T}\bar{z}$

при чому $\mathbf{A}_{RK} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\overline{\mathbf{P}}$

в) <u>відома модель величини завади (збурюючих впливів)</u>

така ж модель як з 9а), але $\bar{z}(t)$ - невідомо; замість цього модель збурюючого впливу

$\bar{\mathbf{z}}' = F(t) \cdot \bar{z}(t)$ з $\mathbf{F}(t)$ відома і $\bar{z}(t)$ - вимірюємо

Розширена постановка задачі:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}' \\ \bar{\mathbf{z}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\bar{u}; \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0; \quad \widetilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} > 0;$$

$$\widetilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0;$$

оптимальний контур регулювання:

$$\bar{\bar{u}}(t) = \bar{u}(t) = -\widetilde{K}(t)\bar{\bar{x}}(t) = -\widetilde{K}_x(t)\bar{x}(t) - \widetilde{K}_z(t)\bar{z}(t)$$

10. <u>Оптимальне слідкуюче регулювання</u>.

$$J = \frac{1}{2}\left\|\bar{x}(T) - \bar{x}_S(T)\right\|_S^2 + \frac{1}{2}\int_0^T\left[\left\|\bar{x}(t) - \bar{x}_S(t)\right\|_{Q(t)}^2 + \left\|\bar{u}(t) - \bar{u}_S(t)\right\|_{R(t)}^2\right]dt$$

$\mathbf{Q}(t)$, $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{S}$ і диференціальне рівняння процесу як у 1.

<u>Рішення:</u> $\bar{u}(t) = \bar{u}_S(t) - K(t)\left[\bar{x} - \bar{x}_S(t)\right] + \bar{k}(t)$

Тривалість зеленої фази можна вибрати з даного діапазону: $0 < u_{min} \leq u$

Система світлофору повинна бути керована таким чином, щоб функціонал якості

$$J = \int_0^{t_e}(x_1(t) + x_2(t))dt \qquad (t_e \text{ не задана})$$

був мінімальним. Граничними умовами візьмемо:

$\bar{x}(0) = \bar{0}; \quad \bar{x}(t_f) = \bar{0}$

2.1 Що наглядно означає функціонал якості?

2.2 Вкажіть умови, при котрих потік руху перед світлофором буде завантаженим.

2.3 Розрахуйте оптимальний закон управління за допомогою принципу максимуму Понтрягіна.

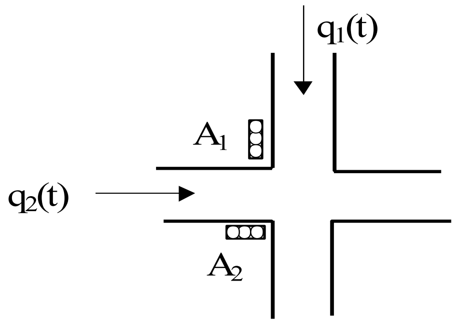
2.4 Обміркуйте характер величини управління у залежності від максимальної витрати s_1 й s_2 (регулярне, сингулярне управління).

2.5 Подайте для

$$u_{min} = 1; \quad s_1 = 3; \quad q_1(t) = 40(t-0) - 40(t-1)$$
$$u_{max} = 2; \quad s_2 = 6; \quad q_2(t) = 100(t-0) - 100(t-1)$$

Завдання 2.

Розвиток черги на перехресті з управлінням світлофором і двома зустрічними потоками руху $q_1(t)$ й $q_2(t)$ при неперервному спостеріганні можна описати наступним чином:



$$\mathbf{x}_1 = q_1(t) - u$$

$$\mathbf{x}_2 = q_2(t) - s_2 + \frac{s_2}{s_1}u$$

Де:

x_i: шлях гальмування перед світлофором A_j

s_i: максимальна витрата через перехрестя при повному звільненні потоку руху у напрямку i

$u = \frac{s_1 t_{1g}}{t_z}$: величина управління; (t_{1g}: триває зелене світло для напрямку 1)

(t_z : триває цикл включення світлофору)

11. Регулювання з інтегральним оберненим зв'язком.

Усі умови з 4 задані (тимчасово інваріантний випадок)

а) Стаціонарна точність ЛК – регулятора.

