МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу «Моделювання і оптимізація систем керування»

Київ НТУУ «КПІ» 1996

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

Методичні вказівки

до лабораторних робіт з курсу

“Моделювання і оптимізація систем керування” для студентів спеціальності

“Автоматизація технологічних процесів та виробництв”

Затверджено

на засіданні кафедри

автоматизації хімічних

виробництв

Протокол №8 від 13.03.1996

Київ НТУУ “КПІ” 1996

Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу

“Моделювання і оптимізація систем керування” для
студентів спеціальності “Автоматизація технологічних
процесів та виробництв”
/Укл. Л. Р. Ладієва. -К. : НТУУ, “КПІ” ,1996. – 36 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки

до лабораторних робіт з курсу

“Моделювання і оптимізація систем керування”

для студентів спеціальності “Автоматизація технологічних процесів та виробництв”

Укладач	Ладієва Леся Ростиславівна
Відповідальний редактор	М. З. Кваско
Рецензенти:	А. І. Кубрак
	В. М. Царенко

Редактори:

М. В. Прокопенко

О. С. Кравченко

Д. С. Балинська

Лабораторна робота № 1

Дослідження оптимальної системи керування з застосуванням варіаційного числення

Мета роботи : вивчити та отримати практичні навички дослідження оптимальної системи керування, використовуючи варіаційне числення.

Теоретичні відомості

Відома постановка задачі оптимального керування динамічними системами, що полягає в знаходженні траєкторії **U** (t) { $t_0 < t < t_f$ } , яка приводить стан системи **X** (t) за допомогою мінімізації функціоналу вартості або якості

$$\mathbf{I} = G[\mathbf{x}(t), t]\Big|_{t=t_0}^{t=t_f} + \int_{t=t_0}^{t=t_f} F[\mathbf{x}(t), \mathbf{U}(t), t]dt.$$

з заданими початковими умовами **X**(t) = $\mathbf{X_0}$ в кінцеву умову **N**[**X**(t_f),t_f] = 0 оптимальним способом. З точки зору використання є два альтернативних варіанти отримання оптимальних результатів.

У випадку оптимального керування одержуємо оптимальну траєкторію керування, як постійну функцію часу, та в часовому проміжку оптимізації для реального процесу. Очевидно, що ця оптимальна траєкторія залежить від заданого початкового стану $\mathbf{X}_0$. З-за дії можливих перешкод або неточностей моделі, на які не зважають при оптимізації, буде перебігати стан **X**(t) , що відрізняється від очікуваного, отриманого по моделі **X** (t). При цьому також можливе відхилення кінцевих умов.

У випадку оптимального регулювання з необхідних умов випливає рішення так званої синтез-проблеми оптимального закону регулювання

U (t) = **R*** [**X** (t), t].

Ця формула використовується для прямих розрахунків керуючого впливу **U**(t) за виміряними величинами станів **X**(t) . Істотна властивість оптимального регулювання випливає з того, що закон регулювання є незалежним відносно можливих початкових станів

$\mathbf{X_0}$. За відсутності несподіваних перешкод або неточностей моделі оптимальне керування та оптимальне регулювання для заданих початкових станів $\mathbf{X_0}$ дає однакові результати. Установлено, що при заданій постановці проблеми використання оптимального закону регулювання з-за своєї універсальності та легкості обчислень з точки зору практичного використання є більш бажаним, ніж застосування оптимальної траєкторії керування.

Важливим спеціальним випадком оптимального керування динамічними системами є лінійно-квадратична (ЛК) оптимізація (ЛКО), яка пов'язана з лінійними рівняннями станів та квадратичними функціоналами якості.

Розглянемо задачу оптимального керування , припустимо, що потрібно мінімізувати функцію вартості / при фіксованому t_f /

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\int_{t_f}^{t_f} [\mathbf{X}^T(t)\cdot\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^T(t)\cdot\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{U}(t)]dt \ , \qquad (1.1)$$

для узагальненої системи зі змінними в часі параметрами і яка задається рівнянням

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\cdot\mathbf{U}(t) \qquad (1.2)$$

за умови, що $\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X_0}$- вектор початкового стану.

Об`єднаємо функцію вартості та обмеження у формі диференційного рівняння за допомогою множника Лагранжа. Тоді

$$\mathbf{I'} = \int_{t_o}^{t_f}\left\{\frac{1}{2}\mathbf{X}^T(t)\cdot\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{X}(t) + \frac{1}{2}\cdot\mathbf{U}^T(t)\cdot\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{U}(t) + \lambda^{\mathrm{T}}(t)\left[\mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\cdot\mathbf{U}(t) - \mathbf{X'}\right]\right\}dt$$

(1.3)

Точний характер використаної функції вартості залежить від вигляду конкретної задачі, що розв`язується . Тому вагові матриці **R**(t) та **Q**(t) звичайно обираються з фізичних міркувань. Крім того, без втрати спільності припускається, що **R**(t) та **Q**(t) - симетричні. Вектор керування **U**(t) розглядаємо так само, якби це був вектор стану. Далі скористаємось рівняннями Ейлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{X}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X'}\right) = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{U}'}\right) = 0 \qquad (1.4)$$

де

$$\mathbf{\Phi} = \frac{1}{2}\mathbf{X}^{T}(t)\cdot\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{X}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{U}^{T}(t)\cdot\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{U}(t) + \lambda^{T}(t)\,[\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) - \mathbf{X}'],$$

Тому що
$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}^{T}(t)\lambda(t), \qquad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{X}'} = -\lambda(t)$$
$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{B}^{T}(t)\lambda(t), \qquad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{U}'} = 0$$

то рівняння Ейлера-Лагранжа для цієї задачі мають вигляд: $\lambda\mathbf{l}' = -\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{(t)}\lambda(t) - \mathbf{Q(t)X}(t)$ (1.5) $\qquad \mathbf{U}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\lambda(t)$ (1.6)

Через те , що $\mathbf{X}(t_f)$ не визначений, умова трансверсальності в момент досягнення

$$\left.\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{X}}\right|_{t_f} = \mathbf{l}(t_f) = 0. \qquad (1.7)$$

Відзначимо, що рівняння для оптимального керування можливе за умови , що існує матриця , обернена матриці $\mathbf{R}(t)$.

Для отримання невід`ємної другої похідної необхідно, щоб $\mathbf{R}(t)$ та $\mathbf{Q}(t)$ були невід`ємно визначені. Таким чином, зрозуміло, що $\mathbf{R}(t)$ повинна бути додатньо визначеною.

Стан системи $\mathbf{X}(t_0)$ заданий при $t=t_0$, тоді як спряжений вектор $\lambda(t)$ визначений в момент досягнення $\lambda(t_f)=0$. Таким чином , перш ніж визначати оптимальне керування, необхідно розв`язати двоточкову крайову задачу (ДТКЗ).

З`ясуємо, чи можливо перетворити керування (1.6) по замкненому контуру $\mathbf{U}(t)=\mathbf{K}(t)\mathbf{X}(t)$, тобто знайдемо оптимальний закон регулювання. Припустимо, що рішення для спряженого випадку

$$\lambda(t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t).$$

Підставляючи (1.8) в (1.2) та (1.6) , отримаємо

$$\mathbf{X}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)-\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-\lambda}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t). \qquad (1.9)$$

Крім того, з (1.8) та (1.5) випливає

$\boldsymbol{\lambda}' = \mathbf{P}'\mathbf{X}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{X}' = \mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t).$ (1.10)

Об`єднуючи (1.9) та (1.10) одержуємо

$[\mathbf{P}' + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{P}(t) - P(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-\lambda}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t)]\mathbf{X}(t) = 0.$ (1.11)

Оскільки ця рівність повинна виконуватись для ненульових x(t), то множник [•] , що стоїть перед x(t) , повинен дорівнювати нулю. Таким чином, матриця **P**, що є симетричною матрицею розмірності (nxn) і яка містить в собі n(n+1)/2 різних членів , повинна задовольняти матричне рівняння Ріккаті:

$\mathbf{P}' = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t),$ (1.12)

при граничній умові

$\mathbf{P}(t_f) = 0.$

Таким чином, розв`язання матричного рівняння Ріккаті можливо проводити в оберненому часі, від t_f до t_0, побудувавши матрицю

$\mathbf{K}(t) = -\mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)$ (1.13)

і потім одержавши керування по замкненому контуру

$\mathbf{U}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{X}(t).$ (1.14)

Приклад:

Синтезувати систему оптимального керування об`єктом

$T_2X'' + T_1X' + X = kU, \quad X(t_0) = X_0$

з критерієм

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}(x^2 + rU^2)dt$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{1}{T_2}x_1 - \frac{T_1}{T_2}x_2 + \frac{k}{T_2}U \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_2} & -\frac{T_1}{T_2} \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T_2} \end{bmatrix}$$

Далі використаємо рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$\Phi=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}rU^2+\lambda_1(x_2-x_1')+\lambda_2(-\frac{1}{T_2}x_1-\frac{T_1}{T_2}x_2+\frac{k}{T_2}U-x_2')$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1'}\right)=0,\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2'}\right)=0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=x_1-\frac{1}{T_2}\lambda_2,\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_1'}=-\lambda_1,\qquad \lambda'_1=\frac{1}{T_2}\lambda_2-x1,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=\lambda_1-\frac{T_1}{T_2}\lambda_2,\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x_2'}=-\lambda_2,\quad \lambda'_2=-\lambda'_1+\frac{T_1}{T_2}\lambda_2$$

