МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ОПТИМІЗАЦІЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

для студентів за напрямом

«Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології»

Рекомендовано Вченою радою інженерно-хімічного факультету

Київ

НТУУ «КПІ»

2014

Оптимізація систем керування. : Метод. вказівки до виконання практичних занять для **студентів за напрямом підготовки «Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології»** / Уклад.: Л. Р. Ладієва – К. : НТУУ «КПІ», 2014. – 50 с.

Гриф надано Вченою радою ІХФ
(Протокол №3 від 31 березня 2014 р.)

Навчальне завдання

ОПТИМІЗАЦІЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Методичні вказівки до виконання практичних занять для студентів за напрямом підготовки «Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології»

Укладач: Ладієва Леся Ростиславівна, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний
редактор А. І. Жученко, докт.техн. наук, проф.

Рецензент О. С. Жураковська, к.т.н.,доц.

Авторська редакція

Вступ

Методичні вказівки присвячені питанням практичного використання методів статичної оптимізації для практичних робіт. Основна увага приділяється методам і алгоритмам, що використовуються при проектуванні, керуванні і аналізі функціонування технологічних об’єктів. Розглядаються методи дослідження функцій класичного аналізу, методи лінійного програмування, як розділу дослідження операцій , які знайшли застосування при вирішенні задач, що пов’язані з ефективним використанням обмежених ресурсів. Методи нелінійного програмування орієнтовані на вирішення задач з обмеженнями.

Мета методичних вказівок для практичних робіт допомогти студентам освоїти розділи статичної оптимізації і застосувати знання на прикладах, представлених у формалізованому вигляді.

1. Постановка задач оптимізації. Приклади моделей процесів.

1.1. Теплообмінники типу «змішування — змішування»

Математична модель

Як приклади математичних моделей теплообмінних апаратів нижче проаналізовані моделі теплообмінників простіших типів, в яких здійснюється передача тепла між двома потоками — теплоносієм і хладоагентом. У всіх математичних описах передбачається, що рух потоків теплоносія і хладоагента характеризується простими гідродинамічними моделями «ідеальне змішування» і «ідеальне витіснення». Крім того, допускається, що коефіцієнт теплопередачі через стінку, що розділяє теплоносій і хладоагент, є постійною заданою величиною, яка не залежить від їх об'ємних витрат. Останнє допущення, строго кажучи, неточне [1], проте воно прийняте в майбутньому для спрощення математичних викладень при вирішенні завдань оптимізації.

Теплообмінник типу «змішування — змішування» (рис. 1.1). Математичний опис теплообмінника в даному випадку задають системою рівнянь типу

$$\frac{d\left(Vc_pT\right)}{dt}=\upsilon^{(0)}c_{p0}T^{(0)}-\upsilon c_pT+Vq_T\,,$$

де V - об’єм зони ідеального змішування, м^3; C_p - теплоємність потоку теплоносія, $\frac{Дж}{м^3k}$; V - витрати теплоносія, $\frac{кг}{с}$;

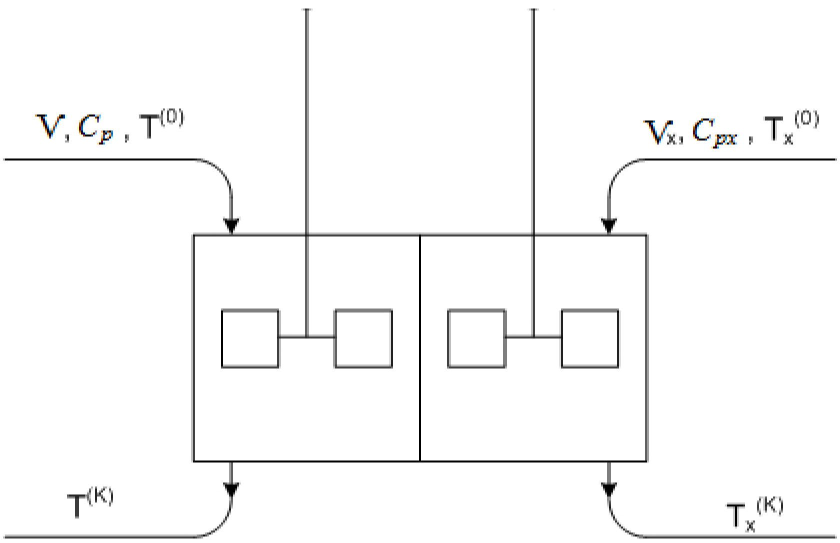

Рис. 1.1. Схематичне зображення теплообмінника типу „змішування — змішування“.

що відносяться до обох теплоносіїв. Інтенсивність джерела тепла при цьому визначається співвідношенням

$$Q_T = F_T K_T \left(T^* - T\right),$$

де K_T — коефіцієнт теплопередачі, $\frac{Вт}{м^2 K}$; F_T — поверхня теплообміну, м^2.

Стаціонарний режим теплообмінника можна описати нестаціонарними рівняннями, в яких похідні за часом вважаються рівними нулю. В результаті буде справедлива наступна система рівнянь:

$$\upsilon c_p \left(T^{(0)} - T^{(k)}\right) - K_T F \left(T^{(k)} - T_x^{(k)}\right) = 0$$

$$\upsilon_x c_{px} \left(T_x^{(0)} - T_x^{(k)}\right) + K_T F \left(T^{(k)} - T_x^{(k)}\right) = 0$$

яка може бути вирішена відносно будь-яких двох параметрів, що входять в ці рівняння. Зокрема, для вихідних температур теплоносія $T^{(k)}$ і хладоагента $T_x^{(k)}$ можна отримати вирази:

$$T^{(k)} = T^{(0)} \frac{1 + K_T F \left(\frac{1}{\upsilon_x c_{px}} + \frac{T_x^{(0)}}{T^{(0)}} \cdot \frac{1}{\upsilon c_p} \right)}{1 + K_T F \left(\frac{1}{\upsilon_x c_{px}} + \frac{1}{\upsilon c_p} \right)}$$

$$T_x^{(k)} = T_x^{(0)} \frac{1 + K_T F \left(\frac{T^{(0)}}{T_x^{(0)}} \cdot \frac{1}{\upsilon_x c_{px}} + \frac{1}{\upsilon c_p} \right)}{1 + K_T F \left(\frac{1}{\upsilon_x c_{px}} + \frac{1}{\upsilon c_p} \right)}$$

При розрахунках теплообмінних апаратів зазвичай задають теплове навантаження на теплообмінник Q, тобто кількість тепла, яке потрібно передати від теплоносія хладоагенту в одиницю часу. Для певної витрати теплоносія, відомої його теплоємності і заданої вхідної температури це по суті еквівалентний завданню необхідної вихідної температури теплоносія, оскільки

$$Q = \upsilon c_p \left(T^{(0)} - T^{(k)}\right)$$

Завдання розрахунку теплообмінника ставиться як завдання визначення поверхні теплообміну F. В даному випадку обчислюють також вихідну температуру хладоагента $T_x^{(k)}$, яку можна знайти із загального балансу тепла, не залежного від типа теплообмінника

$$\upsilon c_p\left(T^{(0)}-T^{(k)}\right)+\upsilon_x c_{px}\left(T_x^{(0)}-T_x^{(k)}\right)=0$$

Звідки

$$T_x^{(k)}=T_x^{(0)}+\left(T^{(0)}-T^{(k)}\right)\frac{\upsilon c_p}{\upsilon_x c_{px}}$$

Підставляючи в рівняння або вираження для вхідної температури хладоагента і вирішуючи отримане рівняння відносно поверхні теплообміну, знайдемо:

$$F=\frac{\upsilon_x c_{px}}{K_T\left(\nu\frac{\upsilon_x c_{px}}{\upsilon c_p}-1\right)}$$

Де

$$\nu=\frac{T^{(k)}-T_x^{(0)}}{T^{(0)}-T^{(k)}}$$

Знаменник виразу може перетворюватися на нуль або набувати негативних значень. При цьому поверхня теплообміну, визначена вказаним рівнянням, дорівнює нескінченності або від'ємна, що в обох випадках означає неможливість створення теплообмінника на задане теплове навантаження при прийнятих параметрах хладоагента. Тому умова додатності знаменника у виразі можна розглядати як умова фізичної реалізації теплообмінника при заданих параметрах теплоносія і хладоагента:

$$\nu\frac{\upsilon_x c_{px}}{\upsilon c_p}>1.$$

Оптимізація теплообмінних апаратів

Основним питанням, яке доводиться розглядати при проектуванні теплообмінних апаратів, є вибір поверхності теплообміну F і відповідного нею навантаження по хладоагенту υ_x для заданого теплового навантаження на теплообмінник Q. У зв'язку з цим для економічної оцінки ефективності теплообмінника заданої конструкції може бути використаний критерій оптимальності, об'єднуючий параметри F і υ_x, котрий може бути записаний у вигляді співвідношення:

$$R = s_x \upsilon_x + s_F F$$

у якому s_x — вартість одиниці об'єму хладоагента; s_F — вартість одиниці поверхні теплообміну, що обчислюється з врахуванням амортизації теплообмінника.

Критерій є сумарними витратами на експлуатацію теплообмінника в одиницю часу. Природньо, що зв'язок цих витрат з величиною поверхні теплообміну має значно складніший характер, проте в першому наближенні її все ж можна застосовувати у формі виразу для ілюстрації загальної методики оптимізації теплообмінних апаратів.

Щоб отримати можливість використовувати критерій оптимальності для вибору оптимальної поверхні теплообміну $F_{опт}$ і оптимальної витрати хладоагента $\upsilon_{x,опт}$, необхідно знайти зв'язок між F і υ_x яку дають рівняння математичного опису теплообмінника. Зрозуміло, що на вибір оптимальних значень F і υ_x при цьому робить вплив тип використаного теплообмінного апарату. Тому при рішенні задачі оптимального проектування потрібно також розглянути можливі варіанти реалізації теплообміну, тобто по суті оцінити економічну ефективність від використання того або іншого варіанту теплообмінника.

Для різних теплообмінників може бути отримана залежність поверхні теплообмена F від витрати хладоагента для заданого теплового навантаження на теплообмінник, що характеризується параметрами теплоносія— температурою, теплоємністю і витратою, тобто

$$F=F(V_X).$$

Скориставшись даною залежністю в загальному вигляді, з виразу можна визначити необхідні умови оптимальності. Для цього продиференціюємо критерій по v_x і прирівняємо отриманий вираз нулю. В результаті отримаємо рівняння

$$s_x + s_F \frac{dF}{d\upsilon_x} = 0$$

якому повинні задовольняти оптимальні значення F і υ_x.

Оскільки в даному випадку використовується залежність, фактично визначенню підлягає лише значення $\upsilon_{x,onm}$, вживане потім для розрахунку оптимальної поверхні теплообміну.