$\bar{x}' = \mathbf{A}\bar{x} + \mathbf{B}\bar{u} + \mathbf{D}\bar{z}$;стаціонар:

$$\bar{x}' = -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\bar{\mathbf{P}})^{-1}\mathbf{D}\bar{z} \neq \bar{0}$$

$$\bar{u} = -\bar{\mathbf{K}}\bar{x} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\bar{\mathbf{P}})^{-1}\mathbf{D}\bar{z}$$

б) Інтегральний обернений зв'язок

Штучно розширюється ЛК – задача:

(1) $\bar{\mathbf{x}}'(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t); \bar{x}(0) = \bar{x}_0$

(2) $\bar{\boldsymbol{X}}'(t) = H\bar{x}(t); \bar{X}(0) = \bar{X}_0$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\|\bar{x}(t)\|_Q^2 + \|\bar{X}(t)\|_W^2 + \|\bar{u}(t)\|_R^2\right]dt \to \min$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{H} & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}; \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{W} \end{bmatrix}$$

Вважається: $\left[\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}\right]$ керовані $\Leftrightarrow$ $\left[\mathbf{A}, \mathbf{B}\right]$ керовані і ранг

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{H} & 0 \end{bmatrix} = n + q$$

Ранг $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{H} & 0 \end{bmatrix} = n + q \Rightarrow q \leq m$ і ранг $\mathbf{H}$=q

Оптимальне рішення: $\overline{u}(t) = -\overline{\mathbf{K}}_p \overline{x}(t) - \overline{\mathbf{K}}_I \overline{X}(t)$

При чому $\overline{\mathbf{K}}_p = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\widetilde{\mathbf{P}}_{11}; \overline{\mathbf{K}}_I = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\widetilde{\mathbf{P}}_{12}$

в) <u>Стаціонарна точність при ЛКІ – регулюванні</u>

$$\overline{\mathbf{x}}'(t) = \mathbf{A}\overline{x} + \mathbf{B}\overline{u} + \mathbf{D}\overline{z}$$

Стаціонарно: $\mathbf{A}\overline{x} + \mathbf{B}\overline{u} + \mathbf{D}\overline{z} = \overline{0}\ (\overline{1});\ \mathbf{H}\overline{x} = \overline{0}\ (\overline{2});$

$$\overline{u} + \overline{\mathbf{K}}_p\overline{x} + \mathbf{K}_1\overline{X} = \overline{0}\ (\overline{3})$$

<u>Випадок 1:</u> підпростір **D** $\subset$ підпростір **B**: $\overline{x} = \overline{0}$

<u>Випадок 2:</u> підпростір **D** $\not\subset$ підпростір **B**: $\mathbf{H}\overline{x} = \overline{0}$

г) <u>ЛКІ – Регулювання</u>

$$\overline{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}\overline{x} + \mathbf{B}\overline{u};\ \overline{y} = C\overline{x}$$

ЛКІ – регулювання: С виконує усі вимоги для Н

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\|\overline{x}(t)\|_Q^2 + \|\overline{X}(t)\|_W^2 + \|\overline{u}(t)\|_R^2\right]dt \to \min \text{ c}$$

$$\overline{\boldsymbol{X}}' = \overline{y} = C\overline{x}$$

<u>Рішення (згідно б)):</u> $\overline{u}(t) = -\overline{K}_p\overline{x}(t) - \int_0^t \overline{K}_I\overline{y}(\tau)d\tau$

<u>Завдання 1.</u>

Спостерігаємо задачу динамічної оптимізації

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(x^2 + u^2)dt \quad \min$$

$$\mathbf{x}' = u;\quad x(0) = x_0;\quad |u| \le \frac{1}{|x|}$$

В лекції для такої ж задачі вивели оптимальний закон регулювання u=- x без обмежень на керування. Беручи до уваги це рішення припустимо для обмеженої задачі наступний оптимізаційний закон регулювання