аб о $\quad \lambda'=A^T\lambda(t)-Q(t)X(t)$

То ді $$\lambda'=\begin{bmatrix}\lambda'_1\\ \lambda'_2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{T_2}\\ 1 & -\frac{1}{T_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda 1\\ \lambda_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda'_1=\frac{1}{T_2}\lambda_2-x_2,\\ \lambda'_2=-\lambda'_1+\frac{T_1}{T_2}\lambda_2,\end{cases}\qquad \begin{aligned}&\frac{\partial\Phi}{\partial U}=rU+\lambda_2\frac{k}{T_2}=0\\ &U=-\frac{1}{r}\frac{k}{T_2}\lambda_2\end{aligned}$$

Для оптимального закону регулювання

$$U=-\frac{1}{r}\frac{k}{T_2}(P_{12}x_1+P_{22}x_2).$$

Матричне рівняння Ріккаті

$$P'=-PA-A^TP+PBR^{-1}B^TP-Q$$

запишемо в вигляді

$$\begin{bmatrix} P'_{11} & P'_{12} \\ P'_{21} & P'_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{T_2} & -\dfrac{T_1}{T_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{T_2} \\ 1 & -\dfrac{T_1}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k}{T_2} \end{bmatrix} r^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{k}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad r = 1$$

$$\begin{cases} P'_{11} = \dfrac{2}{T_2} P_{12} + \left(\dfrac{k}{T_2}\right)^2 P_{12}^2 - 1 & P_{11}(t_f) = 0 \\ P'_{12} = -P_{11} + \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right) P_{12} + \dfrac{1}{T_2} P_{22} + \left(\dfrac{k}{T_2}\right)^2 P_{12} P_{22} & P_{12}(t_f) = 0 \\ P'_{22} = \dfrac{2T_1}{T_2} P_{22} + \left(\dfrac{k}{T_2}\right)^2 P_{22}^2 - 2P_{12} & P_{22}(t_f) = 0 \end{cases}$$

$$U^*(t) = -\frac{1}{r}\frac{k}{T_2}(P_{12}x_1 + P_{22}x_2)$$

Завдання

1. Синтезувати систему оптимального керування об`єктом

X'=AX+BU

з критерієм у вигляді:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T(t_f)\mathbf{S}\mathbf{X}(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} (\mathbf{X^T Q X} + \mathbf{U^T R U})dt$$

використавши варіаційне числення.

2. Наведіть основні математичні співвідношення, що визначають алгоритм оптимального керування.

3. Для визначення оптимального керування знайти початкову траєкторію та розв`язати спряжені рівняння в оберненому часі з граничними умовами.

4. Знайти закон оптимального керування **U**(t) та оптимальну траєкторію **X**(t). За результатами розв`язання задачі на ЕОМ побудувати графіки **U**опт(t), **X**(t).

5. Для визначення оптимального закону регулювання розв`язати в оберненому часі рівняння Ріккаті. За результатами розв`язання задачі на ЕОМ побудувати графіки **U**опт(t), **X**(t), **P**(t).

6. Порівняти отримані значення показника якості для оптимальної системи керування та оптимальної системи регулювання.

7. Сформулювати основні труднощі, що виникають при розв`язанні задачі оптимального керування.

Контрольні запитання

1. Основні положення варіаційного числення.

2. Які комбінації граничних умов можливі ? Умови трансверсальності.

3. Достатні умови існування екстремума.

4. Методи рішення задач з обмеженнями в формі нерівностей.

Лабораторна работа №2

Дослідження оптимальної системи керування із зворотним зв'язком з використанням принципу максимуму.

Мета роботи: вивчити оптимальні закони регулювання , застосувавши принцип максимуму.

Теоретичні відомості

Почнемо дослідження окремої задачі керування, розв`язання якої дає закон лінійного керування зі зворотним зв`язком. Хай існує лінійна система, що характеризується диференційним рівнянням

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)*\mathbf{X} + \mathbf{B}(t)*\mathbf{U}, \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \tag{2.1}$$

і потрібно знайти керування, що мінімізує функцію вартості (при фіксованому t_f).

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} * \mathbf{x}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t_f}) * \mathbf{S} * \mathbf{X}(t_f) + \frac{1}{2} * \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) * \mathbf{Q}(t) * \mathbf{X}(t) * \mathbf{U}^T(t) * \mathbf{R}(t) * \mathbf{U}(t)] dt \tag{2.2}$$

Зрозуміло, що без втрати єдності можна припустити, що матриці **Q**, **R**, **S** - симетричні. Рішення цієї задачі можливо отримати за допомогою принципу максимуму або рівняння Гамільтона-Якобі.

Використаємо перший метод. Гамільтоніан має вигляд:

$$\mathbf{H}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \lambda(t), t] = 1/2*\mathbf{X}^T*\mathbf{Q}*\mathbf{X} + 1/2*\mathbf{U}^T*\mathbf{R}*\mathbf{U} + \lambda^T*\mathbf{A}*\mathbf{X} + \lambda^T*\mathbf{B}*\mathbf{U}\ . \tag{2.3}$$

Для того, аби скористатися принципом максимуму, необхідно,щоб для оптимального керування

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{U}} = 0 = \mathbf{R}(\mathbf{t})\mathbf{U}(t) + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}(t)\lambda(t) \tag{2.4}$$

та

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}} = -\lambda' = \mathbf{Q(t)X}(t) + \mathbf{A^T(t)}\lambda(t) \qquad (2.5)$$

при граничній умові

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X(t_f)}} = \mathbf{SX}(t_f)\ . \qquad (2.6)$$

Далі вважаємо , що

$$\mathbf{U}(t)=-\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\lambda(t) \qquad (2.7)$$

та з`ясуємо, чи можна перетворити цей вираз в керування по замкненому контуру. Припустимо , що рішення для спряженого випадку аналогічно (2.6) :

$$\lambda(t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t)\ . \qquad (2.8)$$

Підставляючи (2.8) в (2.1) та (2.7) отримаємо

$$\mathbf{X}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)-\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t)\ . \qquad (2.9)$$

Крім того, з (2.8) та (2.5) випливає

$$\lambda'=\mathbf{P}'\mathbf{X}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{X}'=-\mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t)-\mathbf{A}^{T}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t)\ . \qquad (2.10)$$

Об`єднуючи (2.9) та (2.10), одержуємо

$$[\mathbf{P}'+\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)+\mathbf{A}^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{P}(t)-\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{--\lambda}(t)\mathbf{B}^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{P}(t)+\mathbf{Q}(t)]\mathbf{X}(t)=0\ . \qquad (2.11)$$

Оскільки це рівняння повинно виконуватись для ненульових **X**(t), множник, що стоїть перед **X**(t), повинен дорівнювати нулю.

Таким чином, матриця **P** , яка є симетричною матрицею розмірності (n x n) і містить в собі n(n+n)/2 різних членів, повинна задовольняти матричне рівняння Ріккаті :

$$\mathbf{P}'=-\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}^{T}(t)\mathbf{p}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-\lambda}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}t)-\mathbf{Q}(t) \qquad (2.12)$$

при граничній умові, заданої (2.6) та (2.8) :

$$\mathbf{P}(t_f)=\mathbf{S}\ . \qquad (2.13)$$

Таким чином розв`язання матричного рівняння Ріккаті можна провести у зворотному напрямку, від t_f до t_0 , побудувавши матрицю

$\mathbf{K}(t)=-\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}(t)$ (2.14)

і потім одержавши керування по замкненому контуру з

$\mathbf{U}(t)=\mathbf{K}(t)\mathbf{X}(t)$. (2.15)

Важливо відмітити, що всі складові вектора стана повинні бути досяжними. Отримані залежності визначають пропорційний лінійний регулятор з залежним від часу матричним коефіцієнтом підсилення **K**(t).

Цей регулятор мінімізує функцію вартості на траєкторіях системи.

При цьому :

1. Матричний коефіцієнт підсилення може бути визначений один раз поза контуром керування, тому що він не залежить від **X**(t) та від **U**(t) ; для визначення K(t) необхідно розв`язати рівняння Ріккаті в зворотному часі.

2. При постійних матрицях **A, B, R, Q** та при $t\to\infty$ **P**(t) прагне до усталеного значення , яке можна знайти при розв`язанні алгебраїчного матричного рівняння:

$$\mathbf{PBR^{-1}B^{T}P-PA-A^{T}P-Q=}0 \quad . \qquad (2.16)$$

3. З`ясуємо зміст критерію якості - функції вартості. Зрозуміло, що квадратичне зваження кінцевого стану дозволяє досягнути бажаної якості керування, однак квадратичне зваження не настільки обгрунтовано, особливо якщо вартість ресурсів керування невелика. У деяких випадках квадратичне зваження замінює собою явні обмеження на величину керуючих впливів і дозволяє отримати оптимальний закон зворотного зв`язку в аналітичному вигляді. Крім того, задання дуже великих вагових матриць **R** викликає відхилення фактичного кінцевого стану від заданого, а дуже малих - приводить до неприпустимо великих значень **U**(t).

Основними обмеженнями є умова додатної визначеності **R** та неможливість задання явних обмежень на **X**(t) та **U**(t).

