МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

СТАТИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ

Оптимізація технологічних процесів і систем керування

Методичні вказівки

до виконання розрахунково-графічних робіт

для студентів напряму підготовки „ Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології”

Рекомендовано Вченою радою інженерно-хімічного факультету

Київ

НТУУ «КПІ»

2012

Статична оптимізація. Оптимізація технологічних процесів і систем керування. Методичні вказівки до розрахунково-графічних робіт для студ. напр. „Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології” /Укл.: Ладієва Л.Р..-К.: НТУУ, “ КПІ ”, 2012.-40с.

Гриф надано Вченою радою ІХФ

(Протокол №2 від 27 лютого 2012 р.)

Навчальне видання

СТАТИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ

Оптимізація технологічних процесів і систем керування

Методичні вказівки

до виконання розрахунково-графічних робіт

для студентів напряму підготовки „ Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології”

Укладач: Ладієва Леся Ростиславівна к.т.н.,доц.

Відповідальний редактор А.І.Жученко д.т.н.,проф.

Рецензент: О.С.Жураковська к.т.н.,доц.

Зміст

Вступ

Методичні вказівки присвячені питанням практичного використання методів статичної оптимізації для розрахунково-графічних робіт. Основна увага приділяється методам і алгоритмам, що використовуються при проектуванні, керуванні і аналізі функціонування технологічних об'єктів. Розглядаються методи лінійного програмування, як розділу дослідження операцій , які знайшли застосування при вирішенні задач, що пов'язані з ефективним використанням обмежених ресурсів. Методи нелінійного програмування орієнтовані на вирішення задач з обмеженнями.

Мета методичних вказівок для розрахунково-графічних робіт допомогти студентам освоїти розділи статичної оптимізації і застосувати знання на прикладах, представлених у формалізованому вигляді.

Розрахунково-графічна робота №1

Лінійне програмування

1.1. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

Приклад.

Розв'язати графічно таку задачу лінійного програмування (рис.1.1):

$Z = x_1 + 2x_2 (\max)$

$2x_1 + 4x_2 \geq 8$

$2x_1 - 3x_2 \leq 6$

$-3x_1 + 2x_2 \geq 9$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

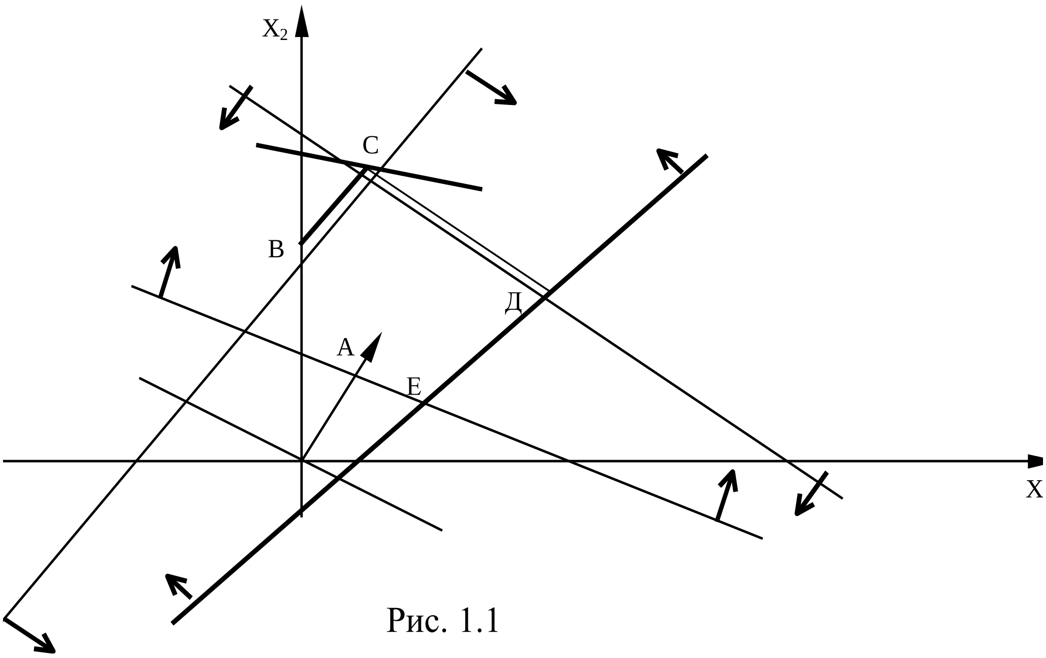

Рис. 1.1

Завдання 1.1.