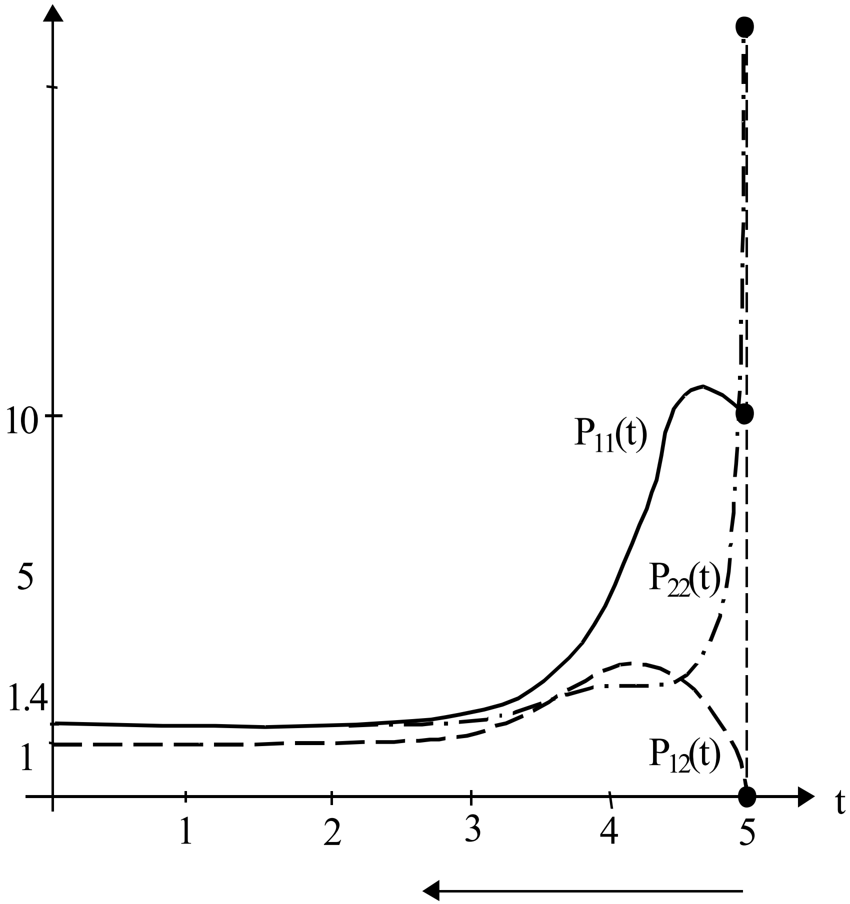
$$u = \begin{cases} \dfrac{-1}{x}, & |x| \ge 1 \\ -x, & |x| \le 1 \end{cases}$$

1.1 Намалюйте в (u, x) – площині додаткові умови у формі нерівностей, як і оптимальні траєкторії для обмеженої та необмеженої задачі. Обгрунтуйте ці припущення.

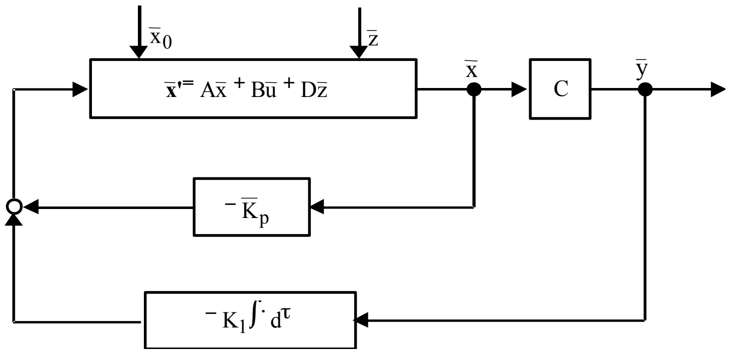
1.2 Тепер нехай $x_0 > 1$. Покажіть, що передбачуваний оптимальний закон регулювання фактично виконує усі необхідні умови оптимальності.

1.3 Намалюйте оптимальний процес x(t), u(t) для обмеженої та необмеженої задачі для $x_0 = 2$.

1.4 Розрахуйте і порівняйте мінімальну величину функціоналу якості для обмеженої та необмеженої задачі.



Рішення у цьому напрямку



д)

Характеристика великого сигналу: $\overline{\mathbf{X}}' = \bar{f}(\overline{X},\overline{U})$;

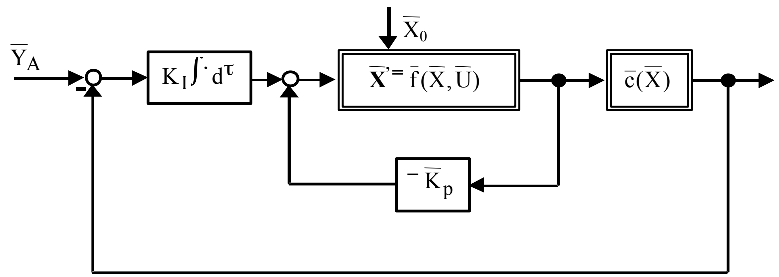
$\overline{Y} = \bar{c}(\overline{X})$

Малий сигнал: $\bar{x} = \overline{X} - \overline{X}_A$, $\bar{u} = \overline{U} - \overline{U}_A$, $\bar{y} = \overline{Y} - \overline{Y}_A$

ЛК – регулювання: $\overline{U}(t) = \overline{U}_A - \overline{K}\left[\overline{X} - \overline{X}_A\right]$