4. Якщо ввести більш загальний, ніж функція вартості, критерій якості

$$\mathbf{I}=\frac{1}{2}\mathbf{X^{T}SX}\Big|_{t=t_f}+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(\mathbf{X^{T}}\mathbf{U}^{T})\begin{bmatrix}\mathbf{Q(t)} & \mathbf{N(t)}\\ \mathbf{N^{T}(t)} & \mathbf{R(t)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{U}\end{bmatrix}dt\ , \qquad (2.17)$$

який враховує взаємозв`язок між керуваннями та станами, то можна показати, що оптимальний регулятор визначається, як і раніше, виразом

U(t) = -**K**(t)***X**(t) з коефіцієнтом підсилення

$$\mathbf{K}(t)=\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{N}^T+\mathbf{B}^T\mathbf{P}), \qquad (2.18)$$

причому P визначається рівнянням Ріккаті

$$\mathbf{P}'=-\mathbf{PA}-\mathbf{A}^T\mathbf{P}+(\mathbf{PB}+\mathbf{N})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{N}^T+\mathbf{B}^T\mathbf{P})-\mathbf{Q}, \qquad (2.19)$$

$$\mathbf{P}(t_f)=\mathbf{S}, \qquad (2.20)$$

цей більш загальний вираз для оптимального закону регулювання може бути використаний для синтезу нелінійних регуляторів.

Можна помітити, що задачі синтезу оптимального в квадратичному значенні закону керування для лінійної системи мають рішення в вигляді пропорційних регуляторів, які, як відомо з класичної теорії керування, не забезпечують відстеження зміни установок або збурюючих впливів по навантаженню в системі.

Тому бажано переформулювати постановку задачі синтезу таким чином, щоб у керуванні з`явилася інтегральна складова, яка знижує помилки регулювання. це можна зробити декількома способами.

Один з них - введення похідної **U** безпосередньо в критерій оптимальності:

$$\mathbf{I}=\frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{S}\mathbf{X}(t_f)+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}(\mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{X}+\mathbf{U}'^T\mathbf{R}\mathbf{U}')dt\ . \qquad (2.21)$$

При цьому необхідно продиференціювати рівняння динаміки процесу :

$$\mathbf{X}''=\mathbf{A}\mathbf{X}'+\mathbf{B}\mathbf{U}'\ .$$

Після заміни змінних

$$\mathbf{V(t)}=\mathbf{U}'\ ;\quad \mathbf{W}_1=\mathbf{X}_1;\quad \mathbf{W}_2=\mathbf{X}';\quad \mathbf{W}=\begin{bmatrix}\mathbf{W}_1\\ \mathrm{L}\\ \mathbf{W}_n\end{bmatrix} \qquad (2.22)$$

перейдемо до рівняння

$$\mathbf{W}' = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & A \end{bmatrix} \mathbf{W} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \mathbf{V} \qquad (2.23)$$

та критерію оптимальності

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{W}^T \begin{bmatrix} S_f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{W} \right)_{t=t_f} + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left(\mathbf{W}^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{W} + \mathbf{V}^\mathbf{T}\mathbf{R}\mathbf{V} \right) dt \ . \qquad (2.24)$$

Використавши вираз оптимального закону керування (2.14) , отримаємо

$$\mathbf{V}(t) = -k(t)\mathbf{W} = -\begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W_1} \\ \vdots \\ \mathbf{W_2} \end{bmatrix} \ , \qquad (2.25)$$

або через вихідні змінні

$$\mathbf{U}(t) = -k_2\mathbf{X}(t) - \int_0^{t_f} (k_1 - k_2')\mathbf{X}(t)dt \ , \qquad (2.26)$$

що задає складний-таки пропорційно-інтегральний регулятор.

В усталеному стані при $t_f \to \infty$ k_1 та k_2 будуть постійними, і оптимальний регулятор прийме вигляд

$$\mathbf{U}(t) = -k_2\mathbf{X}(t) - k_1\int_0^{t_f} \mathbf{X}(t)dt \ , \qquad (2.27)$$

тобто буде звичайним ПІ-регулятором.

Приведений аналіз, між іншим, залишає нез`ясованим фізичне значення мінімізації похідної керування у виразі (2.21) та зв`язок її з якістю регулювання.

Інший спосіб одержання інтегральної складової - розширення стану шляхом додавання до n початкових змінних p нових змінних

Z(t) , де

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{C} * \mathbf{X} \ , \qquad (2.28)$$

тобто змінні стану, для яких бажано мати інтегральний керуючий вплив.

Розширений стан $\hat{X}$ тепер є (n + p) -мірним вектором

$\mathbf{X} = \mathbf{X}$,

$\mathbf{Z}$

а критерій оптимальності задається рівнянням

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}\mathbf{X}(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}\mathbf{U})dt \quad . \tag{2.29}$$

Відповідний оптимальний регулятор має вигляд

$$\mathbf{U}(t) = -k_1\mathbf{X}(t) - k_2C\int\mathbf{X}dt = k_1\mathbf{X} - k_2\mathbf{Z} \quad .$$

Необхідною умовою існування такого регулятора є виконання умови, що число змінних стану, для яких вводиться інтегральний керуючий вплив, не може бути більше числа змінних керування.

Якщо вихідною величиною системи є стан, що спостерігається,то рівняння вимірювання

$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{X}(t)$,

де $\mathbf{Y}(t)$ - вектор, що спостерігається, $q < n$, та вектор керування:

$$\mathbf{U}(t) = -k_1\mathbf{X}(t) - k_2\int\mathbf{Y}(t)dt$$

Ще один спосіб синтезу оптимального ПІ-регулятора пов`язаний з теорією стохастичного керування , де інтегральна складова з`являється як засіб придушення випадкових завад.

Завдання

1. Провести дослідження поведінки системи керування, синтезованої за схемою з негативним зворотним зв`язком по стану, використавши лінійний регулятор. Виконати розрахунки варіюючи задані додатньо визначені матриці **Q** та **R**. За результатами розв`язання задачі побудувати графіки функцій **U**(t), **X**(t), **P**(t).

2. Провести дослідження поведінки оптимальної системи регулювання для квадратичного функціоналу якості, використавши пропорційно-інтегральний регулятор. За результатами розв`язання задачі побудувати графіки функцій **U**(t), **X**(t), $k_1(t)$, $k_2(t)$.

3. Порівняти і зробити висновки про якість роботи оптимальної системи регулювання, яка використовує різні закони регулювання.

Контрольні запитання

1. Дати коротку характеристику задачі аналітичного конструювання регуляторів.

2. Які методи оптимізації можуть бути використані для синтезу оптимального закону регулювання.

3. Відмінні риси використаного методу оптимізації.

4. Привести основні математичні співвідношення, що визначають алгоритми оптимального регулювання.

Лабораторна робота №3

Застосування градієнтних методів для розв'язання задач оптимального керування

Мета роботи: вивчити та придбати навички застосування градієнтних методів для розв'язання задач оптимального керування для нелінійних систем.

Теоретичні відомості

Для лінійних систем з квадратичними функціями вартості отримана двоточкова крайова задача (ДТКЗ), яка є лінійною та може бути розв'язана шляхом використання принципу суперпозицій або шляхом переходу до нелінійного рівняння Ріккати, яке має обмеження лише у кінцевий момент часу. Для нелінійних систем відповідні ДТКЗ є нелінійними. Для розв'язання таких задач у загальному випадку повинні використовуватись ітеративні методи, наприклад градієнтні. Для нелінійних систем керування у загальному випадку неможливо оптимальний закон регулювання подати у вигляді добутку вектора стану та залежного від часу коефіцієнту підсилення. Більш того, оптимальне керування звичайно залежить, причому нелінійно, від початкового значення $\mathbf{X}(t_0)$ вектора стану. Це означає, що для більшості нелінійних систем керування доступними виявляються тільки такі закони керування, які не мають петлі зворотного зв'язку.

Будемо мінімізувати функціонал

$$\mathbf{I} = G[\mathbf{X}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[\mathbf{X}(\mathbf{t}), \mathbf{U}(t), t]dt \qquad (3.1)$$

для системи

$$\mathbf{X}' = f[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t], \ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 . \qquad (3.2)$$

Почнемо з визначення гамільтоніана

$$\mathbf{H}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \lambda(t), t] = F[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] + \lambda^T(t) f[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t]. \qquad (3.3)$$

Потім вважаємо умову:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}} = -\lambda' = \frac{\partial \mathbf{F(X,U,t)}}{\partial \mathbf{X}} + \left[\frac{\partial \mathbf{f^T(X,U,t)}}{\partial \mathbf{X}}\right]\lambda(t) \ , \qquad (3.4)$$

з граничною умовою

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial G[\mathbf{X}(t_f), t_f]}{\partial \mathbf{X}(t_f)} \ . \qquad (3.5)$$

Отже, необхідно мінімізувати визначений гамільтоніан шляхом вибору значення **U.** У таких випадках, коли будь-яке керування є припустимим, вихідним є рівняння

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{U}} = 0 = \frac{\partial F(\mathbf{X},\mathbf{U},t)}{\partial \mathbf{U}} + \frac{\partial f^T(\mathbf{X},\mathbf{U},t)}{\partial \mathbf{U}}\mathbf{l}(t) \ . \qquad (3.6)$$

Виберемо деяке керування замість невідомого оптимального керування, при цьому, звичайно, не буде виконуватись умова d**H**/d**U**=0. Задане обмеження у формі системи дифференційних рівнянь (3.2) будемо розв'язувати відносно **X** при цьому вибраному керуванні **U**; будемо також розв'язувати приєднану систему (3.4) в зворотному часі від t_f до t_o з граничними умовами (3.5). Приріст першого порядку функці вартості (3.1) при відхиленні керування на Δ**U**(t) від значення **U**(t), як це неважко помітити з (3.4), можно записати у вигляді :

$$\Delta \mathbf{I} = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial \mathbf{H}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \lambda(t), t]}{\partial \mathbf{U}(t)} \right\}^T \Delta \mathbf{U}(t) dt; \ . \qquad (3.7)$$