Розв'язати графічно такі задачі лінійного програмування:

1.1
$$\begin{aligned} &Z = 7x_1 + 6x_2 (\max)\\ &2x_1 + 5x_2 \geq 10\\ &5x_1 + 2x_2 \geq 10\\ &x_1 \leq 6\\ &x_2 \leq 5\\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1.2
$$\begin{aligned} &Z = 3x_1 - 2x_2 (\max)\\ &2x_1 + x_2 \leq 11\\ &-3x_1 + 2x_2 \leq 10\\ &3x_1 + 4x_2 \geq 20\\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1.3
$$\begin{aligned} &Z = 5x_1 - 3x_2 (\min)\\ &3x_1 + 2x_2 \geq 6\\ &2x_1 - 3x_2 \geq -6\\ &x_1 + x_2 \leq 4\\ &4x_1 + 7x_2 \leq 28\\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1.4 $$Z = x_1 + 2x_2 (\max)$$
$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le 14 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 9 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 27 \\ 6x_1 - x_2 \ge 18 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

1.5 $$Z = 7x_1 - 2x_2 (\max)$$
$$\begin{array}{l} 5x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ -3x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

1.6 $$Z = 2x_1 + x_2 (\max)$$
$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 \ge 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12 \\ 7x_1 + 4x_2 \le 28 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

1.7 $$Z = 5x_1 + x_2 (\min)$$
$$\begin{array}{l} x_1 + 7x_2 \ge 7 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ 7x_1 + x_2 \ge 7 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 \le 7 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

1.8 $$Z = 3x_1 + 2x_2 (\max)$$
$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 \ge 1 \\ -5x_1 + x_2 \le 0 \\ 5x_1 + x_2 \ge 0 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

1.9 $$Z = x_1 + x_2 (\max)$$
$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 4 \\ 3x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 + 5x_2 \ge 4 \\ 0 \le x_1 \le 3 \\ 0 \le x_2 \le 3 \end{array}$$

1.10 $$Z = 7x_1 - x_2 (\min)$$
$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 \ge 3 \\ 5x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ 0 \le x_1 \le 4 \\ 0 \le x_2 \le 4 \end{array}$$

1.11 $$Z = 2x_1 + 3x_2 (\max)$$
$$\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \le 31 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 5x_1 \le 20 \\ 5x_2 \le 22 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

1.12 $$Z = 2x_1 - 3x_2 (\min)$$
$$\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 \ge -15 \\ 4x_1 - x_2 \ge 20 \\ x_1 - 2x_2 \ge 20 \\ 3x_1 + x_2 \ge 30 \\ x_1 \le 0,\ x_2 \le 0 \end{array}$$

1.13 $$Z = x_1 + 3x_2 (\max)$$
$$\begin{array}{l} -x_1 - x_2 \le -3 \\ 6x_1 + x_2 \le 42 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

1.14 $$Z = 7x_1 - 2x_2 (\min)$$
$$\begin{array}{l} 4x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ 5x_1 - x_2 \le 45 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

1.15 $$Z = 3x_1 + x_2 (\min)$$
$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ 4x_1 - 4x_2 \ge -8 \\ x_1 \ge 1 \\ 0 \le x_2 \le 3 \end{array}$$

1.16 $$Z = 5x_1 + x_2 (\max)$$
$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ 4x_1 - 8x_2 \ge 16 \\ x_1 \ge 1 \\ 0 \le x_2 \le 3 \end{array}$$

Використовуючи геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування в задачах 1.17-1.22, визначити область змінювання параметрів, для яких:

а) задача несумісна;

б) область необмежена;

в) задача має розв'язок;

г) область розв'язування зображена точкою;

д) якщо задача несумісна чи область необмежена, то змінити умови, щоб задача мала

розв'язок.