Розглянемо деякі частинні завдання оптимізації теплообмінників, математичні описи, яких наведені вище.

Теплообмінник типу «змішування — змішування». Для теплообмінника цього типу була отримана залежність поверхні теплообміну від навантаження по хладоагенту у формі виразу. В результаті диференціювання цього виразу по витраті хладоагента знаходимо:

$$\frac{dF}{d\upsilon_x} = -\frac{c_{px}}{K_T} \frac{1}{\left(v\frac{\upsilon_x c_{px}}{\upsilon c_{px}} - 1 \right)^2}$$

Підстановка виразу в рівняння дає:

$$\left(v\frac{\upsilon_x c_{px}}{\upsilon c_p} - 1 \right)^2 - \frac{s_p c_{px}}{s_x K_T} = 0$$

Рівнянням є умова перетворення на нуль похідної від критерію оптимальності. Вирішення цього рівняння дозволяє отримати два значення навантаження по хладоагенту:

$$\upsilon_{x1} = \frac{\upsilon c_p}{v c_{px}} \left[1 - \left(\frac{s_F c_{px}}{s_x K_T} \right)^{0,5} \right]$$

$$\upsilon_{x2} = \frac{\upsilon c_p}{v c_{px}} \left[1 + \left(\frac{s_F c_{px}}{s_x K_T} \right)^{0,5} \right]$$

Крім того, згідно з правилами дослідження функції однієї змінної, оптимальне значення слід шукати також в тих точках, де похідна від критерію оптимальності не існує. У нашому випадку є така точка, в якій похідна $dF/d\upsilon_x$ не існує і яка відповідає перетворенню на нуль знаменника виразу:

$$\upsilon_{x3} = \frac{\upsilon c_p}{\nu c_{px}}$$

Таким чином, є сукупність трьох значень υ_x, кожне з яких має бути перевірене на екстремум функції R. Аналіз достатніх умов в даному випадку доцільно провести, виходячи з фізичного сенсу вирішуваного завдання. З цією метою розглянемо вираз для поверхні теплообміну:

$$F = \frac{\upsilon_x c_{px}}{K_T\left(\nu \frac{\upsilon_x c_{px}}{\upsilon c_p} - 1\right)}$$

Очевидно, що фізичний сенс може мати лише додатнє значення величини поверхні F. Це відповідає виконанню умови:

$$\upsilon_x > \frac{\upsilon c_p}{\nu c_{px}}$$

Умові задовольняє лише значення υ_{x1} визначуване формулою. Залишається перевірити, чи при даному значенні υ_{x1} досягатиметься мінімальне значення критерію оптимальності.

1.2. Реактори ідеального змішування

Математична модель

Математичний опис даного реактора можна отримати із загальних рівнянь гідродинаміки потоку для випадку ідеального змішення

$$\frac{d(Vx_j)}{dt} = \upsilon^{(0)} x_i^{(0)} - \upsilon x_i + Vq_i$$

$$\frac{d(Vc_p T)}{dt} = \upsilon^{(0)} c_{p0} T^{(0)} - \upsilon c_p T + Vq_T,$$

де $x_i^{(0)}$ — вхідні концентрації реагентів, $T^{(0)}$ — температура суміші на вході в реактор, V — об’єм реагента, q — тепловий ефект стадії реакції.

якщо підставити в них відповідні вирази для інтенсивності джерел маси і тепла. Інтенсивність джерел маси в цьому випадку дорівнює швидкостям утворення реагентів. Вважаючи, що в процесі хімічного перетворення число моделей реагуючих речовин не змінюється, знаходять наступні рівняння для ключових компонентів реакції:

$$V_r \frac{dx_i}{dt} = \upsilon\left(x_i^{(0)} - x_i\right) + V_r \omega_i \quad i = 1, \ldots, m \,,$$

де w_i — швидкість утворення продукту.

За наявності теплового ефекту реакції система рівнянь має бути доповнена співвідношенням, що визначає характер зміни температури в зоні реакції, яке можна отримати з рівняння:

$$\frac{d\left(Vc_p T\right)}{dt} = \upsilon^{(0)} c_{p0} T^{(0)} - \upsilon c_p T + V q_T$$

У загальному випадку можливий теплообмін реагуючої суміші із зовнішнім теплоносієм. Щоб врахувати його, потрібно використовувати вираження для джерела тепла у формі рівняння

$$q_T = Q_r + Q_T$$

тобто з включенням у нього теплового ефекту реакції і теплопередачі:

$$V_r c_p \frac{dT}{dt} = \upsilon c_p \left(T^{(0)} – T\right) + V_r Q_r + K_T F\left(T_x - T\right)$$

При записі виразу передбачається, що теплоємність c_p реагуючої суміші не змінюється в процесі хімічної реакції.

Спільне вирішення системи рівнянь, доповнене при необхідності стехіометричними співвідношеннями для неключових реагентів, визначає при зроблених вище припущеннях поведінку реактора ідеального змішення в разі нестаціонарних режимів. Для того, щоб отримати систему рівнянь, що характеризує стаціонарні режими реактора, досить в рівняннях покласти похідні за часом рівними нулю.

В результаті система кінцевих рівнянь запишеться у вигляді

$$\upsilon\left(x_i^{(0)} - x_i\right) + V_r \omega_i = 0 \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\upsilon c_p \left(T^{(0)} – T\right) + V_r Q_r + K_T F\left(T_x - T\right) = 0$$

звідки для стаціонарного режиму можна знайти значення концентрацій реагентів і температури в реакторі при заданих значеннях вхідних концентрацій реагентів $x_i^{(0)}$температури суміші $T^{(0)}$, що подається в реактор, і температури теплоносія T_x.

Система рівнянь може бути переписана в зручнішому вигляді, якщо ввести позначення для середнього часу перебування реагентів в апараті:

$$\tau = \frac{V_r}{\upsilon}$$

з урахуванням якого рівняння наберуть вигляду:

$$x_i^{(0)} - x_i + \tau\omega_i = 0$$

$$T^{(0)} - T + \tau\frac{Q_r}{c_p} + \frac{K_T F}{\upsilon c_p}\left(T_x - T\right) = 0$$

Нижче розглянутий ряд прикладів побудови математичного опису реактора ідеального змішення для різних типів хімічних реакцій, що проводяться в ізотермічних умовах.

Приклад.

Для реакції типа

$$A \rightarrow P$$

швидкість якої виражається рівнянням

$$r = kx_A$$

знайти склад суміші на виході реактора ідеального змішення.

Розв'язок.

Для опису ізотермічного режиму апарату в даному випадку досить мати лише одне рівняння, що характеризує концентрацію одного з реагентів, наприклад, речовини *A*. Концентрацію другого реагенту при цьому обчислюємо із співвідношення:

$$x_p = x_p^{(0)} + \left(x_A^{(0)} - x_A\right)$$

З врахуванням виразу для швидкості стадії знаходимо швидкість утворення реагенту *A*:

$$\omega_A = -kx_A$$

Скориставшись одним з рівнянь системи, отримуємо

$$x_A^{(0)} - x_A - \tau kx_A = 0$$

звідки легко розраховуємо концентрацію реагенту *A* для заданого значення

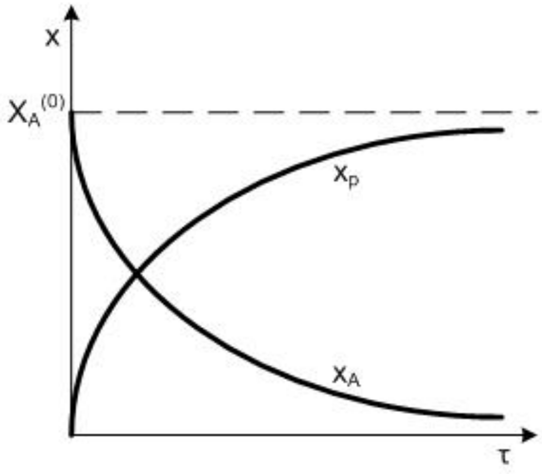

Рис. 1.2. Зміна концентрацій в реакторі ідеального змішення залежно від часу перебування τ для реакції $A \rightarrow P$.

середнього часу перебування τ при заданій константі швидкості реакції k, значення якої визначається температурою реагуючої суміші:

$$x_A = \frac{x_A^{(0)}}{1+\tau k}$$

На рис. 1.2 показаний характер зміни концентрацій x_A і x_p залежно від часу перебування τ.

Оптимізація реакторів ідеального змішення.

Під оптимальними умовами розуміються оптимальний час перебування реагентів в реакторі $\tau_{опт}$ і оптимальна температура реакції $T_{опт}$, що забезпечують максимальне або мінімальне (залежно від постановки завдання) значення заданого критерію R.

Приклад.

Для реакції першого порядку визначити оптимальні умови, при яких собівартість продукту P буде мінімальною. При обчисленні собівартості можна скористатися виразом

$$R = s_{пр} = \frac{1}{\upsilon x_p}\left(s_A \upsilon x_A^{(0)} + s_V V + s_Д\right)$$

де s_A — вартість одиниці сировини, що витрачається; s_V — вартість одиниці об'єму реактора, що обчислюється з обліком його амортизації; $s_Д$ — вартість додаткового устаткування реактора, що обчислюється з врахуванням амортизації; υ — навантаження реактора по вихідній сировині; x_p — концентрація отримуваного продукту після реакції.

Приймається, що навантаження на реактор υ задана. При цьому визначення оптимального часу перебування реагентів в реакторі фактично зводиться до знаходження його оптимального об'єму $V_{опт}$.