Якщо бажано забезпечити одержання найбільшого змінення Δ**I**, потрібно обчислити градієнт ∂**H**/∂**U** і потім приріст Δ**U** вибрати таким чином, аби він був протилежним за напрямком цьому градієнту

$$\Delta \mathbf{U}(t) = -k(t) \frac{\partial \mathbf{H}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \lambda(t), t]}{\partial \mathbf{U}(t)} . \qquad (3.8)$$

Відзначимо, що таке змінення забезпечує менше значення **I** при k(t)>0, що і потрібно, тому що необхідно забезпечити мінімум значення **I**. Щоб почати пошук оптимального рішення, припустимо, що маємо деяке неоптимальне керування $U^N(t)$. В результаті розв'язку (3.2) знайдемо $X^N(t)$, а із (3.4) з граничними умовами (3.5) отримаємо $\lambda^N(t)$. Потім у відповідності з (3.6) визначаємо вираз для $\partial\mathbf{H}/\partial\mathbf{U}^N(t)$, котрий приймає вигляд

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{U}^{\mathbf{N}}} = \frac{\partial F(\mathbf{X}^{\mathbf{N}},\mathbf{U}^{N},t)}{\partial \mathbf{U}^{N}} + \frac{\partial f^{T}(\mathbf{X}^{\mathbf{N}},\mathbf{U}^{\mathbf{N}},t)}{\partial \mathbf{U}^{N}} \lambda^{N} . \qquad (3.9)$$

Після цього за (3.8) визначаємо приріст $\Delta\mathbf{U}(t)$, де k(t) - невід'ємна функція часу. Перший приріст $\Delta\mathbf{I}^{N}$ функції **I**, якщо він є необхідним, обчислюється за формулою (3.7). Нове значення $\mathbf{U}^{N+1}(t)$ керування **U** обчислюється звичним чином *:*

$$\mathbf{U}^{\mathbf{N}+1}(t)=\mathbf{U}^{\mathbf{N}}(t)+\Delta\mathbf{U}^{\mathbf{N}}(t) . \qquad (3.10)$$

Ця процедура повторюється доти, поки або керування, або функція вартості стануть змінюватись лише незначно від ітерації до ітерації. Викладену послідовність обчислень з використанням градієнтного методу першого порядку в задачі з неперервним часом можна навести так :

1. Визначаємо гамільтоніан

$$\mathbf{H}=F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]+\boldsymbol{\lambda}^{T}(t)f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t].$$

2. Вибираємо початкове значення $\mathbf{U}(t),\mathbf{X}(t_0)$.

3. Для значень $\mathbf{U}^{N}(t)$ та $\mathbf{X}^{N}(t_0)$, які ми маємо, знаходимо $\mathbf{X}^{N}(t)$ як розв'язок системи (3.2).

4. У зворотному часі вирішуємо систему приєднаних рівнянь

$$\lambda'^{N} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}^{N}(t)}; \qquad \lambda^{\mathbf{N}}(t_f) = \frac{\partial G[\mathbf{X}^{\mathbf{N}}(t_f)]}{\partial \mathbf{X}^{N}(t_f)};$$

5. Знаходимо приріст керування

$$\Delta\mathbf{U}^{N}(t) = -k^{N}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{U}^{N}(t)} .$$

6. Обчислюємо чергове значення керування

$$\mathbf{U}^{N+1}(t) = \mathbf{U}^{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) + \Delta\mathbf{U}^{N}(t) .$$

7. Повторюємо обчислення, починаючи з п.3. Обчислення повторюються доти, поки зміни керування від ітерації до ітерації не стануть незначними. Узагальнимо знайдені співвідношення для випадку, коли на деякі складові вектора стану накладені обмеження у фіксований кінцевий момент часу. Для цього розглянемо задачу мінімізації функції часу

$$\mathbf{I} = G[\mathbf{X}(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[\mathbf{X(t)},\mathbf{U}(t),t]dt \qquad (3.11)$$

для системи, заданої рівнянням

$$\mathbf{X}^{-1}=f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]; \qquad \mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0 \,. \qquad (3.12)$$

Фінальні значення деяких складових вектора стану фіксовані шляхом введення обмеження у формі q-мірного векторного рівняння

$$N[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0 \,. \qquad (3.13)$$

Можна сформулювати принцип максимуму для цієї задачі та одержати в результаті звичайним способом градієнтну процедуру. Головні труднощі при цьому полягають у тому, що розв'язок $\mathbf{X}^N(t)$ рівняння (3.12) при заданому законі керування $U^N(t)$ не буде задовольняти умову (3.13). Тому обмеження (3.13) треба ввести в градієнтну процедуру. Для того щоб одержати розв'язокціє задачі з фіксованим кінцевим значенням, можна скористатися методом функці штрафів. Для цього необхідно до функці вартості (3.11) додати штраф за порушення обмеження, що визначає кінцеве значення вектора стану. Таким чином, мінімізаці підлягає значення ново функці вартості

$$\mathbf{I} = \mathbf{N}^T[\mathbf{X}(t_f),t_f]\theta\mathbf{N}[\mathbf{X}(t_f),t_f] - \boldsymbol{G}[\mathbf{X}(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[\mathbf{X(t)},\mathbf{U}(t),t]dt; \qquad (3.14)$$

з обмеженням у формі рівності

$$\mathbf{X}'=f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t], \qquad \mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0 \,. \qquad (3.15)$$

Тут θ - додатно визначена діагональна вагова матриця. При цьому очікується, що при необмеженому збільшенні θ наслідки порушення обмеження N=0 будуть ставати більш незначними. Невирішеною тут залишається така проблема : яким великим має бути значення θ ? У загальному випадку відповідь може бути отримана тільки на основі числових розрахунків. Градієнтні методи можна використовувати для розв'язання задач з нефіксованим кінцевим моментом часу та з обмеженнями на змінні стану або керування у формі нерівності. Рівняння, до яких приводить принцип максимума при розв'язанні задач із змінним кінцевим моментом часу, мають такі співвідношення (з невідомим значенням t_f) :

$$H[\mathbf{X}(t_f),\mathbf{U}(t_f),\lambda(t_f),t_f]+\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t_f}+\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial t_f}\nu=0$$

$$\mathbf{I}(t_f)=\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}(\mathbf{t_f})}+\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \mathbf{X}(t_f)}\nu=0; \qquad (3.17)$$

$$N[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0;$$

При кожній ітераці□ градієнтно□ процедури неможливо ввестиумову **N**[**X**(t_f),t_f]=0 навіть для фіксованого значення t_f. Можливо врахувати це кінцеве обмеження у формі рівняння шляхом введення штрафів, після чого в переформульованій задачі вважати, що подібне кінцеве обмеження у формі рівняння відсутнє. Аналогічно рівняння (3.16) та (3.17) не можуть бути використані безпосередньо у градієнтній процедурі, тому що для визначення **H** відповідні спряжені рівняння необхідно інтегрувати у зворотному часі від моменту t_f, а цей момент невідомий доти, поки не буде розв'язане рівняння (3.16).

Оскільки кінцевий момент часу невизначений, пропонується вибирати таке його значення, при якому функція вартості мінімальна за цією змінною, тобто d**I**/dt=0. Може бути, що момент часу, визначений із умови d**I**/dt=0, не є кінцевим і максимізує значення функці вартості, а не мінімізує його. Якщо виникають такі сумніви, можна знайти знак друго□ похідно□ $d^2\mathbf{I}/dt^2\mathbf{I}$ для точки, де d**I**/dt=0. Таким чином, вихідну задачу мінімізації функці□ вартості

$$\mathbf{I}=G[\mathbf{X}(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]dt; \qquad (3.19)$$

для системи

$$\mathbf{X}'=f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]; \quad \mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0 \qquad (3.20)$$

з кінцевими значеннями

$$\mathbf{N}[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0\ , \qquad (3.21)$$

де t_f - не визначено, треба переформулювати в іншу задачу, тобто: потрібно розглянути задачу мінімізаці□ модифіковано□ функці□ вартості :

$$\mathbf{I}'=\frac{1}{2}\left\|N[\mathbf{X}(t_f),t_f\right\|_0^2+G[\mathbf{X}(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]dt \qquad (3.22)$$

для систем, що описуються рівнянням (3.20),де t_f визначається з рівняння (3.23)

$$\frac{\mathbf{dI}}{\mathbf{dt_f}} = 0 = \left\{ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial t_f} + \left[\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{X}(t_f)} \right]^T \mathbf{X}'(t_f) \right\} \theta \mathbf{N} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t_f} + \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}(t_f)} \right]^T \mathbf{X}'(t_f) + F[\mathbf{X}(t_f), \mathbf{U}(t_f), t_f];$$

(3.23)

Необхідні обчислення при цьому виконуються звичайним чином як для градієнтно процедури у функціональному просторі, що описано раніше. Розглянемо градієнтні процедури з обмеженнями на керування у формі нерівностей

$$g[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] \geq 0 \qquad (3.24)$$

та на змінні стану

$$h[\mathbf{X}(t), t] \geq 0 \ . \qquad (3.25)$$

Можливий спосіб урахування подібних обмежень полягає в тому, щоб перетворити х у еквівалентні обмеження у формі рівнянь. Наприклад, обмеження (3.24) можна замінити таким рівнянням:

$$(y_i)^2 = g_i[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t], \qquad i = 1,2,3,\ldots,r; \qquad (3.26)$$