1.17 $Z = x_1 + x_2 (max)$
$x_1 + ax_2 \le 1$
$ax_1 - x_2 \le 1$
$x_1, x_2 \ge 0$

1.18 $Z = x_1 + x_2 (max)$
$x_1 + ax_2 \ge 1$
$x_1 + x_2 \le a$
$x_1, x_2 \ge 0$

1.19 $Z = x_1 + x_2 (max)$
$x_1 - x_2 \le a$
$x_1 - x_2 \ge -a$
$x_1, x_2 \ge 0$

1.20 $Z = x_1 + x_2 (max)$
$x_1 + x_2 \le 1$
$x_1 + x_2 \le 1$
$x_1 - x_2 \ge c$
$x_1, x_2 \ge 0$

1.21 $Z = x_1 - x_2 (min)$
$x_1 \le 1$
$-ax_1 + x_2 \ge 4$
$x_1, x_2 \ge 0$

1.22 $Z = 2x_1 + 3x_2 (min)$
$x_1 + x_2 \le 1$
$x_1 + bx_2 \le 1$
$x_1 - x_2 \ge c$
$x_1, x_2 \ge 0$

1.2. Симплекс метод розв'язування задач лінійного програмування

Розглянемо приклад:

$$Z = 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 (max)$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \quad \textbf{(1)}$$
$$3x_1 + 5x_2 \le 15 \quad \textbf{(2)}$$
$$6x_1 + x_2 \ge 12 \quad \textbf{(3)}$$
$$x_i \ge 0, \ j=1.3$$

Зведемо систему обмежень до стандартного вигляду. Для цього в обмеження (2) і (3) введемо додаткові змінні. У цільову функцію додаткові змінні входять з нульовими коефіцієнтами.

$$Z = 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 (max)$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$
$$3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15$$
$$6x_1 + x_2 - x_5 = 12$$
$$x_i \ge 0, \ j=1.3$$

Запишемо матрицю A і вектор B, утворені коефіцієнтами при змінних:

$$\overline{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \overline{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \overline{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overline{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overline{A}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix}$$

У системі немає одиничного базиса, тому для його утворення не вистачає вектора $\overline{A}_6$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Щоб дістати його, введемо штучну змінну в третє рівняння. В цільову функцію x_6 увійде з коефіцієнтом -M, тому що цільова функція максимізуватиметься. Дістанемо:

$$Z = 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 (\max)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$

$$3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15$$

$$6x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 12$$

$$x_i \geq 0$$

За допомогою М-метода (метода великих штрафів) побудуємо першу симплексну таблицю (таб.1.1.) і будемо далі розв'язувати задачу в табличній формі до здобуття оптимального плану:

Таблиця 1.1

$C_{баз}$	Базис	A_0	5	2	-6	0	0	-M	
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-6	x_3	8	1	2	1	0	0	0	8
0	x_4	15	3	5	0	1	0	0	5 min {8,5,2}=2
-M	x_6	12	6	1	0	0	-1	0	2
Zj-Cj	0	-48	-29	-14	0	0	0	0	x_1 = (0,0,8,15,12)
		-12M	-M	-M	0	0	M	0	Z_1 = -48, -12M
-6	x_3	6	0	11/6	1	0	1/6		36/11
0	x_4	9	0	9/2	0	1	1/2		2
5	x_1	2	1	1/6	0	0	-1/6		12
Zj-Cj	0	-26	0	-73/6	0	0	-11/6		x_2 = (2,0,6,9,0)

									$Z_2 = -26$
-6	x_3	**7/3**	**0**	**0**	**1**	**-11/27**	**-1/27**		**-9/7**
2	x_2	**2**	**0**	**1**	**0**	**2/9**	**1/9**		**18**
5	x_1	**5/3**	**1**	**0**	**0**	**-1/27**	**-5/27**		**-9**
Zj-Cj	**0**	**-5/3**	**0**	**0**	**0**	**73/27**	**-20/27**		$x_3 = (5/3,2,7/3,0)$
									$Z_3 = -5/3$
-6	x_3	**3**	**0**	**1/3**	**1**	**-1/3**	**0**		
0	x_5	**18**	**0**	**9**	**0**	**2**	**1**		
5	x_1	**5**	**1**	**5/3**	**0**	**1/3**	**0**		$x_0 = (5,0,3,0,18)$
Zj-Cj	**0**	**7**	**0**	**13/3**	**0**	**11/3**	**0**		$Z_{max} = 7$

Усі Zj-Cj ≥0; отже, план оптимальний.

Відповідь: $x_{опт} = (5,0,3,0,18)$; $Z_{max} = 7$.