Розв’язок

Для даного випадку концентрація продукту реакції на виході реактора може бути визначена із співвідношень:

$$x_p = x_p^{(0)} + \left(x_A^{(0)} - x_A\right)$$

$$x_A = \frac{x_A^{(0)}}{1+\tau k}$$

звідки знаходимо:

$$x_p = \frac{\tau k x_A^{(0)}}{1+\tau k}$$

Підстановка співвідношення у вираження для критерію оптимальності дає:

$$R = \left(s_A + \frac{s_Д}{\upsilon x_A^{(0)}}\right)\left(\frac{1}{\tau k} + 1\right) + \frac{s_V}{k x_A^{(0)}}\left(\tau k + 1\right)$$

З врахуванням отриманої залежності критерій оптимальності R може розглядатися як функція двох змінних-часу перебування τ і температури T, від якої залежить значення константи швидкості хімічної реакції k. Для спрощення замість змінної T в даному випадку можна використати змінну k, оскільки передбачається, що між ними існує однозначна залежність, визначена рівнянням Ареніуса.

$$k_j(T) = k_{j\infty} \exp\left(-\frac{E_j}{R_Г T}\right)$$

Необхідні умови екстремуму функції R можуть бути отримані диференціюванням функції R по обом змінним і прирівнюванням похідних нулю. В результаті знайдемо:

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = -\left(s_A + \frac{s_Д}{\upsilon x_A^{(0)}}\right)\frac{1}{\tau^2 k} + \frac{s_V}{x_A^{(0)}} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial k} = -\left(s_A + \frac{s_Д}{\upsilon x_A^{(0)}}\right)\frac{1}{\tau k^2} + \frac{s_V}{k^2 x_A^{(0)}} = 0$$

Легко бачити, що останнє рівняння не може задовільняти жодним кінцевим значенням τ і *k*. Єдина можливість його виконання буде в тому випадку, якщо прийняти для константи швидкості реакції нескінченно велике значення. При цьому для кінцевих значень *k* похідна $\partial R/\partial k$ завжди залишається від'ємною величиною, що характеризує можливість досягнення мінімального значення критерію *R* лише при нескінченно великій температурі реакції. Оскільки в реальних умовах температура реакції завжди обмежена певними технологічними межами, отримані результати означають, що наближення до оптимальних умов можна досягти лише проведенням процесу при максимально можливій температурі. Рівняння, що залишається, в цьому випадку дозволяє знайти оптимальне значення часу перебування, відповідне заданому значенню температури процесу:

$$\tau_{опт} = \left(\frac{s_A \upsilon x_A^{(0)} + s_Д}{s_V \upsilon k}\right)^{0,5}$$

Підстановка співвідношення у вираз для критерію оптимальності дозволяє визначити його мінімальне значення для заданого максимально можливого значення температури *T*:

$$R_{опт} = \frac{s_V}{k x_A^{(0)}}\left[1 + k\left(\frac{s_A \upsilon x_A^{(0)} + s_Д}{s_V \upsilon k}\right)^{0,5}\right]^2$$

За допомогою формул можна отримати також кількісну і якісну оцінки оптимальних умов проведення реакції достатній загального вираження критерію оптимальності.

2. Методи дослідження функцій класичного аналізу

Методи дослідження функцій класичного аналізу - це найвідоміші методи розв'язання порівняно нескладних оптимальних задач. Це передусім:

1) метод пошуку безумовних екстремумів;

2) метод невизначених множників Лагранжа.

Методи дослідження функцій класичного аналізу в основному застосовують тоді, коли відомо аналітичний вигляд залежності функції, що оптимізується f від незалежних змінних x_i. Це дозволяє знайти також в аналітичному вигляді похідні оптимізованої функції, використання яких і формулюють потрібні та достатні умови існування екстремуму.

2.1. Метод пошуку безумовних екстремумів

Цей метод можна застосовувати для розв'язання задачі оптимізації, якщо немає обмежень. Він оснований на знаходженні першої похідної цільової функції і прирівнюванні її до нуля. При цьому можна розв'язувати багатопараметричну задачу, тобто задачу з кількома варійованими параметрами. Для розв'язання такої задачі треба знайти перші похідні за кожним з варійовних параметрів, і всі ці похідні прирівняти до нуля. При цьому потрібно розв'язати систему кінцевих рівнянь, найчастіше нелінійних.

Додаткові ускладнення виникають унаслідок того, що розв'язок задачі пошуку оптимуму дає лише необхідні, але не достатні умови. Тому всі розв'язки цієї системи належить перевіряти на достовірність. Крім того, методи дослідження функцій класичного аналізу не дозволяють відразу виділити глобальний екстремум. Тому після перевірки розв'язку оптимальної задачі на достовірність виконують пошук серед розв'язків глобального екстремуму.

2.2. Матриця Гессе

Необхідними умовами наявності в точці X^* локального мінімуму є виконання рівності

$$\nabla f(X^*) = 0,$$

і матриця $\nabla^2 f(X^*)$ - додатно напіввизначена.

Достатніми умовами того, що X^* - точка ізольованого (строгого) локального мінімуму, є

$$\nabla f(X^*) = 0,$$

і матриця $\nabla^2 f(X^*)$ - додатно визначена.

Зазвичай доводиться обмежуватись знаходженням локального мінімуму. Але якщо можна показати, що $\Delta X^T \nabla^2 f(X^{(k)}) \Delta X \geq 0$ для всіх X, то $f(X)$ називають опуклою функцією, а локальний мінімум виявляється глобальним.

Якщо в стаціонарній точці $\bar{X}$ матриця Гессе $\nabla^2 f(\bar{X})$ - від'ємно визначена, то це точка максимуму, якщо $\nabla^2 f(\bar{X})$ - не визначена, то це сідлова точка.

У матричній формі можна записати матрицю Гессе - квадратну матрицю других частинних похідних $f(X)$, узятих у точці $X^{(k)}$:

$$\nabla^2 f\left(x^{(k)}\right) = H\left(X^{(k)}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Для випадку двох змінних

$$H\left(X^{(k)}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}.$$

П р и к л а д.

Розглянемо функцію

$$f(x) = 2x_1{}^2 + 4x_1 x_2^3 - 10 x_1 x_2 + x_2^2,$$

лінії рівня якої зображено на рис.2.3. Потрібно класифікувати точку $\bar{x} = [0,0]^T$.

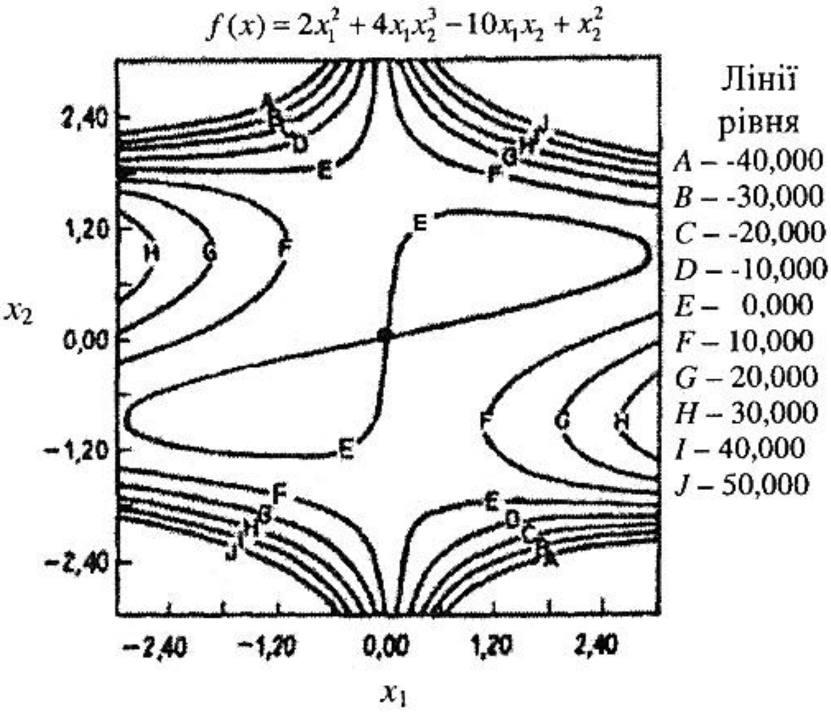

Рис. 2.3. Лінії рівня нелінійної функції двох змінних

Розв'язання:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 + 4x_2^3 - 10x_2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 12x_1x_2^2 - 10x_1 + 2x_2;$$

$$\nabla f(\bar{x}) = [0,0]^T.$$

Тоді точка $\bar{x}$ - стаціонарна:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\ 2}} = 4;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 24x_1x_2 + 2 = +2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} = 12x_2^2 - 10 = -10.$$

Тоді

$$\nabla^2 f(\bar{x}) = H_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} +4 & -10 \\ -10 & +2 \end{bmatrix}.$$

Матриця $\nabla^2 f(\bar{x})$ - невизначена. Тому $\bar{x}$ являє собою сідлову точку, що і зображено на рис. 2.3.

Завдання 2.1.

Визначити і класифікувати стаціонарні точки функції.

2.1.

$$f(x) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_1 + 3x_2 - 4;$$

2.2.

$$f(x) = 2x_1^3 + 4x_1 x_2^2 - 10 x_1 x_2 + x_2^2;$$

2.3.

$$f(x) = x_1^2 - x_1 x_2^2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 6;$$

2.4.

$$f(x) = 2x_1^2 - 6x_1 x_2^2 - 10 x_1^2 x_2 + x_2^2 - 4.$$

2.3. Метод множників Лагранжа

1. Лінійна система описується рівнянням

$$f(X,U) = AX + BU + C = 0$$

І потрібно мінімізувати функцію вартості

$$I(X,U) = \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} U^T R U$$

Записати функцію Лагранжа і необхідні умови оптимальності та оптимальне керування.

Відповідь:

Функція Лагранжа формується наступним чином:

$$L = \frac{1}{2} U^T R U + \frac{1}{2} X^T Q X + \lambda^T \left[AX + BU + C \right]$$

Необхідні умови оптимальності

$$\frac{\partial L}{\partial X} = QX + A^T \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial U} = RU + B^T \lambda = 0$$

Оптимальне керування:

$$U^* = -R^{-1} B^T \lambda$$

2. Знайти оптимальне керування U використовуючи метод множників Лагранжа

$$I = X^2 + U^2 \to \min$$

При $XU = 1$

Відповідь:

Функція Лагранжа

$$L = x^2 + U^2 + \lambda(xU - 1)$$

Необхідні умови оптимальності

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda U = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial U} = 2U + \lambda x = 0$$

Розв'язуємо систему рівнянь методом підстановки

$$\lambda = -\frac{2x}{U}$$

$$2U - \frac{2x^2}{U} = 0 \quad U = x$$

З обмеженням $U^2 = 1;\ U^* = \pm\sqrt{1}$

3. Побудувати функцію Лагранжа і необхідні умови оптимальності для задачі умовної оптимізації

$$Z = -x_1 + x_2 + 2x_1^2$$

$$3x_1 + 4x_2 = 12$$

$$-x_1 + 2x_2 = 6$$

Відповідь:

Функція Лагранжа

$$L = -x_1 + x_2 + 2x_1^2 + \lambda_1(3x_1 + 4x_2 - 12) + \lambda_2(-x_1 + 2x_2 - 6)$$

Необхідні умови оптимальності

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 + 4x_1 + 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 + 4\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 3x_1 + 4x_2 - 12 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -x_1 + 2x_2 - 6 = 0$$

4. Перевірити чи має функція $F(X) = x_1 x_2 + 2x_1^2 - 4x^2$ сідлову точку на площині X.

Відповідь:

Необхідні умови оптимальності

Градієнт функції $\nabla F(X)=\begin{bmatrix} x_2+4x_1 \\ x_1-8x_2 \end{bmatrix}=0$

Матриця Гессе $\nabla^2 F(X)=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

Матриця Гессе не визначена і точка $X=[0 \quad 0]^T$ – сідлова точка.