яке приводить до того, що y_i буде більше або дорівнюватиме нулю, тому що величина $(y_i)^2$ невід'ємна. Змінна y_i розглядається як додаткова змінна керування, далі задача розв'язується звичайним чином. Тут немає можливості використати це рівняння безпосередньо, тому що неможливо для g_i забезпечити значення, більше нуля. Маємо деяке значення $\mathbf{U}^N$ і розв'язуємо рівняння $\mathbf{X}'^N=f^N$, щоб знайти $\mathbf{X}^N$, яке визначає значення g. Проте можна ввести штраф за порушенняціє нерівності. В результаті рівняння (3.26) замінюється штрафом у функці вартості, тому одержуємо

$$\mathbf{I} = \ldots + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{r} \left| g_i[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] \right|^P \mathbf{H}(g_i) dt + \ldots \quad . \qquad (3.27)$$

Тут P - будь-яке додатне число, яке повинно бути вибране, $H(g_i)$ - ступінчаста функція, визначена співвідношенням

$$\mathbf{H}(g_i) = \begin{cases} 0 & g_i \geq 0 \\ k_i & g_i < 0 \end{cases} \qquad (3.28)$$

Шляхом вибору значень **P** та K_i можна змінювати значення штрафу за порушення обмеження на керування у формі нерівності. Врахування обмежень у формі нерівності на значення змінних стану здійснюється по-іншому, тобто замість рівняння (3.27) розглянемо диференційне рівняння

$$\mathbf{X}'_{n+1}=f_{n+1}=|h_1(\mathbf{X},t)|^{P1}\mathbf{H}(h_1)+|h_2(\mathbf{X},t)|^{P2}\mathbf{H}(h_2)+...+|h_s(\mathbf{X},t)|^{Ps}\mathbf{H}(h_s),$$

$$\mathbf{X_{n+1}}(t_0)=0,\ \mathbf{X_n+1}(t_f)=0. \qquad (3.29)$$

або диференційни рівняння

$$\mathbf{X'_{n+1}}=|h_1(\mathbf{X},t)|^{P1}\mathbf{H}(h_1),\ \mathbf{X_{n+1}}(t_0)=0,\ \mathbf{X_{n+1}}(t_f)=0 \qquad (3.30)$$

$$\mathbf{X'_{n+2}}=|h_2(\mathbf{X},t)|^{P2}\mathbf{H}(h_2),\ \mathbf{X_{n+2}}(t_0)=0,\ \mathbf{X_{n+2}}(t_f)=0$$

- -

$$\mathbf{X'_{n+s}}=|h_s(\mathbf{X},t)|^{Ps}\mathbf{H}(h_s),\ \mathbf{X_{n+s}}(t_0)=0,\ \mathbf{X_{n+s}}(t_f)=0$$

Рівняння (3.29),(3.30) не можна використати у градієнтній процедурі, оскільки немає способу, який забезпечує виконання вказаних обмежень. Тому кінцеве значення змінних вводимо у функці штрафів; в результаті відповідну частину модифіковано функці вартості можна представити одним із способів:

$$\mathbf{I}=...+|\mathbf{X}_{n+1}(t_f)|^{P}\mathbf{K}+...,\ \mathbf{X}_{n+1}(t_0)=0, \qquad (3.31)$$

$$\mathbf{I} = ...+\sum_{i=1}^{s}|\mathbf{X}_{n+1}(t_f)|^{Pi}\,\mathbf{K}_i+...,\ \mathbf{X_{n+i}}(t_0) = 0,\ i = 1,2,...,s. \qquad (3.32)$$

Для зручності обчислень значення степенів Р часто

приймають рівними 2, хоч це і не обов'язково. Після цього градієнтна процедура використовується звичайним способом.

Приклад 1

Нехай система описується рівнянням $X' = -X^2 + U$, $X(0) = 10$.

Потрібно знайти керування,котре забезпечить мінімальне значення функції вартості

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 + U^2)dt$$

Знаходимо гамільтоніан

$$H = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}U^2 - \lambda x^2 + \lambda U .$$

Приєднане рівняння набуває вигляду $\lambda' = -x + 2\lambda x$

з граничною умовою, а рівняння для градієнта

$$\frac{\partial H}{\partial U} = U + \lambda .$$

Візьмемо в якості початкового значення керування$U(t)=0$.Приймаємо $K=1$. Для реалізації градієнтного методу виконаємо наступні обчислення.

1. Для керування, що маємо $U^N(t)$, $t\epsilon[0,1]$,знаходимо $X^N(t)$ шляхом розв'язання рівняння

   $X'^N = -[X^N(t)]^2 + U^N(t)$, $X^N(0) = 10$.

2. При знайденому $X^N(t)$ визначимо $\lambda^N(t)$ з рівняння

   $\lambda'^N = -X^N(t) + 2\lambda^N(t)X^N(t)$, $\lambda^N(1) = 0$.

3. Обчислюємо

$$\frac{\partial H}{\partial U^N} = U^N(t) + \lambda(t).$$

4.Знаходимо приріст $\Delta U^N(t)$ та зміну $\Delta \mathbf{I}^N$ за наступними формулами:

$$\Delta U^N(t) = -k\frac{\partial H}{\partial U^N} = -kU^N(t) - k\lambda^N(t)$$

$$\Delta I^N(t) = -k\int_0^1 \left[\frac{\partial H}{\partial U^N}\right]^2 dt = -k\int_0^1 \left[U^N(t) + \lambda^N(t)\right]^2 dt$$

5. Обчислюємо закон керування для наступної ітерації:

$U^{N+1}(t)=U^{N}(t)+\Delta U^{N}(t)$.

6. Замінюємо $U^{N}(t)$ новим значенням та повторюємо обчислення, починаючи з пункта 1, до тих пір, поки прирощення $\Delta U^{N}(t)$ або $\Delta I^{N}(t)$ не стане досить малим від ітерації до ітерації.

Приклад 2

Розглянемо розв'язання задачі про брахистохрон, тобто падіння частинки в постійному гравітаційному полі g впродовж фіксованого часу t_f з заданою початковою швидкістю $x_3(0)$. Необхідно встановити такий шлях частинки, при якому фінальне значення горизонтальної координати $x_1(t_f)$ виявиться найбільшим. Значення вертикальної координати $x_2(t)$ в фінальний момент часу невизначено. Необхідно знайти оптимальний шлях при наступному обмеженні в формі нерівності на значення змінних стану: $X_2 -0.4X_1 -0.2\leq 0$ для системи, що описується рівняннями:

$X'_1=X_3\cos U$, $X_1(0)=0$;

$X'_2=X_3\sin U$, $X_2(0)=0$;

$X'_3=g\sin U$, $X_3(0)=0.07195$;

$g=1$, $t_f=1.720$.

Перетворимо задане в формі нерівності обмеження на змінні стану в диференційне рівняння,покладаючи що

$X'_4=[X_2(t)-0.4X_1(t)-0.2]^2H(0.2+0.4X_1-X_2)$, $X_4(0)=0$ де $H(g)=0$,коли $g>0$ та $H(g)=1$, коли $g<0$.

Тут не слід вважати $X_4(t_f)=0$ оскільки як штраф вводиться в тому випадку, коли значення $X_4(t_f)$ більше нуля. Модифікована функція вартості має вигляд

$Y=-X_1(t_f)+1/2SX^4{}_2(t_f)$, $t_f=1.720$.

Розрахунки з використанням градієнтного методу виконуються звичайно.

Розглянемо розв'язання задачі про мінімізацію часу переведення нелінійної системи за допомогою градієнтного методу.

Приклад 3

Нормалізоване рівняння динаміки та граничні умови приймались наступні:

$X'_1 = X_2$, $X'_2 = \dfrac{X_3^2}{X_1} - \dfrac{1}{X_1} + \dfrac{0.14\sin U}{1+0.075t}$,

$$X'_3 = \frac{-X_2 X_3}{X_1} + \frac{0.14\sin U}{1+0.075t},$$

$X_1(t_0)=1$, $X_2(t_0)=0$, $X_3(t_0)=1$,

$X_1(t_f)=1.525$, $X_2(t_f)=0$, $X_3(t_f)=0.8098$.

В якості функції вартості для данної задачі з додаванням функції штрафів можна вибрати наступною:

$$I=t_f+1/2S_{11}[X_1(t_f)1.525]^2X'_1(t_f)+S_{22}(X_2(t_f))^2X'_1(t_f)+S_{33}[X_3(t_f)-0.8098].$$

Рівняння для визначення часу переходу при цьому набуває вигляду:

$$\frac{\partial I}{\partial t_f} = 0=1+S_{11}[X_1(t_f)-1.525]X'_1(t_f)+S_{22}X_2(t_f)X'_2(t_f)+S_{33}[X_3(t_f)-0.8098]X'_3(t_f),$$

де всі похідні визначені вище.