Використаємо двоетапний симплекс-метод для розв'язку прикладу:

$$-3x_1 - 4x_2 = Z \to \min$$

$$x_1 \geq 10$$

$$x_2 \geq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 20$$

$$-x_1 + 4x_4 \leq 20$$

$$x_i \geq 0$$

Введемо додаткові змінні:

$$x_1 - x_3 = 10$$

$$x_2 - x_4 = 5$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 20$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_6 = 20$$

Змінимо два перші обмеження, увівши штучні змінни x_7 і x_8 і мінімізувати штучну
цільову функцію $W = x_7 + x_8$. У канонічній формі отримаємо:

$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = W - 15$. Розв`язо за допомогою двоетапного симплекс-методу показано у табл.1.2

Таблиця 1.2

Ітераці	Базис	Значення	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8

я										
0	x_7	**10**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
	x_8	**5**	**0**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**1**
	x_5	**20**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
	x_6	**20**	**-1**	**4**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
	-Z	**0**	**-3**	**-4**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
	-W	**15**	**-1**	**-1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	x_1	**10**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
	x_8	**5**	**0**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**1**
	x_5	**10**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**-1**	**0**
	x_6	**30**	**0**	**4**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
	-Z	**30**	**0**	**-4**	**-3**	**0**	**0**	**0**	**3**	**0**
	-W	**-5**	**0**	**-1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
2	x_1	**10**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
	x_2	**5**	**0**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**1**
	x_5	**5**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**-1**	**-1**
	x_6	**10**	**0**	**0**	**-1**	**4**	**0**	**1**	**1**	**-4**
	-Z	**50**	**0**	**0**	**-3**	**-4**	**0**	**0**	**3**	**4**
	-W	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
3	x_1	**10**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**		
	x_2	**7.5**	**0**	**1**	**-0.25**	**0**	**0**	**0.25**		
	x_5	**2.5**	**0**	**0**	**1.25**	**0**	**1**	**-0.25**		
	x_4	**2.5**	**0**	**0**	**-0.25**	**1**	**0**	**0.25**		
	-Z	**60**	**0**	**0**	**-4**	**0**	**0**	**1**		
4	x_1	**12**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0.8**	**-0.2**		
	x_2	**6**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0.2**	**0.2**		
	x_3	**2**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0.8**	**-0.2**		
	x_4	**3**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0.2**	**0.2**		
	-Z	**68**	**0**	**0**	**0**	**0**	**3.2**	**0.2**		

Завдання 1.2.

Розв'язати двоетапним симплекс методом такі задачі:

1.31

$$Z = 6x_1 + 5x_2 + x_3 (\max)$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 10$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$$
$$x_j \ge 0$$

1.32

$$Z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 (\min)$$
$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 24$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 18$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 18$$
$$x_j \ge 0$$

1.33

$$Z = 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 (\max)$$
$$6x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 24$$
$$x_1 + x_2 + 8x_3 = 24$$
$$3x_1 + x_2 + 5x_3 = 30$$
$$x_j \ge 0$$

1.34

$$Z = 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 (\min)$$
$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 12$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 16$$
$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 20$$
$$x_j \ge 0$$

1.35

$$Z = 7x_1 - 8x_2 + 6x_3 (\max)$$
$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 \ge 9$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12$$
$$x_1 + x_2 + 5x_3 = 15$$
$$x_j \ge 0$$

1.36

$$Z = 8x_1 + x_2 - 7x_3 (\min)$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 10$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 6$$
$$x_1 + 4x_2 + 8x_3 \ge 64$$
$$x_j \ge 0$$

1.37

$$Z = 10x_1 - 12x_2 - 24x_3 (\max)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \ge 12$$

1.38

$$Z = -5x_1 - 8x_2 - 10x_3 (\max)$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 8$$

1.39

$$Z = 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 (\max)$$
$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 16$$