5. Класифікувати точку $\bar{X}=[0 \quad 0]^T$ для функції

$f(X)=2x_1+4x_1x_2^3-10x_1+x_2^2$

Відповідь:

Градієнт функції $\nabla f(X)=\begin{bmatrix} 4x_1+4x_2^3-10x_2 \\ 12x_1x_2^2-10x_1+2x_2 \end{bmatrix}=0$

Тобто т. X – стаціонарна.

Матриця Гессе $\nabla^2 f(X)=\begin{bmatrix} 4 & 12x_2^2-10 \\ 12x_2^2-10 & 24x_1x_2+2 \end{bmatrix}=0$

$\nabla^2 f(\bar{X})=\begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}\geq 0$

Матриця $\nabla^2 f(\bar{X})$ – невизначена і $\bar{X}$ – сідлова точка.

Приклад.

Знайти точки умовного екстремуму функції

$$Z=x_1+x_2+2x_1^2$$
$$3x_1+4x_2=12$$
$$-x_1+2x_2=6$$

Побудуємо функцію Лагранжа

$$F=-x_1+x_2+2x_1^2+\lambda_1(3x_1+4x_2-12)+\lambda_2(-x_1+2x_2-6)$$

і знайдемо її похідні за $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$.

Прирівнявши здобуті вирази до нуля, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial X_1} = -1 + 4X_1 + 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial X_2} = 1 + 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 3X_1 + 4X_2 - 12 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = X_1 + 2X_2 - 6 = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему методом Жордана-Гауса, дістанемо $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.

Приклад.

Виробник бляшаних консервних банок бажає максимізувати деяку партію банок із заданою площею жесті.

Об’єм $V(r,l) = \pi r^2 l.$

Площа $A(r,l) = 2\pi r^2 + 2\pi r^2 l = A_0.$

Розглянемо задачу, використовуючи множник Лагранжа. Спочатку сформуємо функцією

$V' = (r,l) = V(r,l) + \lambda[A(r,l) - A_0],$

де λ - множник Лагранжа. Цей вираз можна записати через параметри консервної банки так:

$V'(r,l) = \pi r^2 l + \lambda[2\pi r^2 + 2\pi rl - A_0].$

Візьмемо першу частинну похідну за кожною змінною і прирівняємо до нуля. Отримуємо:

$$\frac{\partial V'(r,l)}{\partial l} = \pi r^2 + \lambda 2\pi r = 0, \quad r = -2\lambda;$$

$$\frac{\partial V'(r,l)}{\partial r} = 2\pi rl + \lambda[4\pi r + 2\pi l] = 0, \quad l = 2r.$$

Розрахуємо тепер λ з урахуванням заданого обмеження $A(r,l) = A_0$ чи $A_0 = 2\pi r^2 + 2\pi rl$. Одержуємо

$A_0 = 2\pi(4\lambda^2) + 2\pi(2\lambda)(-4\lambda),$

Тоді $\lambda = \pm\sqrt{A_0 / 24\pi}.$

Отже, маємо $r = 2\sqrt{A_0 / 24\pi}, \; l = 4\sqrt{A_0 / 24\pi}.$

Завдання 2.2.

Використовуючи метод множників Лагранжа, знайти точки умовного екстремуму функції Z.

2.5.

$$Z = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2;$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8.$$

2.6.

$$Z = 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2;$$
$$2x_1 + 4x_2 = 8.$$

2.7.

$$Z = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2;$$
$$x_1 + 3x_2 = 6.$$

2.8.

$$Z = 3x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2;$$
$$2x_1 + 3x_2 = 5;$$
$$x_1 + 4x_2 = 7.$$

3. Лінійне програмування

3.1. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

Приклад.

Розв’язати графічно таку задачу лінійного програмування (рис.2.1.):

$$Z = x_1 + 2x_2 \,(\max)$$
$$2x_1 + 4x_2 \geq 8$$
$$2x_1 - 3x_2 \leq 6$$
$$-3x_1 + 2x_2 \geq 9$$
$$x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0$$

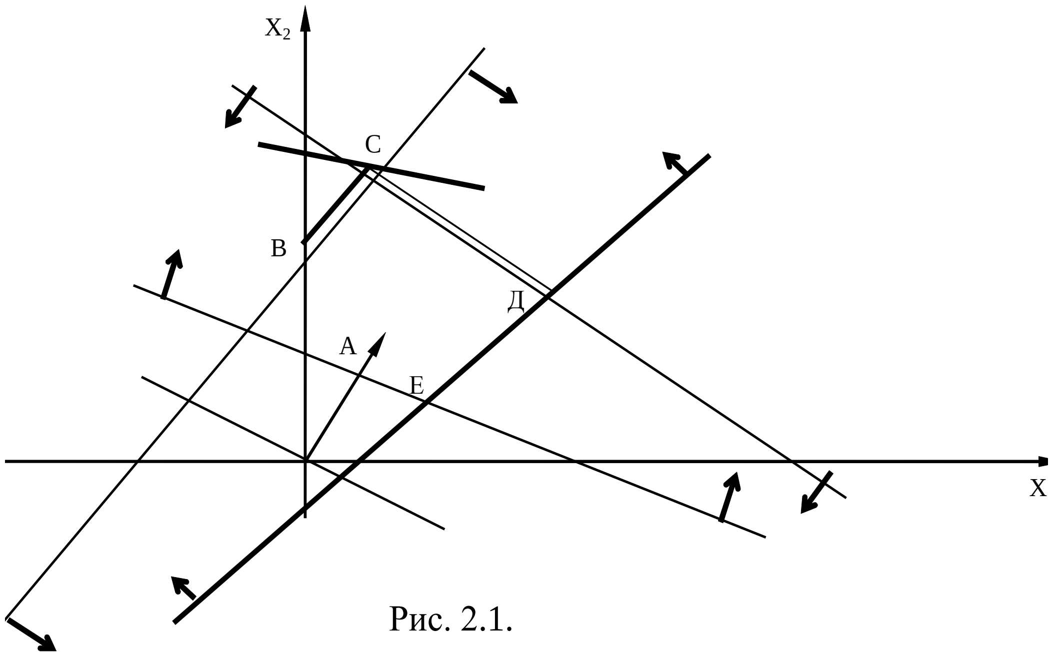

Рис. 2.1.

Завдання 3.1.

Розв'язати графічно такі задачі лінійного програмування:

3.1. $Z = 7x_1 + 6x_2 (\max)$
$2x_1 + 5x_2 \ge 10$
$5x_1 + 2x_2 \ge 10$
$x_1 \le 6$
$x_2 \le 5$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

3.2. $Z = 5x_1 + x_2 (\max)$
$x_1 + x_2 \ge 2$
$x_1 - x_2 \le 2$
$4x_1 - 8x_2 \ge 16$
$x_1 \ge 1$
$0 \le x_2 \le 3$

3.3. $Z = 5x_1 - 3x_2 (\min)$
$3x_1 + 2x_2 \ge 6$
$2x_1 - 3x_2 \ge -6$
$x_1 + x_2 \le 4$
$4x_1 + 7x_2 \le 28$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

Використовуючи геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування в задачах 3.4.-3.6., визначити область змінювання параметрів, для яких:

а) задача несумісна;

б) область необмежена;

в) задача має розв'язок;

г) область розв'язування зображена точкою;

д) якщо задача несумісна чи область необмежена, то змінити умови, щоб задача мала розв'язок.

3.4. $Z = x_1 + x_2 (\max)$

$x_1 + ax_2 \le 1$

$ax_1 - x_2 \le 1$

$x_1, x_2 \ge 0$

3.5. $Z = x_1 - x_2 (\min)$

$x_1 \le 1$

$-ax_1 + x_2 \ge 4$

$x_1, x_2 \ge 0$

3.6. $Z = 2x_1 + 3x_2 (\min)$

$x_1 + x_2 \le 1$

$x_1 + bx_2 \le 1$

$x_1 - x_2 \ge c$

$x_1, x_2 \ge 0$

3.2. Симплекс метод розв'язування задач лінійного програмування

Розглянемо приклад:

$$Z = 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 (\max)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \qquad \textbf{(1)}$$

$$3x_1 + 5x_2 \le 15 \qquad \textbf{(2)}$$

$$6x_1 + x_2 \ge 12 \qquad \textbf{(3)}$$

$$x_i \ge 0,\ j=1.3$$

Зведемо систему обмежень до стандартного вигляду. Для цього в обмеження (2) і (3) введемо додаткові змінні. У цільову функцію додаткові змінні входять з нульовими коефіцієнтами.

$$Z = 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 (\max)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$

$$3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15$$

$$6x_1 + x_2 - x_5 = 12$$

$$x_i \ge 0,\ j=1.3$$

Запишемо матрицю А і вектор В, утворені коефіцієнтами при змінних:

$$\overline{A}_1 = \begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix} \quad \overline{A}_2 = \begin{bmatrix}2\\5\\1\end{bmatrix} \quad \overline{A}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \overline{A}_4 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \overline{A}_5 = \begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix} \quad \overline{B} = \begin{bmatrix}8\\15\\12\end{bmatrix}$$

У системі немає одиничного базиса, тому для його утворення не вистачає вектора $\overline{A}_6$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Щоб дістати його, введемо штучну змінну в третє рівняння. В цільову функцію x_6 увійде з коефіцієнтом -M, тому що цільова функція максимізуватиметься. Дістанемо:

$$Z = 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 (\max)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$

$$3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15$$

$$6x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 12$$

$$x_i \geq 0$$

За допомогою М-метода (метода великих штрафів) побудуємо першу симплексну таблицю (таб.3.1.) і будемо далі розв'язувати задачу в табличній формі до здобуття оптимального плану:

Таблиця 3.1.

$C_{баз}$	Базис	A_0	5	2	-6	0	0	-M	
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-6	x_3	8	1	2	1	0	0	0	8
0	x_4	15	3	5	0	1	0	0	5 min {8,5,2}=2
-M	x_6	12	6	1	0	0	-1	0	2
Zj-Cj	0	-48	-29	-14	0	0	0	0	x_1 = (0,0,8,15,12)
		-12M	-M	-M	0	0	M	0	Z_1 = -48, -12M
-6	x_3	6	0	11/6	1	0	1/6		36/11
0	x_4	9	0	9/2	0	1	1/2		2
5	x_1	2	1	1/6	0	0	-1/6		12

Zj-Cj	**0**	**-26**	**0**	**-73/6**	**0**	**0**	**-11/6**		**x_2 = (2,0,6,9,0)**
									Z_2 = -26
-6	**x_3**	**7/3**	**0**	**0**	**1**	**-11/27**	**-1/27**		**-9/7**
2	**x_2**	**2**	**0**	**1**	**0**	**2/9**	**1/9**		**18**
5	**x_1**	**5/3**	**1**	**0**	**0**	**-1/27**	**-5/27**		**-9**
Zj-Cj	**0**	**-5/3**	**0**	**0**	**0**	**73/27**	**-20/27**		**x_3 = (5/3,2,7/3,0)**
									Z_3 = -5/3
-6	**x_3**	**3**	**0**	**1/3**	**1**	**-1/3**	**0**		
0	**x_5**	**18**	**0**	**9**	**0**	**2**	**1**		
5	**x_1**	**5**	**1**	**5/3**	**0**	**1/3**	**0**		**x_0 = (5,0,3,0,18)**
Zj-Cj	**0**	**7**	**0**	**13/3**	**0**	**11/3**	**0**		**Z_{max} = 7**

Усі Zj-Cj ≥0; отже, план оптимальний.