ЛКІ – регулювання:

$$\overline{U}(t) = -\overline{K}_p\overline{X}(t) - \int_0^t \overline{K}_I\left[\overline{Y}(\tau) - \overline{Y}_A\right]d\tau$$



e) Приклад:

$$\mathbf{x}_1' = x_1 + x_2 + \bar{z}_1;\ \mathbf{x}_2' = u + \bar{z}_2$$

ЛК – регулювання: $u = -\bar{K}_1 x_1 - \bar{K}_2 x_2$

ЛКІ – регулювання: (i)

$$y = x_1 \Rightarrow u = -\bar{K}_{P1}^{(i)} x_1 - \bar{K}_{P2}^{(i)} x_2 - \int_0^t \bar{K}_I^{(i)} x_1(\tau)d\tau \text{ (ii)}$$

$$y = x_2 \Rightarrow u = -\bar{K}_{P1}^{(ii)} x_1 - \bar{K}_{P2}^{(ii)} x_2 - \int_0^t \bar{K}_I^{(ii)} x_2(\tau)d\tau$$

	ЛК			ЛКІ (i)			ЛКІ (ii)		
	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{u}$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{u}$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{u}$
$\bar{z}_1 \neq 0$ $\bar{z}_2 \neq 0$	$\frac{\bar{z}_1\bar{K}_2 + \bar{z}_2}{k}$	$\frac{\bar{z}_1\bar{K}_2 + \bar{z}_2}{-k}$	$-\bar{z}_2$	0	$-\bar{z}_1$	$-\bar{z}_2$	$-\bar{z}_1$	0	$-\bar{z}_2$
$\bar{z}_1 = 0$ $\bar{z}_2 \neq 0$	$\frac{\bar{z}_2}{k}$	$-\frac{\bar{z}_2}{k}$	$-\bar{z}_2$	0	0	$-\bar{z}_2$	0	0	$-\bar{z}_2$
$\bar{z}_1 \neq 0$ $\bar{z}_2 = 0$	$\frac{\bar{z}_1\bar{K}_2}{k}$	$-\frac{\bar{z}_1\bar{K}_1}{k}$	0	0	0	0	0	0	0

$$k = \bar{K}_1 - \bar{K}_2$$

Через підстановку (зміну знаку):

$$\dot{\mathbf{p}}_{11}'(\tau) = -p_{12}'^2 + q^2$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{12}'(\tau) = p_{11}' - p_{12}'p_{22}' \qquad \text{початкові умови}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{22}'(\tau) = 2p_{12}' - p_{22}'^2$$

$$p_{11}'(\tau = 0) = p_{11}(t = T) = s_1$$

$$p_{12}'(\tau = 0) = p_{12}(t = T) = 0$$

$$p_{22}'(\tau = 0) = p_{22}(t = T) = s_2$$

Рішення на цифровій обчислювальній машині (стандартна задача)

2.4.4.

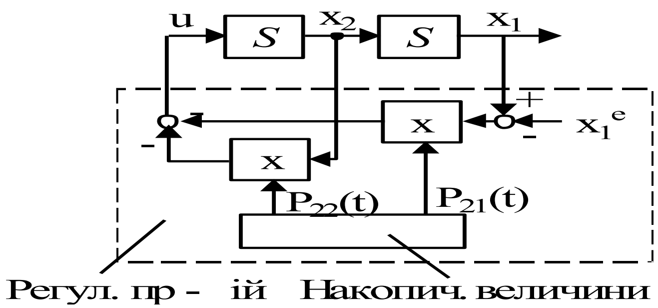
$q = 1$

$s_1 = p_{11}'(0) = 10$

$s_2 = p_{22}'(0) = 20$

$p_{12}' = 0$

2.4.1. Оптимальний закон регулювання:



$$u^*(t,\bar{z}) = -R^{-1} \cdot B^T \cdot P(t) \cdot \bar{z}$$

$$u^*(t,\bar{z}) = -1\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p_{11}(t) & p_{12}(t)\\ p_{21}(t) & p_{22}(t)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}$$

$$u^*(t,\bar{z}) = -p_{21}(t)\cdot z_1 - p_{22}(t)\cdot z_2$$

$$\underline{u^*(t,\bar{x}) = -p_{21}(t)\cdot\left(x_1 - x_1^e\right)\cdot z_1 - p_{22}(t)\cdot x_2}$$

2.4.2.