Розв'язання задачі починаємо з введення припущення, що початкове керування має вигляд U (t), для цього керування визначаємо початкову траєкторію X (t) та розраховуємо похідну вартості dY/dt_f. Момент проходження цієї похідної через нуль (при умові, що друга похідна при цьому додатна) приймається в якості фінального часу на першій ітерації. З цим отриманим фінальним моментом t_f і знайденим значенням X (t) розв`язуємо відповідні спряжені рівняння в зворотньому часі від t_f до t_0 з фінальними умовами

$$[\lambda^0(t_f)]^T=[S_{11}(X_1(t_f)-1.525),\ S_{22}X_2(t_f),\ S_{22}(X_3(t_f)-0.8098)].$$

В результаті отримуємо усі необхідні дані для розрахунку градієнта dH/dU^0 і визначення приросту керування

$$\Delta U^0(t)=-k\left[\frac{\partial H}{\partial U^0}\right].$$

Закон керування для наступного кроку знаходиться звичайним способом:

$U^{\lambda}(t)=U^0(t)+\Delta U^0(t).$

Цей процес обчислень повторюється декілька разів, поки не буде забезпечена збіжність до оптимального розв'язку. Використання даної градієнтної схеми спряжене з труднощами визначення кінця обчисленнь, оскільки збіжність процедури може виявитись повільною при наближенні траєкторії та керування до оптимальних.

Приклад 4

Використаємо метод функції штрафів при градієнтному методі пошуку екстремуму для розрахунку керування та траєкторії при переведенні лінійної системи $X'_1=X_2(t)$, $X_2=U(t)$, $|U(t)|\leq 1$, з стану $X_1(0)=10$, $X_2(0)=0$ в початок координат $X_1(t_f)=X_2(t_f)=0$ за мінімальний час. Ця задача розв'язується як задача мінімалізації функції вартості

$$I=\frac{1}{2}S_{11}X^2{}_1(t_f)+\frac{1}{2}S_{12}X^2{}_2(t_f)+t_f+\frac{1}{2}\int_0^{t_f} Q\,[U^2(t)-1]H[1-U^2(t)]dt.$$

Рівняння для вектора стану, приєднані рівняння, а також вираз для $\frac{\partial H}{\partial U}$ мають вигляд:

$$X'^N=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}X^N(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}U^N(t),\quad X^N(0)=\begin{bmatrix}10\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\lambda'^N=-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}l^N(t),\quad \lambda^N(t_f)=\begin{bmatrix}S_{11} & X_1^N(t_f)\\ S_{22} & X_2^N(t_f)\end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial H}{\partial U^N}=\lambda^N{}_2(t)-QU^N(t)H(1-[U^N(t)]^2).$$

Крім того, оскільки фінальний момент часу невідомий, для його визначення маємо додаткові співвідношення $H+dG/dt_f=0$. Таким чином

$$\lambda^N{}_1(t_f)X^N{}_2(t_f)+\lambda^N{}_2(t_f)U(t_f)+1/2Q\{[U^N(t_f)]^2-1\}H\{1-[U^N(t_f)]^2\}.$$

В якості критерія зупинки ітераційного процесу використовуємо

$$\frac{dI^N}{dt_f}=0=S_{11}X^N{}_1(t_f)X'^N{}_1(t_f)+S_{22}X^N{}_2(t_f)X'^N{}_2(_t)+1+1/2Q\{[U^N(t_f)]^2-1\},\ \{[1-U^N(t_)]^2\}.$$

Припустимо, що в якості початкового вибрали керування U^0=-1 . Розв'язуючи відповідну систему рівняннь, отримаємо

$$U^0(t)=-1,\ X^0{}_1(t)=10-\frac{t^2}{2},\ X^0{}_2(t)=-t,\ 0<t<\sqrt{10}.$$

Припустимо, що це керування використовується на інтервалі часу тривалістю $\sqrt{10}$ с , потім керування змінюється та приймає значення +1. Рівняння для керування та вектора стану при цьому набувають вигляду$U^0(t)=1$, $X^0{}_1(t)=(t-2\sqrt{10})^2/2$, $X_2{}^0(t)=12\sqrt{10}$, $t>\sqrt{10}$.

Похідні по часу функції вартості, що розглядаються, записуються наступним чином:

$$\frac{dI^0}{dt}=S_{11}\left(\frac{t^2}{2}-10t\right)+S_{22}t+1,\ 0<t<\sqrt{10};$$

$$\frac{dI^0}{dt}=S_{11}(t-2\sqrt{10})^3/2+S_{22}(t-2\sqrt{10})+1,\ t<\sqrt{10}.$$

Значення t, при якому похідна дорівнює нулю, може бути прийняте в якості значення фінального моменту часу. Коли початкове керування не збігається з оптимальним, значення вектора стану в знайдений фінальний момент часу не є нульовим; тоді розв'язуємо приєднані рівняння:

$$\lambda'_1=0,\ \lambda'_2=-l_1=(t),\ \lambda^0{}_1(t_f)=S_{11}X^0{}_1(t_f),\quad \lambda^0{}_2(t_f)=S_{22}X^0{}_2(t_f).$$

в зворотному часі від t_f до 0. Після чого визначаємо числове значення градієнта dH/dU^0 та знаходимо наступне значення керування

$$U'(t)=U^0(t)=k\left[\frac{\partial H}{\partial U^0(t)}\right].$$

Цей процес розрахунків повторюється доти, доки не буде забезпечений малий приріст керувань.

Завдання 1

1. Знайти керування, що забезпечує мінімальне значення функції вартості

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}(\mathbf{X}^T Q\mathbf{X}+\mathbf{U}^T R\mathbf{U})dt$$

для системи, що описується рівнянням

$\mathbf{X}'=A\mathbf{X}+B\mathbf{U}, \quad X(0)=X_0$

з використанням принципу максимуму і градієнтного методу.

2. Для визначення оптимального значення K використати спосіб вибору значення K^{N+1} з чотирьох чисел: $1/2k^N$, k^N, $2k^N$, $10k^N$ який зводиться до вибору того з вказаних чисел, при якому значення функції вартості найменше.

3. Приведіть основні математичні співвідношення, що визначаються алгоритмом оптимального керування.

4. За результатами розв`язання задачі на ЕОМ побудувати графіки $\mathbf{U}(t)$,$\mathbf{X}(t)$.

Завдання 2

Дослідити використання градієнтного методу для розв`язання задачі з фіксованими граничними умовами в фінальний момент часу для мінімізації функції вартості t_f

$$\mathbf{I}=1/2\mathbf{X}(t_f)S\mathbf{X}(t_f)+1/2\int_{t_0}^{t_f}(\mathbf{U}^T R\mathbf{U})dt$$

при наявності обмежень у формі рівнянь $\mathbf{X}'=A\mathbf{X}+B\mathbf{U}$, $\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}_0$

Завдання 3

Дослідити переведення лінійної системи

$\mathbf{X}'=A\mathbf{X}+B\mathbf{U}, \quad |\mathbf{U}(t)|\le 1$

з стану $X(t_0)=X_0$ в початок координат за мінімальний час, використавши метод штрафів з градієнтною процедурою.

Контрольні запитання

1. Дати коротку характеристику алгоритму використання градієнтного методу першого порядку при розв`язанні задач оптимального керування.

2. Які градієнтні методи можна використовувати для розв'язання задач оптимального керування?

3. Сформулюйте основні труднощі, котрі виникають при розв'язанні задач оптимального керування.

Лабораторна робота № 4

Дослідження оптимальної системи керування із зворотним зв`язком з використанням динамічного програмування

Мета роботи: вивчити і одержати навички у процесі дослідження оптимальної системи керування, використовуючи динамічне програмування.

Теоретичні відомості

В основі динамічного програмування, яке відіграє важливу роль у задачах оптимального керування, лежить принцип оптимальності, сформульований Р.Белманом: оптимальна стратегія керування має особливість, що яким би не був початковий стан чи початкове рішення, наступне рішення повинно бути оптимальною стратегією по відношенню до стану, що виник у разі першого рішення.

Суть динамічного програмування базується на одержанні диференційного рівняння в частинних похідних, яке відомо, як рівняння Белмана. Визначимо мінімум функції вартості

$$\mathbf{V}[\mathbf{X}(t),t]=\min\left\{G\left[X(t_f),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_f}F[X(s),U(s),s]\,ds\right\}, \qquad (4.1)$$

де $\mathbf{U}_t=\{\mathbf{U}(s),\ \ t\le s\le t_s\}$ и $\mathbf{X}(s),\ \ t\le s\le t_s$ — траекторія,

пов'язана з оптимальною керуючою функцією на інтервалі $[t,t_f]$ при заданій початковій умові $\mathbf{X}(t)$. Функція $\mathbf{V}[\mathbf{X}(t),t]$ - це оптимальна функція вартості на інтервалі $[t,t_f]$ при заданій початковій умові $\mathbf{X}(t)$ і задовольняє граничній умові:

$$\mathbf{V}[\mathbf{X}(t_f),t_f]=\mathbf{G}[\mathbf{X}(t_f),t_f]. \qquad (4.2)$$

Рівняння дозволяє застосувати для його рішення принцип оптимальності. Необхідна умова мінімуму (4.1) записується таким чином:

$$-\frac{\partial V[X(t),t]}{\partial t} = \min\{\mathbf{F}[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t] + \left[\frac{\partial V[X(t),t]}{\partial X}\right]^T f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]\}. \quad (4.3)$$

При відсутності обмежень на величину U і при умові, що функції мають частинні похідні, оптимальне керування можна знайти, диференціюючи вираз у фігурних дужках:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial U} + \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial U}\right] = 0 \text{ для усіх } t \in [t_0, t_f].$$

Хоча розв’язання рівняння Белмана в загальному вигляді пов'язане з великими труднощами, у випадку, коли воно розв'язується, одержують оптимальне керування як функцію від траєкторії стану, що є бажаною формою зворотного зв'язку.