Відповідь: $x_{опт}$ = (5,0,3,0,18); Z_{max} = 7.

Використаємо двоетапний симплекс-метод для розв’язку прикладу:

$$-3x_1 - 4x_2 = Z \rightarrow \min$$

$$x_1 \geq 10$$

$$x_2 \geq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 20$$

$$-x_1 + 4x_4 \leq 20$$

$$x_i \geq 0$$

Введемо додаткові змінні:

$$x_1 - x_3 = 10$$

$$x_2 \; -x_4 = 5$$

$$x_1 + x_2 \; + x_5 = 20$$

$$-x_1 + 4x_2 \; + x_6 = 20$$

Змінимо два перші обмеження, увівши штучні змінни x_7 і x_8 і мінімізувати штучну цільову функцію $W=x_7+x_8$. У канонічній формі отримаємо:

$-x_1-x_2+x_3+x_4=W-15$. Розв`язок за допомогою двоетапного симплекс-методу показано у табл.3.2

Таблиця 3.2.

Ітерація	Базис	Значення	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0	x_7	10	1	0	-1	0	0	0	1	0
	x_8	5	0	1	0	-1	0	0	0	1
	x_5	20	1	1	0	0	1	0	0	0
	x_6	20	-1	4	0	0	0	1	0	0
	-Z	0	-3	-4	0	0	0	0	0	0
	-W	15	-1	-1	1	1	0	0	0	0
1	x_1	10	1	0	-1	0	0	0	1	0
	x_8	5	0	1	0	-1	0	0	0	1
	x_5	10	0	1	1	0	1	0	-1	0
	x_6	30	0	4	-1	0	0	1	1	0
	-Z	30	0	-4	-3	0	0	0	3	0
	-W	-5	0	-1	0	1	0	0	1	0
2	x_1	10	1	0	-1	0	0	0	1	0
	x_2	5	0	1	0	-1	0	0	0	1
	x_5	5	0	0	1	1	1	0	-1	-1
	x_6	10	0	0	-1	4	0	1	1	-4
	-Z	50	0	0	-3	-4	0	0	3	4
	-W	0	0	0	0	0	0	0	1	1
3	x_1	10	1	0	-1	0	0	0		
	x_2	7.5	0	1	-0.25	0	0	0.25		
	x_5	2.5	0	0	1.25	0	1	-0.25		
	x_4	2.5	0	0	-0.25	1	0	0.25		
	-Z	60	0	0	-4	0	0	1		
4	x_1	12	1	0	0	0	0.8	-0.2		
	x_2	6	0	1	0	0	0.2	0.2		
	x_3	2	0	0	1	0	0.8	-0.2		
	x_4	3	0	0	0	1	0.2	0.2		
	-Z	68	0	0	0	0	3.2	0.2		

Завдання 3.2.

Розв'язати двоетапним симплекс методом такі задачі:

3.7.
$$Z = 6x_1 + 5x_2 + x_3 (max)$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 10$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$$
$$x_j \geq 0$$

3.8.
$$Z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 (min)$$
$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 24$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 18$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 18$$
$$x_j \geq 0$$

3.9.
$$Z = -x_1 + x_2 + x_3 (max)$$
$$4x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 24$$
$$-6x_1 - 8x_2 \geq -24$$
$$x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 15$$
$$x_j \geq 0$$

3.3. Двоїста задача

Приклад.

Нехай задана початкова задача

$$Z = 8x_1 + 6x_2 + 9x_3 (max)$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_4 = 18$$
$$x_j \geq 0$$

Треба знайти розв'язок як заданої задачі, так і двоїстої для неї. Будуємо двоїсту задачу

$$F = 12y_1 + 18y_2 (min)$$
$$y_1 + 3y_2 \geq 8$$
$$2y_1 + y_2 \geq 6$$
$$y_1 + 2y_2 \geq 9$$
$$x_j \geq 0$$

y_1, y_2 - ,будь які значення

У двоїстої задачі (несиметричній) відсутні умови невід'ємності змінних. Тому її розв'язувати безпосередньо симплексним методом не можна.

Розв'яжемо початкову задачу і за її розв'язком знайдемо розв'язок двоїстої задачі (табл. 3.3.).

Таблиця 3.3.

Базис	**Значення**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	
x_4	**12**	**1**	**2**	**1**	**1**	**0**	**12**
x_5	**18**	**3**	**1**	**2**	**0**	**1**	**6**
-Zj	**0**	**-8**	**-6**	**-9**	**0**	**0**	
-W	**-30**	**-4**	**-3**	**-3**	**0**	**0**	
x_4	**6**	**0**	**5/3**	**1/3**	**1**	**-1/3**	**18/5**
x_1	**6**	**1**	**1/3**	**2/3**	**0**	**1/3**	**18**
-Zj	**48**	**0**	**-10/3**	**1/3**	**0**	**8/3**	
-W	**-6**	**0**	**-5/3**	**3/3**	**0**	**1/3**	
x_2	**18/5**	**0**	**1**	**1/5**	**3/5**	**-1/5**	**18**
x_1	**24/5**	**1**	**0**	**3/5**	**-1/5**	**2/5**	**8**
-Zj	**60**	**0**	**0**	**-3**	**2**	**2**	
-W	**0**	**0**	**0**	**0**			
x_2	**2**	**-1/3**	**1**	**0**	**2/3**	**-1/3**	
x_3	**8**	**5/3**	**0**	**1**	**-1/3**	**2/3**	
-Zj	**84**	**5**	**0**	**0**	**1**	**4**	

Знайдемо розв'язок двоїстої задачі за формулою $y_{опт} = C_{баз} * D^{-1}$,

де $C_{баз}$=(6;9);

$$D = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$Y_0 = (6{,}9)*\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (1;4)$$

F_{min} = 12*1+18*4 = 84

Перевірка $Z_{max} = F_{min}$ = 84.

Приклад.

На основі графічного аналізу двоїстої задачі до початкової дослідити розв'язок обох задач і в разі його присутності знайти оптимальний розв'язок, використовуючи другу теорему двоїстості.

Початкова задача:

$$F = y_1 + y_2 \quad (\max)$$

$$-3y_1 + 2y_2 \le 1$$

$$2y_1 + 2y_2 \le 13$$

$$3y_1 - y_2 \le 12$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0$$

Розв'яжемо графічно двоїсту задачу (рис. 2.2.)

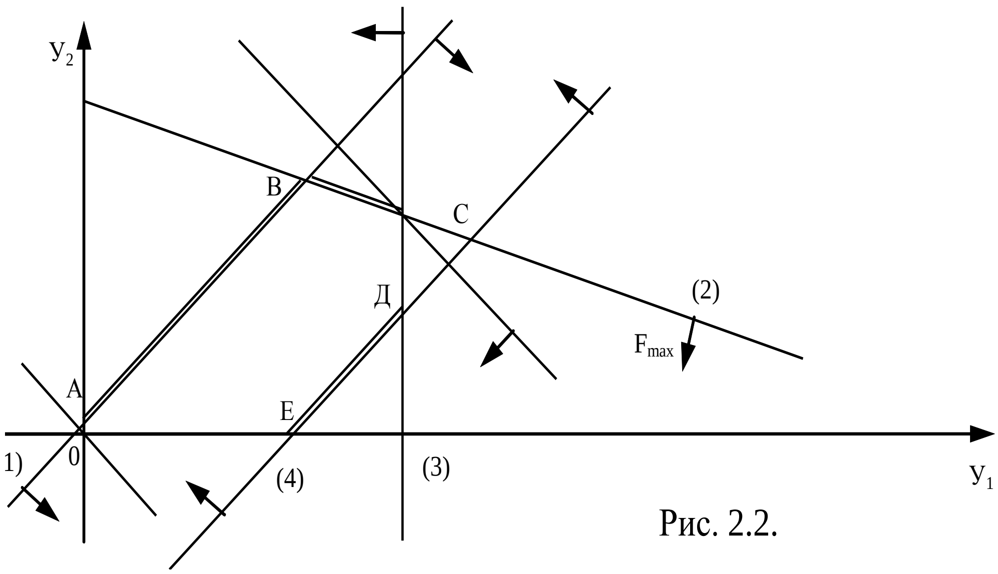

Рис. 2.2.

Побудуємо багатокутник розв'язку. Кожне обмеження є півплощиною. Перетинання відповідних півплощин з умовою невід'ємності змінних $y_j \ge 0$ утворить багатокутник розв'язання ABCDEO.

Визначимо крайню кутову точку, в якій пряма цільової функції буде опорною. Такою точкою буде точка C. Координати точки C визначають, розв'язуючи систему рівнянь для прямих, які перетинаються в точці C (прямі 2 і 3)

$$y_1 + 2y_2 = 14$$
$$2y_1 + y_2 = 13$$

Розв’язок системи визначить оптимальний план двоїстої задачі

$$y_1 = 4;\ y_2 = 5;\ y_0 = (4;5);\ F_{max} = 9.$$

Згідно з першою теоремою двоїстості матиме розв’язок і початкова задача, причому Zmin = Fmax.

Для визначення оптимального плану початкової задачі використаємо другу теорему двоїстості. Якщо підставимо оптимальний розв’язок двоїстої задачі в першу і четверту нерівності системи обмеження цієї задачі, то побачимо, що ці нерівності виконуються як строгі, тобто

$$-12 + 10 = -2 < 1, \quad 12 - 10 \le 12.$$

Отже, відповідні змінні x_1 і x_4 початкової задачі повинні дорівнювати нулю (згідно з теоремою двоїстості). Обмеження початкової задачі перетворюються в рівняння, тому що відповідні їм змінні

$$y_1 = 4 > 0; \quad і \quad y_2 = 5 > 0.$$

Тоді з системи рівнянь початкової задачі

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_2 + \ \ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Отже, $x_0=(0,1/3,1/3,0)$ Zmin = 9

При цьому Zmin = Fmax = 9, що підтверджує правильність розв’язку.

Завдання 3.3.