A, **B**, **Q**, **R**, як у 1: $\mathbf{S} = \begin{bmatrix}s_1 & 0\\ 0 & s_2\end{bmatrix}$; $\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix}p_{11}(t) & p_{12}(t)\\ p_{21}(t) & p_{22}(t)\end{bmatrix}$

Підставляємо у: $\mathbf{P}' = -\mathbf{PA} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - Q$ (Рівняння Ріккаті)

Множимо і $p_{12} = p_{21}$ підставимо $(\mathbf{P} = \mathbf{P}^T) \to$

$$\left\|\begin{array}{l}\mathbf{p}'_{11} = p_{12}^2 - q^2\\ \mathbf{p}'_{12} = -p_{11} + p_{12}p_{22}\\ \mathbf{p}'_{22} = -2p_{12} + p_{22}^2\end{array}\right. \quad \text{граничные условия:}\ P(T) = S + \begin{bmatrix}s_1 & 0\\ 0 & s_2\end{bmatrix}$$

$$\to p_{11}(T) = s_1;\quad p_{12}(T) = 0;\quad p_{22}(T) = s_2$$

2.4.3. Змінимо задачу з кінцевими величинами на задачу з початковими величинами.

Змінимо час: $\tau = T - t \;\to\; d\tau = -dt$

Динамічне програмування

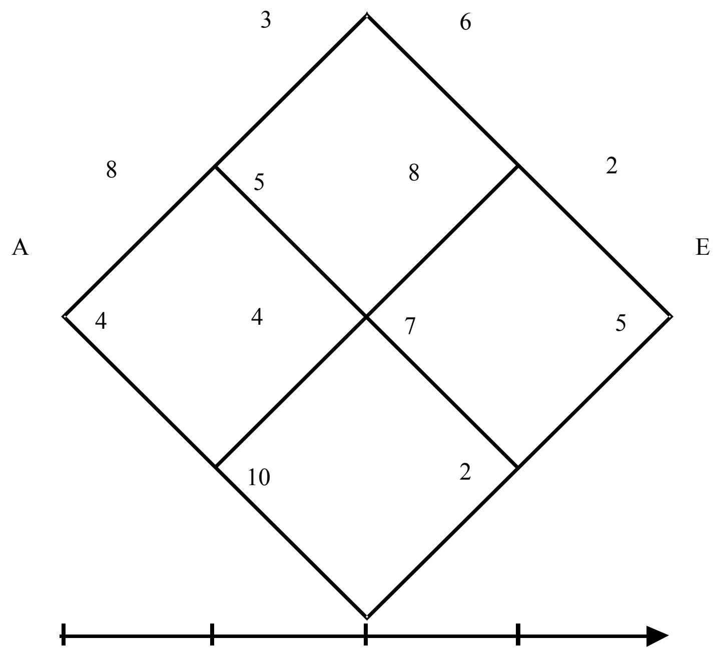
1. <u>Принцип оптимальності.</u>

   Спостерігають проблему оптимального управління (безперервного або дискретного);

   Якщо траєкторія рішення x існує, тоді вона має наступні властивості:

   кожна наступна траєкторія оптимальна відносно відповідного проміжного стану.

2. <u>Застосування у комбінаторній задачі.</u>



Кількість гілок у квадратурній стороні	n	2	3	5	10
Кількість шляхів	$\frac{(2n)!}{(n!)^2}$	6	20	252	185000
Кількість оцінок рішення	$(n+1)^2$	8	15	35	120

Застосування у часово дискретної задачі оптимізації.

$$J_k = G\left[\bar{x}(K)\right] + \sum_{\kappa=k}^{K-1} \Phi\left[\bar{x}(\kappa), \bar{u}(\kappa), \kappa\right]; \; V_k(\bar{x}) = J_k^*$$

а) рекурентна формула Беллмана

$$V_k\left[\bar{x}(k)\right] = \underset{\bar{u}\in U}{\mathrm{Min}} \left\{\Phi\left[\bar{x}(k), \bar{u}(k), k\right] + V_{k+1}\left[\bar{f}\left[\bar{x}(k), \bar{u}(k), k\right]\right]\right\}$$

1. Рівняння Гамільтона – Якобі – Беллмана

Спостерігаємо неперервну задачу оптимального керування

$$J_t = \mathbf{G}\left[\bar{x}(t_f), t_f\right] + \int_t^{t_f} \mathbf{\Phi}(\bar{x}, \bar{u}, \tau)\,d\tau; \; V(\bar{x}, t) = J_t^*$$

Умова: $V(\bar{x}, t) \in C^1$

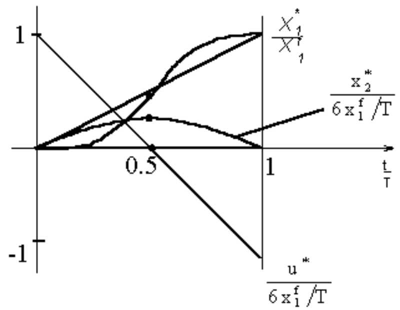
$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \underset{\bar{u}\in U}{\mathrm{Min}} \left\{\mathbf{\Phi}(\bar{x}, \bar{u}, t) + \frac{\partial V^T}{\partial \bar{x}} \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t)\right\}$$