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ &x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 24 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 6 \\ &3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \ge 30 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ &3x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.40 $$\begin{aligned} &Z = 7x_1 + 8x_2 - x_3 (\min) \\ &4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \ge 15 \\ &x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 8 \\ &4x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.41 $$\begin{aligned} &Z = x_1 + 10x_2 + x_3 (\max) \\ &5x_1 + 5x_2 + x_3 \le 15 \\ &x_1 + x_2 + 3x_3 \le 15 \\ &3x_1 + x_2 \qquad \le 4 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.42 $$\begin{aligned} &Z = 2x_1 - x_2 - x_3 (\max) \\ &10x_1 + x_2 + 2x_3 \le 12 \\ &x_1 + x_2 + x_3 \le 16 \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 \le 18 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.43 $$\begin{aligned} &Z = -x_1 + 4x_2 + 6x_3 (\max) \\ &8x_1 + 7x_2 + x_3 \le 16 \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 \le 12 \\ &2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 12 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.44 $$\begin{aligned} &Z = 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 (\max) \\ &x_1 + 3x_2 + x_3 \le 15 \\ &2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 16 \\ &x_1 + x_2 \qquad \le 4 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.45 $$\begin{aligned} &Z = -x_1 + x_2 + x_3 (\max) \\ &4x_1 + 5x_2 + x_3 \le 24 \\ &-6x_1 - 8x_2 \qquad \ge -24 \\ &x_1 + 5x_2 + x_3 \le 15 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.46 $$\begin{aligned} &Z = -2x_1 + 4x_2 + x_3 (\max) \\ &2x_1 + x_2 + 5x_3 \le 18 \\ &-x_1 \qquad - 2x_3 \ge -8 \\ &3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 9 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.47 $$\begin{aligned} &Z = -5x_1 + x_2 + x_3 (\max) \\ &x_1 + 6x_2 + x_3 \le 12 \\ &2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 12 \\ &x_1 + x_2 + 5x_3 \le 15 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.48 $$\begin{aligned} &Z = -6x_1 - 5x_2 + x_3 (\min) \\ &x_1 + x_2 + 7x_3 \le 14 \\ &2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6 \\ &-3x_1 - 4x_2 - x_3 \ge -15 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.49 $$\begin{aligned} &Z = 5x_1 + x_2 + 2x_3 (\max) \\ &x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 \\ &2x_1 + x_2 \quad 6x_3 \le 12 \\ &x_1 + x_2 + 3x_3 \le 12 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.50 $$\begin{aligned} &Z = 6x_1 + 6x_2 + 5x_3 (\max) \\ &x_1 + 8x_2 + 3x_3 \le 24 \\ &x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 9 \\ &3x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.51 $$\begin{aligned} &Z = -10x_1 - 10x_2 - 9x_3 (\min) \\ &5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \ge 60 \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ &3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.52 $$\begin{aligned} &Z = 5x_1 + 25x_2 + 10x_3 (\max) \\ &7x_1 + 4x_2 + x_3 = 58 \\ &8x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 96 \\ &x_1 + x_2 + 5x_3 \ge 50 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.53 $$\begin{aligned} &Z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 (\max) \\ &x_1 + x_2 + 9x_3 \le 18 \\ &2x_1 + x_2 + 4x_3 = 60 \\ &x_1 + 5x_2 + 3x_3 \ge 30 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.54 $$\begin{aligned} &Z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 (\max) \\ &4x_1 + 4x_2 + x_3 \le 16 \\ &x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ &2x_1 + x_2 + 8x_3 \ge 24 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.55 $$\begin{aligned} &Z = -x_1 + x_2 - x_3 (\min) \\ &4x_1 + 5x_2 + x_3 \ge 40 \\ &x_1 + x_2 + 3x_3 = 30 \\ &5x_1 + 3x_2 + x_3 = 45 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.56 $$\begin{aligned} &Z = 7x_1 + 5x_2 + x_3 (\max) \\ &x_1 + x_2 + x_3 \ge 6 \\ &3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 12 \\ &x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 9 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.57 $$\begin{aligned} &Z = 3x_1 + 3x_2 + x_3 (\min) \\ &2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ &-x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -12 \\ &4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \ge 24 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.58 $$\begin{aligned} &Z = 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 (\max) \\ &-x_1 - 5x_2 + 5x_3 \le -60 \\ &2x_1 + x_2 + 9x_3 \ge 90 \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 30 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.59 $$\begin{aligned} &Z = -x_1 - x_2 - 3x_3 (\min) \\ &4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16 \\ &x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ &x_1 + x_2 + 5x_3 \ge 25 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.60 $$\begin{aligned} &Z = 7x_1 - x_2 - 8x_3 (\max) \\ &5x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ &x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 16 \\ &2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ &x_j \ge 0 \end{aligned}$$

1.3. Двоїста задача

Приклад.

Нехай задана початкова задача

$Z = 8x_1 + 6x_2 + 9x_3 (max)$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$

$3x_1 + x_2 + 2x_4 = 18$

$x_j \geq 0$

Треба знайти розв’язок як заданої задачі, так і двоїстої для неї. Будуємо двоїсту задачу

$F = 12y_1 + 18y_2 (min)$

$y_1 + 3y_2 \geq 8$

$2y_1 + y_2 \geq 6$

$y_1 + 2y_2 \geq 9$

$x_j \geq 0$

y_1, y_2 - ,будь які значення

У двоїстої задачі (несиметричній) відсутні умови невід’ємності змінних. Тому її розв’язувати безпосередньо симплексним методом не можна.