Побудувати двоїсту задачу до початкової. Розв’язати одну з пари задач і знайденим розв’язком дістати розв’язок двоїстої задачі:

3.10. $Z = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 (\max)$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\ge 12 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &\ge 20 \\ x_j &\ge 0 \end{aligned}$$

3.11. $Z = 5x_1 + x_2 + 4x_3 (\max)$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 30 \\ x_j &\ge 0 \end{aligned}$$

3.12. $Z = 5x_1 + 6x_2 + x_3 (\min)$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\le 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\ge 12 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &\ge 6 \\ x_j &\ge 0 \end{aligned}$$

Алгоритм подвійного симплекс-метода був виведений без звернення до двоїстості. Однак двоїстість дозволяє поглянути на процедуру по іншому.

Розглянемо задачу:

Знайти такі $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, що

$$x_1 + 3x_3 \ge 3$$

$$x_2 + 2x_3 \ge 5$$

та функцію $4x_1 + 6x_2 + 18x_3 = Z$ має мінімальне значення.

Оскільки коефіцієнти у виразі для функції Z додатні, можливо уникнути введення штучних змінних та вирішити задачу з використанням подвійного симплекс-методу.

Симплекс-множники доривнюють:

$$\pi^T = -(B^{-1})^T * C_в = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1 \\ -1/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 & -1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Приведемо таблицю послідовних обчислень подвійним симплекс методом:

Таблиця 3.4.

Ітерація	**Базис**	**Значення**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	**-3**	**-1**	**0**	**-3**	**1**	**0**
	x_5	**-5**	**0**	**-1***	**-2**	**0**	**1**
	-Z	**0**	**4**	**6**	**18**	**0**	**0**
1	x_4	**-3**	**-1**	**0**	**-3***	**1**	**0**
	x_5	**5**	**0**	**1**	**2**	**0**	**-1**
	-Z	**-30**	**4**	**0**	**6**	**0**	**6**
	x_2	**1**	**1/3**	**0**	**1**	**-1/3**	**0**
	x_3	**3**	**-2/3**	**1**	**0**	**2/3**	**-1**
	-Z	**-36**	**2**	**0**	**0**	**2**	**6**

Таким чином в оптимальному рішенні

$\mathbf{x_1}$=0, $\mathbf{x_2}$=3, $\mathbf{x_3}$=1 та $\mathbf{Z}_{min}$=36.

Симплекс-множники (коефіцієнти при нових змінних $\mathbf{x_4}$ та $\mathbf{x_5}$ кінцевому вигляді для функції **Z**) дорівнюють π_1=2 та π_2=6.

Розглянемо двоїсту задачу:

Знайти такі $\mathbf{y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,}$ що

$$\mathbf{y_1 \leq 4}$$

$$\mathbf{y_2 \leq 6}$$

$$\mathbf{y_1 + y_2 \leq 18}$$

та функція $3\mathbf{y_1} + 5\mathbf{y_2} = \mathbf{W}$ має максимальне значення.

При звичайному підході до задачі мінімізуємо функцію

$$W' = -3y_1 - 5y_2$$

Приведемо таблицю послідовних обчислень:

Таблиця 3.5.

Ітерація	Базис	Значення	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	y_3	**4**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
	y_4	**6**	**0**	**1***	**0**	**1**	**0**
	y_5	**18**	**3**	**2**	**0**	**0**	**1**
	$-W'$	**0**	**-3**	**-5**	**0**	**0**	**0**
1	y_3	**4**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
	y_4	**6**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
	y_5	**6**	**3***	**0**	**0**	**-2**	**1**
	$-W'$	**30**	**-3**	**0**	**0**	**5**	**0**
2	y_3	**2**	**0**	**0**	**1**	**2/3**	**-1/3**
	y_2	**6**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
	y_1	**2**	**1**	**0**	**0**	**-1/3**	**1/3**

	$-W'$	36	0	0	0	3	1

Симплекс-множники (для цільової функції W') ρ_1=0, ρ_2=3, ρ_3=1, (коефіцієнти при нових змінних $\mathbf{y_3, y_4, y_5}$). Вони дають значення змінних прямої задачі. Двоїсті змінні $\mathbf{y_1=2}$ та $\mathbf{y_2=6}$ є симплекс-множниками прямої задачі. У проведених обчисленнях подвійний симплекс-метод для рішення прямої задачі та симплекс-метод для рішення зворотної задачі, за суттю, ідентичні.

Завдання 3.4.

Розв'язати пряму задачу і порівняти з рішенням двоїстої задачі.

3.13. $-2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 7$

$-5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 6$

$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1.4};$

$Z = -10x_1 - 10x_2 + 6x_3 - 5x_4$ (min)

3.14. $-x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 2$

$x_1 + 7x_2 - 3x_3 - x_4 \geq -1$

$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1.4};$

$Z = 3x_1 + 42x_2 + 6x_3 - 4x_4$ (min)

3.15. $-2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 3$

$-x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq -2$

$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1.3};$

$Z = -14x_1 - 9x_2 + 27x_3$ (max)

3.16. $x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 1$

$2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \geq 2$

$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1.3};$

$Z = 15x_1 + 8x_2 - 26x_3$ (min)

3.4. Транспортна задача лінійного програмування.

Транспортною задачею лінійного програмування називають специфічну задачу пошуку найбільш економічного варіанту транспортування вантажу від кількох пунктів, де вантаж знаходився спочатку, до пунктів де його потребують споживачі. Транспортна задача це задача лінійного програмування, яку можна розв'язати звичайним симплексним методом, але її значно легше та ефективніше розв'язувати спеціальними алгоритмами, зокрема методом потенціалів.

Загальна постановка транспортної задачі має такий вигляд:

$$Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}\ x_{ij} \to (\min);$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_{ij}; i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \ge b_j; j = \overline{1,n};\ x_{ij} \ge 0,$$

де C_{ij} - коефіцієнт питомих транспортних витрат при перевезенні вантажу з пункту і до пункту j; x_{ij} - кількість вантажу, який перевозиться з пункту (i = 1,m) до пункту j (j = 1,n); a_i - потужність поставщика і; b_i - потужність споживачі j.

У тому разі, коли $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, транспортна задача є закритою.

Коли ж $\sum a_i \ne \sum b_j$ впроваджується фіктивний поставщик або споживач залежно від того, де сумарна потужність менша за розміром. До матриці коефіцієнтів питомих транспортних витрат додається стовпчик або рядок з нульовими питомими витратами C_{ij} (залежно від того, де додається фіктивний контрагент).

Розв'язання транспортної задачі складається з двох основних етапів. На першому будується початковий опорний план, на другому - пошук оптимального плану. Перший опорний план можна будувати одним з чотирьох методів: північно-західного кута, мінімального елемента, подвійної переваги та апроксимації Фогеля. Пошук оптимального плану на другому етапі треба робити з допомогою методу потенціалів. План перевезень буде оптимальним, якщо знайдено систему з (n+m) чисел α_i, β_j, які відповідають умовам

$$\alpha_i + \beta_j = C_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0$$

$$\alpha_i + \beta_j \quad C_{ij} \text{ для } x_{ij} = 0$$

або

$$\Delta_{ij} = C_{ij} = (\alpha_i + \beta_j) \quad 0$$

Приклад.

Розв'язати транспортну задачу перевезень однорідного вантажу.

- Потужності поставщиків: a_i = (40, 30, 20),
- потужності споживачів b_j = (40, 30, 40, 10).
- Матриця коефіцієнтів питомих транспортних витрат

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Перший опорний план побудуємо методом подвійної переваги. Він матиме такий вигляд (табл. 3.6.).

Таблиця 3.6.

a_i	Перевезення для b_i				
	40	30	40	10	$\propto_i$
40	[4]	30 [1]	+ [2]	-10 [1]	0
30	[5]	[2]	30 [4]	+0 [2]	1
20	20 [1]	[3]	[3]	[3]	-2
30	[0]	[0]	10 [0]	[0]	-3
β_j	3	1	3	1	

Для першого варіанту плану цільова функція

$$Z = 30\times1+10\times1+30\times4+0\times2+20\times1+20\times0+10\times0=180.$$

Для перевірки оптимального плану обчислимо значення

$$\Delta_{ij} = C_{ij} - (\alpha_i + \beta_j).$$

Серед них відберемо лише Δ_{ij}, що менше за нуль. У даному разі це всього одне значення (якщо їх було б кілька, то вибирали б максимальне за модулем). Таким чином,

$$\Delta_{1,3} = 2-(3+0) = -1$$

Побудуємо цикл у клітинці (1,3). Потім за зайнятими маршрутами або клітинками побудуємо цикл перебудови плану (його вдосконалення). Перенумеруємо вершини циклу знаками "+" і "-", починаючи з нової клітинки (1,3). Далі виберемо за маршрутом, позначеним знаком “-”, найменше число (10). Це означає, що x_{13} = 10.

Число 10 додамо до кількості вантажу в клітинках, позначених знаком ”+”, та віднімемо в клітинках, позначених знаком “-”. Після цього побачимо, що один маршрут ввійшов до плану, а один вийшов з нього. Таким чином, дістали новий план. Він має такий вигляд (табл. 2.7.).

Таблиця 3.7.

a_i	Перевезення для b_i				
	40	30	40	10	$\propto_i$
40	^{4}	-30 ^{1}	+10 ^{2}	^{1}	0
30	^{5}	+ ^{2}	-20 ^{4}	10 ^{2}	2
20	20 ^{1}	^{3}	^{3}	^{3}	-1
30	20 ^{0}	^{0}	10 ^{0}	^{0}	-2
β_j	2	1	2	1	

Знов обчислимо значення Δ_{ij}, серед яких від’ємним буде те, яке відповідає маршруту (2,3):

$$\Delta_{2,3} = 2 - 1 + 2 = -1$$

Побудуємо цикл зміни плану. Він відображений на схемі транспортної задачі. Дістанемо оптимальний розв’язок, який має такий вигляд (табл. 2.8.).

Таблиця 3.8.

a_i	Перевезення для b_i				
	40	30	40	10	$\propto_i$
40	^{4}	10 ^{1}	30 ^{2}	^{1}	0
30	^{5}	20 ^{2}	^{4}	10 ^{2}	1
20	20 ^{1}	3 ^{3}	^{3}	^{3}	-1
30	20 ^{0}	0 ^{0}	10 ^{0}	^{0}	-2

β_j	2	1	2	1	

$$Z = 10\times1 + 30\times2 + 20\times2 + 10\times2 + 20\times1 + 20\times0 + 10\times0 = 150.$$

Завдання 3.5.

Розв’язати транспортну задачу:

3.17. $a = (20,\ 10,\ 15,\ 8)$; $b = (10,\ 17,\ 15,\ 6)$;

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 16 \\ 21 & 15 & 13 & 18 \\ 17 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & 13 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

3.18. $a = (8,\ 7,\ 15,\ 15)$; $b = (6,\ 9,\ 20,\ 22)$;

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 7 & 4 \\ 9 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

3.19. $a = (80,\ 40,\ 80,\ 80)$; $b = (90,\ 60,\ 20,\ 40)$;

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Цілочисельне програмування

Приклад.