Гранична умова: $V\left[\bar{x}(t_f), t_f\right] = G\left[\bar{x}(t_f), t_f\right]$

Узгодження з граничними значеннями (тобто визначення констант інтегрування c_1, c_2, c_3, c_4)

$$\left.\begin{aligned} x_1(0) &= 0 = c_4 \\ x_2(0) &= 0 = c_3 \\ x_1(T) &= x_1^f = \tfrac{1}{6}c_1T^3 + \tfrac{1}{2}c_2T^2 + c_3T + c_4 \\ x_2(T) &= \sigma = \tfrac{1}{2}c_1T^2 + c_2T + c_3 \end{aligned}\right\} \quad c_1 = -\frac{12x_1^f}{T^3}; \quad c_3 = 0; \quad c_2 = \frac{6x_1^f}{T^2}; \quad c_4 = 0$$

$$\rightarrow \left\| \begin{aligned} u^*(t) &= 6\frac{x_1^f}{T^2}\left(1 - 2\frac{t}{T}\right) \\ x_1^*(t) &= x_1^f \frac{t^2}{T^2}\left(3 - 2\frac{t}{T}\right) \\ x_2^*(t) &= 6\frac{x_1^f}{T^2} t\left(1 - \frac{t}{T}\right) \end{aligned} \right.$$



2.3.4.

$$J^* = \frac{1}{2}\int_0^T u^{*2}\,dt = 6\frac{x_1^{f2}}{T^3}$$

2.4.

$t_f = T < \infty; \quad x_1^f =$ вільно, але застосовується в оптимізації

$(s_1 \neq 0, \; s_2 \neq 0)$

зміна змінних як у 1.

2.2.4.

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{x}_1^{*\prime} = x_2^* \\ x_2^{*\prime} = u^*\end{array}\right\rangle \quad \mathbf{X}_1^{*\prime\prime} + \sqrt{2a}\,\mathbf{x}_1^{*\prime} + qx_1^* = qx^e; \quad \frac{x_1^*(p)}{x_1^e(p)} = \frac{q}{p^2 + \sqrt{2qp}} + q \qquad (PT_2)$$

Власне значення: $\sqrt{\dfrac{q}{2}}(-1 \pm i)$

2.3.1.

$$t_e = T < \infty; \quad x_1^e = \text{постоянная}; \quad q = \sigma \to J = \frac{1}{2}\int_0^T u^2 dt \to \min$$

“Мінімізація втрат енергії при заданій тривалості процесуT<∞”

2.3.2. Оптимальний закон управління.

Функція Гамільтона: $\mathbf{H} = \dfrac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$

Необхідні умови: $\bar{\mathbf{x}} = \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial \bar{\lambda}}; \quad \bar{\boldsymbol{\lambda}} = -\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial \bar{x}}; \quad \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial u} = 0 \quad \to$

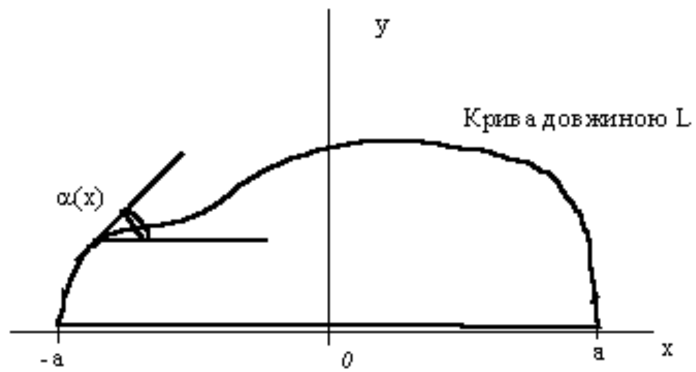
$$\left.\begin{array}{l} 1\ \mathbf{x}_1' = x_2 \\ 2\ \mathbf{x}_2' = u \\ 3\ \boldsymbol{\lambda}_1' = \sigma \\ 4\ \boldsymbol{\lambda}_2' = -\lambda_1 \\ 5\ u + \lambda_2 = \sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{из } 3: \lambda_1 = c_1 \\ \left.\begin{array}{l} 4: \lambda_2 = -c_1 t - c_2 \\ \text{из } 5: u = -\lambda_2 \end{array}\right\} u = c_1 t + c_2 \end{array} \begin{array}{l} \text{в } 2 \quad x_2 = \frac{1}{2}c_1 t^2 + c_2 t + c_3 \\ \text{в } 1\ x_1 = \frac{1}{6}c_1 t^3 + \frac{1}{2}c_2 t^2 + c_3 t + c_4 \end{array}$$

1. Завдання.