Один з ефективних засобів розв'язку нелінійних диференційних рівнянь базується на тому, що задаємося видом , наприклад, у вигляді ступеневого ряду, і складаємо рівняння, рішення яких дорівнюють коефіцієнтам заданих функцій.

Метод динамічного програмування призводить до точних результатів для системи з лінійними рівняннями стану і квадратичним критерієм якості.

Приклад

Розглянемо задачу, де рівняння Белмана можна розв'язати аналітично. Рівняння руху:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = ax_2 + bU \end{cases}, \quad X(0)=X_0$$

Критерій оптимальності:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty (q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + rU^2)dt \to \min.$$

Рівняння Белмана для цієї задачі

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min\{1/2q_{11}x_1^2 + 1/2q_{22}x_2^2 + 1/2rU^2 + \frac{\partial V}{\partial X_1}x_2 + \frac{\partial V}{\partial X_2}(ax_2 + bU)\}. \quad (4.4)$$

Так як обмеження відсутні і вираз, у фігурних дужках квадратично залежить від керування , оптимальне керування одержимо з умови стаціонарності цього виразу:

$$U^* = -\frac{b}{r}\frac{\partial V}{\partial x_2};$$

Підставимо U*

$$-\frac{\partial V}{\partial t}=1/2q_{11}x^2_1+1/2q_{22}x^2_2+\frac{\partial V}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial V}{\partial x_2}ax_2-\frac{b^2}{2r}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 . \qquad (4.5)$$

Один із засобів розв'язку рівнянь типу (4.5) базується в заданні припущеного вигляду шуканої функції V(X,t) з точністю до невизначених коефіцієнтів. Задамо V(X,t) у формі $V(X,t)=Ax^2_1+2Bx_1x_2+Cx^2_2$ і підставимо цю функцію в (4.5).

Прирівнюючи коефіцієнти при x^2_1; x_1x_2; x^2_2 в лівій і правій частинах одержаного співвідношення, знаходимо

$$B=\frac{1}{2b}\sqrt{q_{11}r}; \qquad C=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}q_{22}+\frac{1}{2}\sqrt{q_{11}r}\right)r}{2}} .$$

Підставимо $\frac{\partial V}{\partial X_2}$ у вираз для U*

$$U^*=-\frac{2b}{r}\left(\frac{1}{2b}\sqrt{q_{11}r}X_1+\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}q_{22}+\frac{1}{2}\sqrt{q_{11}r}\right)r}{2}}X_2\right) .$$

Так як підстановка одержаного значення в рівнянні руху призводить до допустимого рішення, то знайдене керування оптимальне. Для одержання апроксимації розв'язку нелінійного рівняння в частинних похідних також можливо використати розкладання в ступеневий ряд. У цьому випадку коефіцієнти ряду будуть функціями часу, і одержимо матричні рівняння Ріккаті.

Розглянемо лінійний об'єкт керування, який описується рівнянням $\mathbf{X}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}+\mathbf{B}(t)\mathbf{U}$, з початковою умовою $\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X_0}$ і з незаданим кінцевим станом $\mathbf{X}(t_f)$. Необхідно знайти $\mathbf{U^*}(t)$ на інтервалі $[t_0\ \ t_f]$, що мінімізує функціонал

$$I=1/2\mathbf{X}^{\mathbf{T}}(t_f)\mathbf{S}\mathbf{X}(t_f)+1/2\int_{t_0}^{t_f}[X^T(t)Q(t)X(t)+U^T(t)R(t)U(t)]\,dt , \qquad (4.6)$$

де $\mathbf{S}$,$\mathbf{Q}(t)$,$\mathbf{R}(t)$ — симетричні матриці, причому $\mathbf{Q}(t)$ і $\mathbf{R}(t)$ є додатно визначеними і мають безперервні другі похідні по t. $\mathbf{S}$ — знакододатна постійна матриця (щоб гарантувати єдиний мінімум).

Рівняння Белмана має вигляд:

$$-\frac{\partial V}{\partial t}=\left[\frac{1}{2}X^{T}(t)Q(t)X(t)+\frac{1}{2}U^{*T}(t)R(t)U^{*}(t)+\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^{T}(A(t)X+B(t)U^{*})\right].$$

(4.7)

Гранична умова, що виходить з рівнянь

$$\lim_{t\to t_f} V^{*}(X,t)=\frac{1}{2}X^{T}(t_f)SX(t_f)\ . \tag{4.8}$$

Процес мінімізації призводить до умови

$$\left.\frac{\partial F}{\partial U}\right|_{U=U^*}+\left.\frac{\partial}{\partial U}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^{T}(A(t)X+B(t)U)\right]\right|_{U=U^*}=0\ , \tag{4.9}$$

де **F** - підінтегральний вираз в рівнянні (4.6).   З останнього випливає

$$\mathbf{U}^*(t)=-\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}(t)\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right).$$

Якщо хочемо синтезувати лінійне керування як функцію координат, то слід в якості критерію якості прийняти квадратичну форму

$$\mathbf{V}^*(\mathbf{X},t)=1/2\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}(t)\mathbf{X},$$

де **P**(t) - симетрична матриця розмірністю (n x n).

$$\mathbf{V}_x(x,t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t)\ ,\qquad\qquad \mathbf{V}_t(x,t)=1/2\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}'(t)\mathbf{X}(t),$$

дістанемо

$$\mathbf{P}'=-\mathbf{Q}-\mathbf{P}\mathbf{A}-\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}$$

з граничною умовою $\mathbf{P}(t_f)=\mathbf{S}$.

Підставимо вираз у рівняння Белмана

$$1/2\mathbf{X}^{T}\mathbf{P}'\mathbf{X}+1/2\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{X}+1/2\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}\mathbf{X}+(\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t))^{T}[\mathbf{A}\mathbf{X}(t)-\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)*$$
$$*\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}\mathbf{X}]=1/2\mathbf{X}^{T}\mathbf{P}'\mathbf{X}+1/2\mathbf{X}^{T}\mathbf{Q}\mathbf{X}+1/2\mathbf{X}^{T}\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}\mathbf{X}+\mathbf{X}^{T}\mathbf{P}[\mathbf{A}\mathbf{X}-\mathbf{B}\mathbf{R}^{-T}\mathbf{P}\mathbf{X}]=1/2\mathbf{X}^{T}[\mathbf{P}'+\mathbf{Q}+\mathbf{P}\mathbf{A}-\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}]\mathbf{X}=0$$

Враховуючи, що результат скалярного множення $\mathbf{X}^T\mathbf{PAX}$ по відношенню до симетричної матриці P

$$\mathbf{X}^T\mathbf{PAX}=1/2\mathbf{X}^T\mathbf{PAX}+1/2\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\mathbf{PX}.$$

Єдиний абсолютний мінімум функціоналу виходить тільки в тому випадку, якщо матричне рівняння Ріккаті має одне рішення. Калман довів таку теорему.

Теорема

Відповідно до прийнятих пропозицій, рівняння Ріккаті з граничною умовою $\mathbf{P}(t_f)=\mathbf{S}$ має єдине рішення для матриці $\mathbf{P}(t)$, при цьому керування є оптимальним по відношенню до критерію оптимальності **I**. Іншими словами, рівняння Белмана (4.7)забезпечує для цього випадку достатню умову оптимальності.

Підкреслимо алгоритмічні особливості методу динамічного програмування на відміну від принципу максимуму.

1. Вимоги гладкості функцій $\mathbf{F}(\mathbf{X},\mathbf{U},t)$ и $f(\mathbf{X},\mathbf{U},t)$ по **X** зняті і не доводиться вирішувати краєву задачу. Рішення одержуються в формі синтезу і дозволяють знайти не тільки оптимальне управління, а й побудувати керуючий пристрій , працюючи за принципом оберненого зв'язку. Одержане рішення забезпечує для кожного початкового змісту абсолютний мінімум I на безлічі допустимих рішень D.

2. Існування функції $\mathbf{V}(\mathbf{X},t)$, що задовольняє умовам (4.2), (4.3) в загальному випадку не гарантовано.

Саме рішення рівняння Белмана, якщо воно існує,одержати набагато складніше, ніж рішення системи звичайних диференційних рівнянь. Прямим методом рішення диференційних рівнянь у часткових похідних є метод дискретного динамічного програмування який є послідовним повторюванним крок за кроком вживанням рівняння Гамільтона-Якобі або принципу оптимальності Белмана

Дискретний варіант динамічного програмування. Сформулюємо задачу синтезу лінійного оптимального цифрового регулятора.