Знайти розв'язок задачі

$$Z = x_1 + 4x_2 \quad (\min),$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6,$$
$$x_i > 0, \quad j = 1.4$$
$$x_j - цілі$$

Задача розв'язується методом відтинаючих площин (метод Гоморі). На першому етапі розв'язання відкидаємо умову цілочисельності і розв'язуємо задачу звичайним симплекс-методом (табл. 4.1.)

Таблиця 4.1.

Базис	$C_{баз}$	A	1	4	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	2	-1	2	1	0	1
x_4	0	6	3	2	0	1	3
Z_j-C_j		0	-1	-4	0	0	
x_2	4	1	-1/2	1	1/2	0	-
x_4	0	4	4	0	-1	1	1
Z_j-C_j		4	-3	0	2	0	
x_2	4	3/2	0	1	3/8	1/8	
x_1	1	1	1	0	-1/4	1/4	
Z_j-C_j		7	0	0	5/4	3/4	

Здобутий план x=(1,3/2,0,0) - умовно оптимальний відносно даної початкової задачі, оскільки всі (Z_i-C_i≥0 ля всіх A_J), але не виконується умова цілочисельності змінних. На другому етапі розв'язку переходимо до розв'язання задачі з цією умовою. Запишемо перший переріз Гоморі:

$$\left(\left\{\frac{3}{8}\right\}x_3 + \left\{\frac{1}{8}\right\}x_4\right) \geq \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

або

$$\left(\left\{\frac{3}{8}\right\}x_3 + \left\{\frac{1}{8}\right\}x_4\right) \geq \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 - x_5 = \frac{1}{2};$$

$$\frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 - x_5 + W = \frac{1}{2}.$$

Додамо здобуте рівняння до двох рівнянь останньої симплексної таблиці (табл. 4.1.) дістанемо нову задачу   (табл. 4.2.). Знайдемо її розв'язок .

Таблиця 4.2.

Базис	$C_{баз}$	A	1	4	0	0	0	-M	Q_i
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	W_1	
x_1	4	3/2	0	1	3/8	1/8	0	0	4
x_2	1	1	1	0	-1/4	1/4	0	0	—
W_2	-M	1/2	0	0	3/8	1/8	-1	1	4/3
Z_j-C_j		7	0	0	5/4	3/4	0	0	
		1/2	0	0	-3/8	-3/8		0	
x_1	4	1	0	1	0	0	1		
x_2	1	4/3	1	0	0	1/3	-2/3		
x3	0	4/3	0	0	1	1/3	-8/3		
Z_j-C_j		16/3	0	0	0	1/3	10/3		

Знов дійстанемо умовно оптимальний план. Виходячи з цього перейдемо до побудови нової
задачі (табл.4.3.).

Другий переріз Гоморі має вигляд

$$\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}x_4 + \left\{-\frac{2}{3}\right\}x_5\right) \geq \left\{\frac{4}{3}\right\}$$

або після закінчення перетворювань

$$\frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 - x_6 + W_2 = \frac{1}{3}.$$

Таблиця 4.3.

Базис	$C_{баз}$	A	1	4	0	0	0	0	-M	Qi
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	W_2	
x_2	4	1	0	1	0	0	1	0	0	
x_1	1	4/3	1	0	0	1/3	-2/3	0	0	4
x3	0	4/3	0	0	1	1/3	-8/3	0	0	4
W_2	-M	1/3	0	0	0	1/3	1/3	-1	1	1
Z_j-C_j		16/3	0	0	0	1/3	10/3	0	0	
		1/3	0	0	0	-1/3	-1/3	M	0	
x_2	4	1	0	1	0	0	1	0		
x_1	1	1	1	0	0	0	-3	0		
x_3	0	1	0	0	1	0	-3	1		
x_4	0	1	0	0	0	1	1	-3		
Z_j-C_j		5	0	0	0	0	3	1		

Здобутий план буде оптимальним і одночасно відповідатиме умові цілочисельності:

$$\overline{x_{опт}} = (1,1,1,1), Z_{\max} = 5$$

Завдання 4.1.

На основі умовно-оптимального плану цілочисельних задач побудувати додаткові обмеження і приєднавши їх до плану, знайти цілочисельний розв'язок.

4.1.

C	Базис	План	-1	2	0	3	4
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1	x_1	7/4	1	1/4	-3/4	7/2	0
-5	x_5	3/2	0	1/2	5/2	-1/2	1
Z_j-C_j		-37/4	0	-19/4	-47/4	-9/4	0

4.2.

C	Базис	План	5	10	2	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_3	1/6	0	0	1	-7/3	5/6
5	x_1	1/2	1	0	0	-1/6	-2/3
Z_j-C_j		67/6	0	0	0	7/6	5/3

4.3.

C	Базис	План	1	-2	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-2	x_2	1/5	6/5	1	0	0	1/5
0	x_3	7/5	8/5	0	1	0	-13/5
0	x_4	3/5	3/5	0	0	1	2/5
Z_j-C_j		-2/6	-17/5	0	0	0	-2/5

5. Нелінійне програмування

5.1. Геометрична інтерпретація задач нелінійного програмування

Приклад.

Розв'язати задачу нелінійного програмування.

$Z = x_1 x_2 \to \max;$

$6x_1 + 6x_2 \le 36;$

$x_1 + 2x_2 \ge 2;$

$2x_1 + x_2 \le 10;$

$x_i \ge 0$

Область припустимих розв'язків системи - багатокутник ABCB. Цільова функція при сталому значенні Z- гіпербола $X_2=Z/X_1$ з центром у початку координат. При збільшенні значення Z гіпербола зміщується вгору, доки не зіткнеться з межою області припустимих розв'язків у точці M Координати цієї точки знаходимо, виходячи з того, що точка M лежить на прямій BC і є точкою дотику цієї прямої з гіперболою. Отже, кутовий коефіцієнт прямої BC збігається зі значеннями похідної функції $Z=X_1X_2$ у точці M.

Диференціюючи функцію $Z=X_1X_2$ як неявну, дістанемо дві умови, з яких знайдемо координати точки M (Рис. 5.1.)

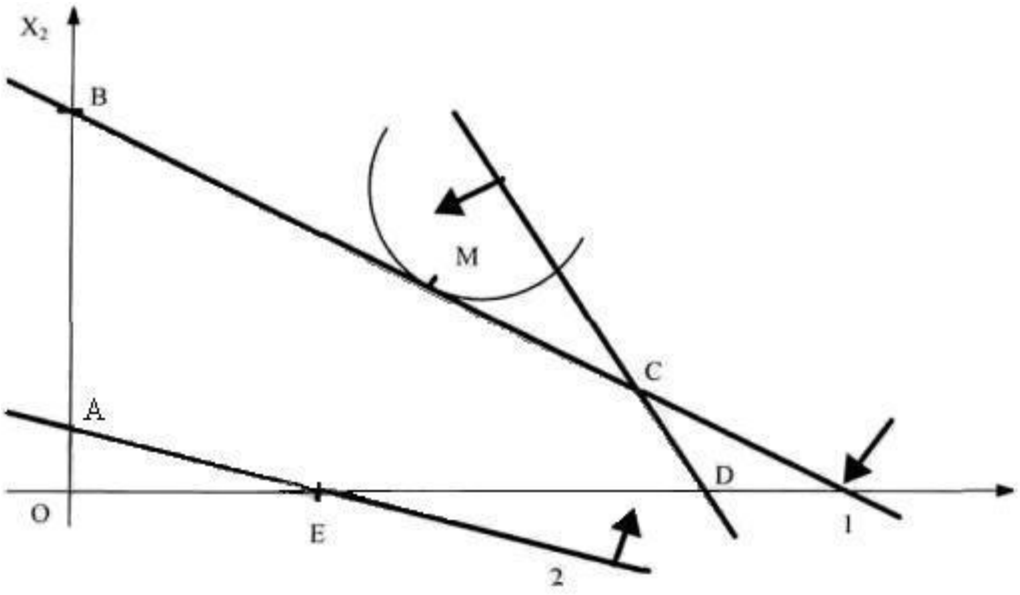

Рис. 5.1.

$$\begin{cases} X_{1m} + X_{2m} = 6 \\ \dfrac{X_{1m}}{X_{2m}} = 2 \end{cases}$$

$M(3{,}3); Z_{\max} = 9$

Завдання 5.1.

розв'язати графічним методом (знайти найбільше і найменше значення функції) задачі нелінійного програмування.

5.1.

$$\begin{aligned} &Z = (x_1 - 2)^2 + x_2; \\ &4x_1 + 8x_2 \le 36; \\ &10x_1 + 5x_2 \le 54; \\ &x_i \ge 0 \end{aligned}$$

5.2.

$$\begin{aligned} &Z = 3x_1 + x_2^2; \\ &(x_1 - 3) + (x_2 - 6) \ge 4; \\ &(x_1 - 3) + (x_2 - 6) \le 12; \\ &x_1 \ge 2,\ x_2 \ge 5 \end{aligned}$$

5.3.

$$\begin{aligned} &Z = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2; \\ &3x_1 - x_2 \ge 1; \\ &-x_1 + 3x_2 \le 13; \\ &2x_1 - x_2 \le 9; \\ &x_1 + 4x_2 \ge 9; \\ &x_i \ge 0 \end{aligned}$$

5.4.

$$\begin{aligned} &Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2; \\ &3x_1 - x_2 \ge 1; \\ &-x_1 + 3x_2 \le 13; \\ &2x_1 - x_2 \le 9; \\ &x_1 + 4x_2 \ge 9; \\ &x_i \ge 0 \end{aligned}$$

5.2. Квадратичне програмування

Приклад.

Розв'язати задачу квадратичного програмування, використавши метод

множників

Лагранжа.

$$Z = -(x_1 - 1)^2 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 \le 4 \\ X_1 \le 3 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

Квадратична форма функції Z є від'ємно визначена, тобто вгнута. Оптимальний розв'язок цієї задачі можна знайти як опорний план задачі з обмеженнями

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 = 4 \\ X_1 + X_4 = 3 \end{cases}$$
$$X_j \ge 0, \ j = \overline{1.4}$$

Склавши систему додаткових обмежень вигляду

$$\frac{\partial Z}{\partial X_j} - \sum_i \lambda_i \cdot a_{ij} + u_i = 0$$

за умови $x_j * u_j = 0$ (для *всіх j),* додаткові обмеження мають вигляд

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2 - \lambda_1 - \lambda_2 + u_1 &= 0; \\ 2 - 2\lambda_1 + u_2 &= 0; \\ -\lambda_1 + u_3 &= 0; \\ -\lambda_2 + u_4 &= 0; \end{aligned}$$

Виключимо з цієї системи λ_1 і λ_2.