Розв’яжемо початкову задачу і за її розв’язком знайдемо розв’язок двоїстої задачі (табл. 1.3).

Таблиця 1.3

Базис	**Значення**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	12	1	2	1	1	0	12
x_5	18	3	1	2	0	1	6
-Zj	0	-8	-6	-9	0	0	
-W	-30	-4	-3	-3	0	0	
x_4	6	0	5/3	1/3	1	-1/3	18/5
x_1	6	1	1/3	2/3	0	1/3	18
-Zj	48	0	-10/3	1/3	0	8/3	
-W	-6	0	-5/3	3/3	0	1/3	
x_2	18/5	0	1	1/5	3/5	-1/5	18
x_1	24/5	1	0	3/5	-1/5	2/5	8
-Zj	60	0	0	-3	2	2	
-W	0	0	0	0			
x_2	2	-1/3	1	0	2/3	-1/3	
x_3	8	5/3	0	1	-1/3	2/3	
-Zj	84	5	0	0	1	4	

Знайдемо розв’язок двоїстої задачі за формулою $y_{опт} = C_{баз} * D^{-1}$,

де $C_{баз}$=(6;9);

$$D = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$Y_0 = (6,9) * \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (1;4)$$

$F_{min} = 12*1+18*4 = 84$

Перевірка $Z_{max} = F_{min} = 84$.

Приклад.

На основі графічного аналізу двоїстої задачі до початкової дослідити розв'язок обох задач і в разі його присутності знайти оптимальний розв'язок, використовуючи другу теорему двоїстості.

Початкова задача:

$$F = y_1 + y_2 \quad (\max)$$

$$-3y_1 + 2y_2 \le 1$$

$$2y_1 + 2y_2 \le 13$$

$$3y_1 - y_2 \le 12$$

$$y_1 \ge 0, \; y_2 \ge 0$$

Розв'яжемо графічно двоїсту задачу (рис. 1.2)

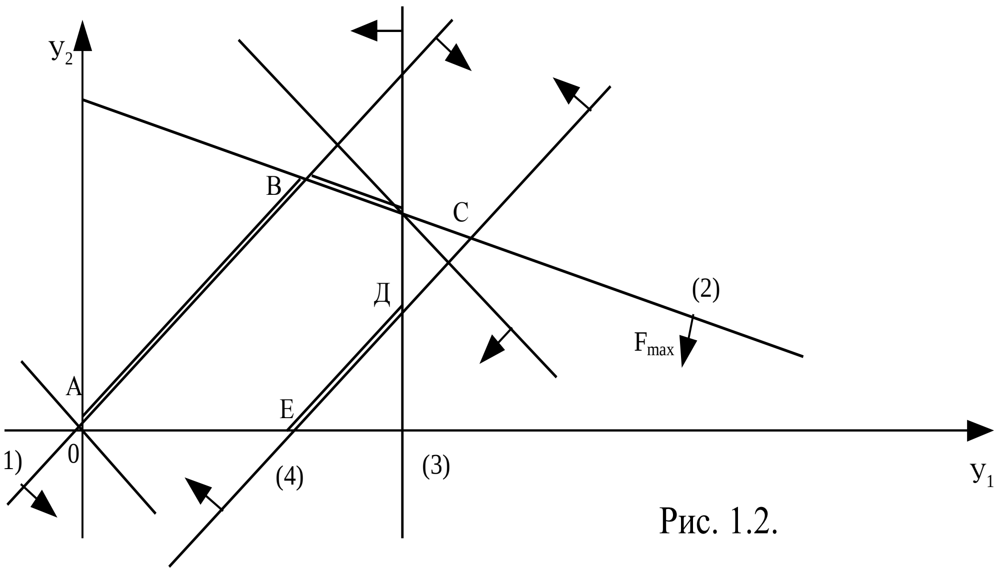

Рис. 1.2.

Побудуємо багатокутник розв'язку. Кожне обмеження є півплощиною. Перетинання відповідних півплощин з умовою невід'ємності змінних $y_j \ge 0$ утворить багатокутник розв'язання ABCDEO.