Знайти керування $\mathbf{Uk}_{kf\text{-}1}$, k=0,1,2,....,k-1 таке, щоби $I_{kf}=\mathbf{G}[\mathbf{X}(kf)]+\sum_{k=0}^{kf-1}\mathbf{F}_k[\mathbf{X}_k,\mathbf{U}_k]\rightarrow \min$

де $\mathbf{G}[\mathbf{X}_k,\mathbf{U}_k]=1/2\mathbf{X}^T_{kf}\mathbf{S}\mathbf{X}_{kf}$ (4.10)

$$\mathbf{F}_k[\mathbf{X}_k,\mathbf{U}_k]=1/2\mathbf{X}^T_k\mathbf{Q}\mathbf{X}_k+1/2\mathbf{U}^T_k\mathbf{R}\mathbf{U}_k \qquad (4.11)$$

Позначимо через $I_{kf\text{-}i}[\mathbf{X}(i)]$ критерій якості на інтервалі $[i,\ k_f]^f$, тобто на останніх k_f-1 інтервалах , або кроках. Тоді

$$I_{kf\text{-}i}[\mathbf{X}_i]=\mathbf{G}[\mathbf{X}_{kf}]+\sum_{k=1}^{kf-1}\mathbf{F}_\mathbf{k}[\mathbf{X}_\mathbf{k},\mathbf{U}_k];\ i=0,1,2,...,k_f \qquad (4.12)$$

Нехай мінімальне значення $I_{kf\text{-}i}[\mathbf{X}_i]$ описується виразом

$$\mathbf{V}_{kf\text{-}i}[\mathbf{X}_i]=\min I_{kf\text{-}i}[\mathbf{X}_i] \qquad (4.13)$$

При $i=k_f$ останній вираз являє собою критерій якості, або виграш на останньому /нульовому/ кроці, який є не що інше, як термінальна складова. Тому

$$\mathbf{V}_0[\mathbf{X}_{kf}]=\mathbf{G}[\mathbf{X}_{kf}]=1/2\mathbf{X}^T_{kf}\mathbf{S}\mathbf{X}_{kf} \qquad (4.14)$$

При $i=k_f$-1 матимемо однокроковий процес, або процес з одним інтервалом керування, який збігається з останнім кроком. Тоді оптимальне значення кrітерію якості

$$\mathbf{V}_1[\mathbf{X}_{kf\text{-}1}]=\min I_f[\mathbf{X}_{kf\text{-}1}]=\min\,[\mathbf{G}[\mathbf{X}_{kf}]+\mathbf{F}_{kf\text{-}1}[\mathbf{X}_{kf\text{-}1},\ \mathbf{U}_{kf\text{-}1}]] \qquad (4.15)$$

Підставляючи співвідношення (4.10) і (4.11)

$$\mathbf{G}[\mathbf{X}_{kf}]=1/2[\mathbf{A}\mathbf{X}_{kf\text{-}1}+\mathbf{B}\mathbf{U}_{kf\text{-}1}]^T\mathbf{S}[\mathbf{A}\mathbf{X}_{kf\text{-}1}+\mathbf{B}\mathbf{U}_{kf\text{-}1}] \qquad (4.16)$$

і зпрощуючи, дістанемо:

$$\mathbf{V}_1[\mathbf{X}_{kf\text{-}1}]=\min_{U_{kf-1}}\ [1/2\mathbf{X}_{kf\text{-}1}(\mathbf{Q}+\mathbf{A}^T\mathbf{S}\mathbf{A})\mathbf{X}_{kf\text{-}1}+\mathbf{X}^T_{kf\text{-}1}1/2\mathbf{A}^T\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{U}_{kf\text{-}1}+1/2\mathbf{U}^T_{kf\text{-}1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{X}_{kf\text{-}1}+$$

$$+1/2\mathbf{U}^T_{kf\text{-}1}(\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{B})\mathbf{U}_{kf\text{-}1}]=\min_{U_{kf-1}}\ I_1[\mathbf{X}_{kf\text{-}1}]. \qquad (4.17)$$

Запишемо умову мінімуму $I_1[\mathbf{X}_{kf\text{-}1}]$

$$\frac{\partial I_1[X_{kf-1}]}{\partial U_{kf-1}}=0. \qquad (4.18)$$

Описане рівняння має вигляд

$$\mathbf{U}_{kf\text{-}1}=-(\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{X}_{kf\text{-}1} \qquad (4.19)$$

Підставивши (4.19) в (4.17) для $\mathbf{X}_{kf-1}$, після зпрощення знайдемо

$$\mathbf{V}_1[\mathbf{X}_{kf-1}]=1/2\mathbf{X}_{kf-1}[\mathbf{Q}+\mathbf{A}^T\mathbf{SA}-(\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{SB})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{SA})\mathbf{X}_{kf-1}]. \tag{4.20}$$

Введемо позначення

$$\mathbf{P}_{kf}=\mathbf{S}, \tag{4.21}$$

$$\mathbf{P}_{kf-1}=\mathbf{Q}+\mathbf{A}^T\mathbf{P}_{kf}\mathbf{A}-\mathbf{B}^T\mathbf{SA}(\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{kf}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{kf}\mathbf{A}. \tag{4.22}$$

Оптимальне значення виграшу згідно з виразом (4.14) і (4.15) набувають вигляду

$$\mathbf{V}_0[\mathbf{X}_{kf}]=1/2\mathbf{X}^T_{kf}\mathbf{P}_{kf}\mathbf{X}_{kf} \tag{4.23}$$

$$\mathbf{V}_1[\mathbf{X}_{kf-1}]=1/2\mathbf{X}^T_{kf-1}\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{X}_{kf-1} \tag{4.24}$$

Продовжуючи процес, покладемо $i=k_f-2$, тобто розглянемо задачу оптимізації , що складається з двох останніх кроків. Запишемо оптимальне значення критерія якості для двокрокового процесу:

$$\mathbf{V}_2[\mathbf{X}_{kf-2}]=\min_{\substack{U_{kf-2}\\U_{kf-1}}} I_2[\mathbf{X}_{kf-2}]=\min [\mathbf{F}_{kf-2}[\mathbf{X}_{kf-2}, \mathbf{U}_{kf-2}]+\mathbf{F}_{kf-1}[\mathbf{X}_{kf-1}, \mathbf{U}_{kf-1}]+\mathbf{G}[\mathbf{X}_{kf}]] \tag{4.25}$$

Згідно з принципом оптимальності , для того, щоб двокроковий процес був оптимальним незалежно від стратегії керування на першому кроці, останній крок повинен бути оптимальним сам по собі. Тому

$$\mathbf{V}_2[\mathbf{X}_{kf-2}]=\min_{Ukf-2}[\mathbf{F}_{kf-2}[\mathbf{X}_{kf-2}, \mathbf{U}_{kf-2}]+\mathbf{V}_1[\mathbf{X}_{kf--2}]], \tag{4.26}$$

де $\mathbf{V}_1[\mathbf{K}_{kf-1}]$ - оптимальний виграш на останньому кроці, описуваному виразом (4.24).

Підставляючи співвідношення

$$\mathbf{F}_{kf-2}[\mathbf{X}_{kf-2}, \mathbf{U}_{kf-2}]=1/2\mathbf{X}^T_{kf-2}\mathbf{QX}_{kf-2}+1/2\mathbf{U}^T_{kf-2}\mathbf{RU}_{kf-2} \tag{4.27}$$

$$\mathbf{V}_1[\mathbf{X}_{kf-1}]=1/2[\mathbf{AX}_{kf-2}+\mathbf{BU}_{kf-2}]^T\mathbf{P}_{kf-1}[\mathbf{AX}_{kf-2}+\mathbf{BU}_{kf-2}] \tag{4.28}$$

у вираз (4.26), перепозначаючи члени і враховуючи

$$\frac{\partial I_3[X_{kf-2}]}{\partial U_{kf-2}}=0, \qquad (4.29)$$

можна показати, що оптимальне керування має вигляд

$$\mathbf{U}_{kf-2}=-[\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{A}\mathbf{X}_{kf-2} \qquad (4.30)$$

$$\mathbf{V}_2[\mathbf{X}_{kf-2}]=1/2\mathbf{X}^T_{kf-2}[\mathbf{Q}+\mathbf{A}^T\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{A}-\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{A}][\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{A}]\mathbf{X}_{kf-2} \qquad (4.31)$$

Враховуючи

$$\mathbf{P}_{kf-2}=\mathbf{Q}+\mathbf{A}^T\mathbf{P}_{lf-1}\mathbf{A}-\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{A}[\mathbf{R}-\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{A}, \qquad (4.32)$$

запишемо співвідношення (4.31) в більш компактній формі:

$$\mathbf{V}_2[\mathbf{X}_{kf-2}]=1/2\mathbf{X}^T_{kf-2}\mathbf{P}_{kf-2}\mathbf{X}_{kf-2} \qquad (4.33)$$

методом індукції можна показати, що в загальному випадку

$$\mathbf{V}_{kf-1}[\mathbf{X}(i)]=1/2\mathbf{X}^T_i\mathbf{P}_i\mathbf{X}_i$$

(4.34)

де

$$\mathbf{P}_i=\mathbf{Q}+\mathbf{A}^T\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{A}-\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{A}[\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{A}. \qquad (4.35)$$

Оптимальне керування

$$\mathbf{U}_1=-[\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{A}\mathbf{X}_i$$

(4.36)

При використанні методу динамічного програмування не потребно, щоб матриця **R** була додатновизначеною, оскільки відсутнє обчислення $\mathbf{R}^{-1}$. Більш того, **R** може бути нульовою матрицею. Однак матриця $\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{B}$ повинна мати зворотню матрицю.

<u>Завдання 1.</u> Для лінійного об'єкта і квадратичного критерію якості записати рівняння Белмана, задатися виглядом шуканої функції у вигляді ступеневого ряду. Підставити припутимі рішення в диференціальне рівняння і прирівняти члени з однаковими ступенями . Розв'язати одержану систему і знайти шукане керування по замкненому контуру. Перевірити стійкість системи.

Завдання 2. Застосуйте метод динамічного програмування з дискретним часом при мінімізації квадратичної функції вартості для лінійної ситеми. Одержіть числові результати при різних значеннях моментів дискретизації за часом і числа рівнів квантування.

Контрольні запитання

1.Привести основні математичні формули і вивести рівняння Белмана для безперервного і дискретного часу.

2.Обчислювальні трудноші розв'язку задач методом динамічного програмування.

3. Зв'язок динамічного програмування з принципом максимуму.