Після простих перетворень дістанемо систему, опорний розв'язок якої слід знайти (табл.5.1.).

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_3 = 8; \\ &x_1 + x_4 = 9; \\ &2x_1 - u_1 + u_3 + u_4 = 2; \\ &2x_1 - u_2 + 2u_3 = 2; \\ &x_i \ge 0, u_i \ge 0; \\ &x_i \cdot u_i = 0 \end{aligned}$$

Таблиця 5.1.

x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	u_3	u_4	b_i
1	2	1	0	0	0	0	0	8
1	0	0	1	0	0	0	0	9
2	0	0	0	-1	0	1	1	2

2	0	0	0	0	-1	2	0	2
0	2	1	0	1/2	0	-1/2	-1/2	7
0	0	0	1	1/2	0	-1/2	-1/2	8
1	0	0	0	-1/2	0	1/2	1/2	1
0	0	0	0	0	-1	2	0	2
0	1	1/2	0	1/4	0	-1/4	-1/4	7/2
0	0	0	1	1/2	0	-1/2	-1/2	8
1	0	0	0	-1/2	0	1/2	1/2	1
0	0	0	0	0	-1	2	0	2
0	1	1/2	0	1/4	-1/8	0	-1/4	15/4
0	0	0	1	1/2	-1/4	0	-1/2	17/2
1	0	0	0	-1/2	1/4	0	1/2	1/2
0	0	0	0	0	-1/2	1	0	1

Розв'язання.

$x_1 = 1/2$, $x_2 = 15/4$, $x_3 = 0$, $x_4 = 17/2$, $Z = 8\,(\max)$

Завдання 5.2.

Розв'язати задачі квадратичного програмування.

5.5.

$$Z = -x_1^2 + 5x_1 + x_2 \to \max;$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 8;$$
$$2x_1 + x_2 \le 12;$$
$$x_i \ge 0.$$

5.6.

$$Z = x_1^2 - 4x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 \to \min;$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 12;$$
$$2x_1 + x_2 \le 12;$$
$$x_i \ge 0.$$

5.7.

$$Z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \min;$$
$$-2x_1 + x_2 \le 2;$$
$$x_1 + 3x_2 \le 9;$$
$$x_i \ge 0.$$

5.8.

$$Z = (x_1 - 3)^2 + x_2 \to \max;$$
$$-2x_1 + 4x_2 \le 8;$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 12;$$
$$x_i \ge 0.$$

6. Динамічне програмування

Приклад.

Для збільшення випуску продукції трьох підприємств галузі виділено x_i = .700 тис. гри.

Використання кожним підприємством x_i тис. грн. зазначених коштів забезпечує приріст виробництва продукції $f_i\ (x_i)$ (табл. 6.1.)

Таблиця 6.1.

x_i тис.грн		$f_i\ (x_i)$	
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Для розв'язання задачі треба скласти рекурентні співвідношення Беллмана. У цьому разі ці співвідношення зводять до таких функціональних рівнянь:

$$\varphi_1(x) = \max\{f_1(x_1)\};$$
$$0 \le x_1 \le x$$
$$\varphi_2(x) = \max\{f_2(x_2)\} + \varphi_1\{(x - x_2)\};$$
$$0 \le x_2 \le x$$
****
$$\varphi_{n-1}(x) = \max\{f_{n-1}(x_{n-1})\} + \varphi_{n-2}\{(x - x_{n-1})\};$$
$$0 \le x_{n-1} \le x$$

Функції $\varphi_i(x), i = 1, n$ -1 визначають максимальний приріст виробництва продукції при

відповідному розподілі x тис. грн., коштів між підприємствами. Використовуючи вихідні дані і рекурентні співвідношення, визначимо спочатку умовно-оптимальний, а потім оптимальний розподіл.

Спочатку визначимо умовно-оптимальні кошти x виділені першому підприємству. Для цього знайдемо значення для кожного x:

$$\varphi_1(0) = 0 \quad x_1 = 0;$$

$$\varphi_1(100) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \end{Bmatrix} = 30 \quad x_1 = 100 \qquad \varphi_1(200) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \end{Bmatrix} = 50 \quad x_1 = 200$$

$$\varphi_1(300) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \end{Bmatrix} = 90 \quad x_1 = 300$$

$$\varphi_1(400) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \end{Bmatrix} = 110 \quad x_1 = 400$$

$$\varphi_1(500) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \end{Bmatrix} = 170 \quad x_1 = 500$$

$$\varphi_1(600) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ 180 \end{Bmatrix} = 180 \quad x_1 = 600$$

$$\varphi_1(700) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ 180 \\ 210 \end{Bmatrix} = 210 \quad x_1 = 700$$

Результати запишемо в табл. 6.2.

Таблиця 6.2.

x	φ_i(x) тис. грн.	x_i
0	0	0
100	30	100
200	50	200
300	90	300
400	100	400
500	170	500
600	180	600
700	210	700

Використовуючи дані табл. 6.1. і 6.2., визначаємо умовно-оптимальну кількість коштів, виділених другому підприємству:

$\varphi_2(0) = 0 \quad x_2 = 0;$

$$\varphi_2(100) = \max\begin{Bmatrix} 0+30 \\ 50+0 \end{Bmatrix} = 50 \quad x_2 = 100$$

$$\varphi_2(200) = \max\begin{Bmatrix} 0+50 \\ 50+30 \\ 80+0 \end{Bmatrix} = 80 \quad x_2 = 200$$

$$\varphi_2(300) = \max\begin{Bmatrix} 0+90 \\ 50+50 \\ 80+30 \\ 90+0 \end{Bmatrix} = 110 \quad x_2 = 300$$

$$\varphi_2(400) = \max\begin{Bmatrix} 0+110 \\ 50+90 \\ 80+50 \\ 90+30 \\ 150+0 \end{Bmatrix} = 150 \quad x_2 = 400$$

$$\varphi_2(500) = \max\begin{Bmatrix} 0+170 \\ 50+110 \\ 80+90 \\ 90+50 \\ 150+30 \\ 190+0 \end{Bmatrix} = 190 \quad x_2 = 500$$

$$\varphi_2(600) = \max\begin{Bmatrix} 0+180 \\ 50+170 \\ 80+110 \\ 90+90 \\ 150+50 \\ 190+30 \\ 210+0 \end{Bmatrix} = 220 \quad x_2 = 600$$

$$\varphi_2(700) = \max\begin{Bmatrix} 0+210 \\ 50+180 \\ 80+170 \\ 90+110 \\ 150+90 \\ 190+50 \\ 210+30 \\ 220+0 \end{Bmatrix} = 250 \quad x_2 = 700$$

Результати розрахунків записуємо в табл. 6.3.

Таблиця 6.3.

x	$\varphi_2(x)$	x_2
0	0	0
100	50	100
200	80	100
300	110	200
400	150	400
500	190	500
600	220	100
700	250	200

Використовуючи дані табл. 6.1.- 6.3., знаходимо

$$\varphi_3(x) = \max\{f_3(x_3)\} + \varphi_2\{(x - x_3)\};$$
$$0 \le x_3 \le x.$$

Оскільки в цьому разі підприємств три, то робимо розрахунок лише для одного значення x =700:

$$\varphi_3(700) = \max\begin{Bmatrix} 0+250 \\ 40+220 \\ 50+190 \\ 110+150 \\ 120+110 \\ 180+80 \\ 220+50 \\ 240+0 \end{Bmatrix} = 270 \quad x_3 = 700$$

Отже, максимальний приріст виробництва продукції дорівнює 270 тис. грн. Це буває тоді, коли третьому підприємству виділяється 600 тис. грн., а першому й другому - 100 тис.грн.

Розв'язати задачі динамічного програмування.

А) Для збільшення виробництва продукції підприємствам виділені капіталовкладення 8
тис. грн. (завдання 6.1.- 6.4.). Використання і-м підприємством x_1 тис. грн. забезпечує
приріст виробництва продукції $f_1(x_1)$.

Визначити розподіл капіталовкладень між підприємствами, який би забезпечив максимальне збільшення виробництва продукції.

Завдання 6.1.

x_1, тис.грн.	$f_1(x_1)$ залежно від капіталовкладень, тис. грн. по підприємствах			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

Завдання 6.2.

x_1, тис.грн.	$f_1(x_1)$ залежно від капіталовкладень, тис. грн. по підприємствах		
	1	2	3
0	0	0	0
50	20	40	30
100	50	60	40
150	90	100	80
200	110	120	100

Завдання 6.3.

x_1, тис.грн.	$f_1(x_1)$ залежно від капіталовкладень, тис. грн. по підприємствах		
	1	2	3
0	0	0	0
10	8	5	3
20	12	7	5
30	14	10	10
40	16	17	14
50	19	21	24

Завдання 6.4.

x_1, тис.грн.	$f_1(x_1)$ залежно від капіталовкладень, тис. грн. по підприємствах			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
20	8	7	6	12
40	11	9	10	14
60	14	13	12	17
80	20	16	19	22
100	26	18	25	24

Б) Для видів робіт направляються x_i осіб. Попередня оцінка ефекту виконання робіт визначається лінійною функцією $f_1(x_1)$ (задания 6.5.-6.7.). Скільки робітників доцільно направити на виконання кожної роботи, щоб дістати максимальний ефект?

Завдання 6.5.

x_1, тис.грн.	$f_1(x_1)$ для підприємства		
	1	2	3
0	0	0	0
1	50	30	200
2	100	60	350
3	150	120	450
4	250	180	550
5	350	300	600
6	500	550	650

Завдання 6.6.

x_1, тис.грн.	$f_1(x_1)$ для підприємства

	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	30	20	40	10
2	60	40	60	30
3	90	80	80	60
4	120	80	140	100
5	150	80	200	140

Завдання 6.7.

x_1, тис.грн.	$f_1(x_1)$ для підприємства			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	100	70	100	80
2	200	140	200	100
3	250	210	300	120
4	300	250	350	200
5	320	300	400	280

Список літератури

1. Бояринов А.И., Кафаров В.В. Методы оптимизации в химической технологи. – М., Химия,1975. – 576с.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. - М.: Высшая школа, 1986.
3. Таха Т. Введение в исследование операций; В двух книгах. – М.:Мир, 1985. – 479 с.
4. Банди Б. Основы линейного программирования. – М. :Радио и связь, 1989. –176 с.
5. Ладієва Л.Р. Оптимальне керування системами.: Навчальний посібник. -К.НМЦ ВО, 2000- 187с.
6. Ладієва Л. Р. Оптимізація технологічних процесів. Навч.посіб. – К .: ІВЦ «Політехніка», 2004.-192с.