Визначимо крайню кутову точку, в якій пряма цільової функції буде опорною. Такою точкою буде точка С. Координати точки С визначають, розв'язуючи систему рівнянь для прямих, які перетинаються в точці С (прямі 2 і 3)

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &= 14 \\ 2y_1 + \ \ y_2 &= 13 \end{aligned}$$

Розв'язок системи визначить оптимальний план двоїстої задачі

$$y_1 = 4;\ y_2 = 5;\ y_0 = (4;5);\ F\max = 9.$$

Згідно з першою теоремою двоїстості матиме розв'язок і початкова задача, причому Zmin = Fmax.

Для визначення оптимального плану початкової задачі використаємо другу теорему двоїстості. Якщо підставимо оптимальний розв'язок двоїстої задачі в першу і четверту нерівності системи обмеження цієї задачі, то побачимо, що ці нерівності виконуються як строгі, тобто

$$-12 + 10 = -2 < 1, \quad 12 - 10 \le 12.$$

Отже, відповідні змінні x_1 і x_4 початкової задачі повинні дорівнювати нулю (згідно з теоремою двоїстості). Обмеження початкової задачі перетворюються в рівняння, тому що відповідні їм змінні

$$y_1 = 4 > 0; \quad \text{і} \quad y_2 = 5 > 0.$$

Тоді з системи рівнянь початкової задачі

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_2 + \ \ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Отже, x_0=(0,1/3,1/3,0)   Zmin = 9

При цьому Zmin = Fmax = 9, що підтверджує правильність розв'язку.

Завдання 1.3

Побудувати двоїсту задачу до початкової. Розв'язати одну з пари задач і знайденим розв'язком дістати розв'язок двоїстої задачі:

1.61 $$\begin{aligned} &Z = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 (\max) \\ &4x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ &x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 12 \\ &x_1 + 5x_2 + x_3 \ge 20 \end{aligned}$$

1.62 $$\begin{aligned} &Z = 5x_1 + x_2 + 4x_3 (\max) \\ &x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ &2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ &x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 30 \end{aligned}$$

1.63 $$\begin{aligned} &Z = 5x_1 + 6x_2 + x_3 (\min) \\ &x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 12 \\ &2x_1 + x_2 + x_3 \ge 12 \\ &x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6 \end{aligned}$$

$x_j \ge 0$ $x_j \ge 0$ $x_j \ge 0$

1.64 $Z = 8x_1 + 8x_2 + 4x_3 (max)$

$x_1 + x_2 + 3x_3 \le 6$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8$

$4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 12$

$x_j \ge 0$

1.65 $Z = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 (max)$

$2x_1 + x_2 + 7x_3 \le 28$

$x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 18$

$x_1 + 4x_2 + x_3 \le 16$

$x_j \ge 0$

1.66 $Z = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 (max)$

$x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 20$

$4x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 18$

$x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 12$

$x_j \ge 0$

1.67

$Z = 8x_1 + 8x_2 + 12x_3 (max)$

$6x_1 + 5x_2 + 5x_3 \ge 30$

$x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 16$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 18$

$x_j \ge 0$

1.68 $Z = 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 (min)$

$x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 16$

$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 16$

$3x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 30$

$x_j \ge 0$

1.69 $Z = 8x_1 + 16x_2 + 9x_3 (min)$

$2x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 8$

$x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 8$

$3x_1 + x_2 + 6x_3 \ge 18$

$x_j \ge 0$

1.70 $Z = 5x_1 + x_2 + 4x_3 (min)$

$x_1 + 5x_2 + x_3 \le 10$

$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8$

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$

$x_j \ge 0$

1.71 $Z = 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 (max)$

$x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 24$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 24$

$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 16$

$x_j \ge 0$

1.72 $Z = x_1 + x_2 + 5x_3 (max)$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$

$x_1 + x_2 + x_3 \ge 4$

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8$

$x_j \ge 0$

1.73 $Z = 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 (min)$

$8x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 24$

$x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 12$

$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \ge 30$

$x_j \ge 0$

1.74 $Z = 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 (min)$

$6x_1 - 8x_2 + x_3 \ge 36$

$x_1 + 3x_2 + 10x_3 \ge 30$

$5x_1 + x_2 - x_3 \ge 32$

$x_j \ge 0$

Алгоритм подвійного симплекс-метода був виведений без звернення до двоїстості. Однак двоїстість дозволяє поглянути на процедуру по іншому.

Розглянемо задачу:

Знайти такі $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, що

$$x_1 + 3x_3 \ge 3$$

$$x_2 + 2x_3 \ge 5$$

та функцію $4x_1 + 6x_2 + 18x_3 = Z$ має мінімальне значення.