На одному рівні повинна знаходитись крива довжиною L з двома кінцями відрізка довжиною 2a < L з'єднаними один з одним (дивіться малюнок). Направити форму кривої так, щоб крива була направлена так, що поверхня між кривою і відрізком буде максимальною.

Доповнення. Сформулюйте проблему динамічної оптимізації з величинами, які складаються з l(x) (шлях кривої) та y(x) і керуючої величини α(x) - кут нахилу кривої для максимізації поверхні.

$$F = \int_{-a}^{a} y\, dx$$



2. Завдання.

$x_1' = x_2$ c: u': нормувальна сила тяги

$x_2' = u$ p: нормувальна сила тяжіння (const)

$u = u' - p$ x_1: висота підйому

x_2: швидкість підйому

Головна задача полягає у тому, щоби перевести підйомник з початкового стану $\left\{x_1(0) = x_1^0 = 0;\ x_2(0) = x_2^0 = 0\right\}$ коли час t = 0 у кінцевий стан $\left\{x_1(t_f) = x_1^f;\ x_2(t_f) = x_2^f = 0\right\}$ коли час $t = t_f$ так, щоб функціонал якості

$$J = \frac{1}{2}\left[s_1(x_1^f - x_1(t_f))^2 + s_2 x_2^2(t_f)\right] + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[q^2(x_1^f - x_1(t))^2 + u^2\right]dt; \qquad \begin{matrix} s_1 \ge 0 \\ s_2 \ge 0 \\ q \ge 0 \end{matrix}$$

був мінімізований.

Рішення наступних підзавдань можна обчислити, наскільки це необхідно, за допомогою диференціальних рівнянь Ріккаті.

2.1. Перетворіть змінні x_1 і x_2, так, щоб одержати "формулювання стандартної проблеми". Назвіть нові змінні z_1 і z_2.

підставляємо у: $PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$ (замість рівняння Ріккаті),

перемножуємо $p_{12} = p_{21}$ і підставимо ($P = P^T$) $\rightarrow$

$$\begin{matrix} -p_{12}^2 + q^2 = 0 \\ p_{11} - p_{12}p_{21} = 0 \rightarrow \\ 2p_{12} - p_{22}^2 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} p_{11} = +q\sqrt{2a} \\ p_{12} = +q \\ p_{22} = +\sqrt{2q} \end{matrix}$$

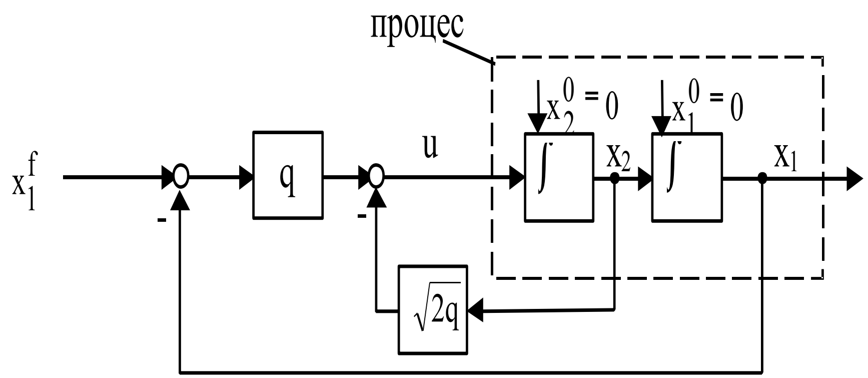
(додатній корінь, тому, що P > 0)

$\rightarrow$ оптимальний закон управління (регулювання):

$$u^*(\bar{z}) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \cdot \bar{z} = -(qz_1 + \sqrt{2a}z_2)$$

$$u^*(\bar{x}) = q(x_1^f - x_1) - \sqrt{2q}x_2$$

2.2.3.



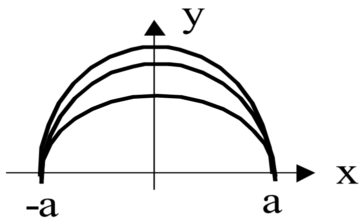
q = 0 не має сенсу

Стандартна інтерпретація: "Контур управління з заданою величиною x_1^f"

Коло з центральною точкою $\left(0,\ \sqrt{c_1^2 - a^2}\right)$ і радіусом c_1,

при чому c_1 – рішення трансцендентного рівняння (iii);

Другі можливі рішення, По мірі довжини L.



Завдання 2.

2.1. Зміни змінних (цільова область → начало відліку)

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = x_1 - x_1^e \\ z_2 = x_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathbf{z}_1' = z_2 \\ \mathbf{z}_2' = u \end{array} \qquad \begin{array}{l} z_1(0) = z_1^0 = -x_1^e; \\ z_2(0) = z_2^0 = \sigma; \end{array} \qquad \begin{array}{l} z_1(t_e) = z_1^e = \sigma \\ z_2(t_e) = z_2^e = \sigma \end{array}$$

й $$J = \frac{1}{2}\left[s_1 z_1^2(t_f) + s_2 z_2^2(t_f)\right] + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[q^2 z_1^2 + u^2\right]dt$$

2.2.1. $t_f = T \to \infty$ у оптимізації не застосовується кінцевий

стан $\to s_1 = s_2 = 0$

$$\to J = \frac{1}{2}\int_0^T \left[q^2 z_1^2 + u^2\right]dt$$

2.2.2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad R = 1; \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

2.2. Нехай надалі тривалість процесу буде нескінченною ($t_f \to \infty$).

2.2.1. Як буде виглядати підхожий критерій якості?

2.2.2. Визначити оптимальний закон регулювання, щоб I мінімізувати.

2.2.3. Задайте можливу реалізацію у вигляді блок схеми і обговоріть результат.

2.3. Нехай час процесу буде скінченим ($t_f = T < \infty$) і кінцевий стан x^f задано постійним. Нехай $q = 0$.

2.3.1. Як буде виглядати критерій якості і який у ньому сенс?

2.3.2. Визначте оптимальний закон регулювання.

2.3.3. Побудуйте графіки оптимальних траєкторій u^*, x^*_1 та x^*_2.

2.3.4. Яке буде значення I^*.

Рішення

1. Завдання.

Шлях лінії: $dl = \frac{dx}{\cos\alpha} \Rightarrow l(x = a) = \int\limits_{-a}^{a} \frac{1}{\cos\alpha} dx = L = const$

$\Rightarrow$ рівняння стану: $l' = \frac{1}{\cos\alpha};\ \ l(-a) = 0;\ \ l(a) = L$ (i)

площа $F = \int\limits_{-a}^{a} y(x)dx \to \max;\ \frac{dy}{dx} = y' = tg\alpha;\ y(-a) = y(a) = 0$ (ii)

Задача: $\underset{\alpha, l, y}{Max} F$ (i), (ii).

$\bar{x} = \begin{bmatrix} l \\ y \end{bmatrix};\ u = \alpha;\ t \leftrightarrow x;\ t_a \leftrightarrow -a;\ \bar{x}(t_e)$ постоянная

Функція Гамільтона: $\overline{H} = y + \lambda_1 \frac{1}{\cos\alpha} + \lambda_2 tg\alpha$

Необхідні умови:

$$\lambda_1{}' = -\frac{\partial H}{\partial l} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = c_1;$$

$$\lambda_2{}' = -\frac{\partial H}{\partial y} = -1 \Rightarrow \lambda_2 = -x + c_2;$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \frac{\lambda_2}{\cos^2\alpha} + \lambda_1 \frac{tg\alpha}{\cos\alpha} = 0 \ \Rightarrow\ \sin\alpha = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{x - c_2}{c_1} \qquad (c_1 \neq 0)$$

$$\frac{\partial l}{\partial x} = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 - (x - c_2)^2}} \Rightarrow \partial l = \frac{c_1 \cdot \partial x}{\sqrt{c_1^2 - (x - c_2)^2}} \Rightarrow$$

аналогічно (ii): $\left.\begin{aligned} &\Rightarrow l(x) = c_1 \cdot \arcsin\frac{x - c_2}{c_1} + c_3 \\ &\Rightarrow y(x) = -\sqrt{c_1^2 - (x - c_2)^2} + c_4 \end{aligned}\right\}$ для

невідомих c_1, c_2, c_3, c_4

$$y(-a) = y(a) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad и \quad c_4 = \sqrt{c_1^2 - a^2}$$

$$\left.\begin{aligned} &l(-a) = 0 = \pm c_1 \arcsin\frac{a}{c_1} + c_3 \\ &l(a) = L = \pm c_1 \arcsin\frac{a}{c_1} + c_3 \end{aligned}\right\} (-):\ \frac{L}{c_1} = 2\arcsin\frac{a}{c_1} \ \Rightarrow\ \sin\frac{L}{2c_1} = \frac{a}{c_1} \qquad \text{(iii)}$$

назад до

z_u $y(x)$: $y - \sqrt{c_1^2 - a^2} = -\sqrt{c_1^2 - x^2} \Rightarrow x^2 + (y - \sqrt{c_1^2 - a^2})^2 = c_1^2$