Оскільки коефіцієнти у виразі для функції Z додатні, можливо уникнути введення штучних змінних та вирішити задачу з використанням подвійного симплекс-методу.

Симплекс-множники дорівнюють:

$$\pi^{T} = -(B^{-1})^{T} * C_{в} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1 \\ -1/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 & -1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Приведемо таблицю послідовних обчислень подвійним симплекс методом:

Таблиця 1.4

Ітерація	Базис	Значення	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	**-3**	**-1**	**0**	**-3**	**1**	**0**
	x_5	**-5**	**0**	**-1***	**-2**	**0**	**1**
	-Z	**0**	**4**	**6**	**18**	**0**	**0**
1	x_4	**-3**	**-1**	**0**	**-3***	**1**	**0**
	x_5	**5**	**0**	**1**	**2**	**0**	**-1**
	-Z	**-30**	**4**	**0**	**6**	**0**	**6**
	x_2	**1**	**1/3**	**0**	**1**	**-1/3**	**0**
	x_3	**3**	**-2/3**	**1**	**0**	**2/3**	**-1**
	-Z	**-36**	**2**	**0**	**0**	**2**	**6**

Таким чином в оптимальному рішенні

$\mathbf{x_1}=0$, $\mathbf{x_2}=3$, $\mathbf{x_3}=1$ та $\mathbf{Z}_{min}=36$.

Симплекс-множники (коефіцієнти при нових змінних $\mathbf{x_4}$ та $\mathbf{x_5}$ кінцевому вигляді для функції **Z**) дорівнюють $\pi_1=2$ та $\pi_2=6$.

Розглянемо двоїсту задачу:

Знайти такі $\mathbf{y_1 \geq 0}$, $\mathbf{y_2 \geq 0}$, що

$$\mathbf{y_1 \leq 4}$$

$$\mathbf{y_2 \leq 6}$$

$$\mathbf{y_1 + y_2 \leq 18}$$

та функція $3\mathbf{y_1} + 5\mathbf{y_2} = \mathbf{W}$ має максимальне значення.

При звичайному підході до задачі мінімізуємо функцію

$$W' = -3y_1 - 5y_2$$

Приведемо таблицю послідовних обчислень:

Таблиця 1.5.

Ітерація	Базис	Значення	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	y_3	4	1	0	1	0	0
	y_4	6	0	1^*	0	1	0
	y_5	18	3	2	0	0	1
	$-W'$	0	-3	-5	0	0	0
1	y_3	4	1	0	1	0	0
	y_4	6	0	1	0	1	0
	y_5	6	3^*	0	0	-2	1
	$-W'$	30	-3	0	0	5	0
2	y_3	2	0	0	1	2/3	-1/3
	y_2	6	0	1	0	1	0
	y_1	2	1	0	0	-1/3	1/3
	$-W'$	36	0	0	0	3	1

Симплекс-множники (для цільової функції W') ρ_1=0, ρ_2=3, ρ_3=1, (коефіцієнти при нових змінних $\mathbf{y_3}$, $\mathbf{y_4}$, $\mathbf{y_5}$). Вони дають значення змінних прямої задачі. Двоїсті змінні $\mathbf{y_1=2}$ та $\mathbf{y_2=6}$ є симплекс-множниками прямої задачі. У проведених обчисленнях подвійний симплекс-метод для рішення прямої задачі та симплекс-метод для рішення зворотної задачі, за суттю, ідентичні.

Завдання 1.4

Розв’язати пряму задачу і порівняти з рішенням двоїстої задачі.

1.75
$$-2x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 7$$
$$-5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \ge 6$$
$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1.4};$$
$$Z = -10x_1 - 10x_2 + 6x_3 - 5x_4 \text{ (min)}$$

1.76
$$-x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 \ge 2$$
$$x_1 + 7x_2 - 3x_3 - x_4 \ge -1$$
$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1.4};$$
$$Z = 3x_1 + 42x_2 + 6x_3 - 4x_4 \text{ (min)}$$

1.77
$$-2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 3$$
$$-x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le -2$$
$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1.3};$$
$$Z = -14x_1 - 9x_2 + 27x_3 \text{ (max)}$$

1.78
$$x_1 + 3x_2 - 5x_3 \ge 1$$
$$2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \ge 2$$
$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1.3};$$
$$Z = 15x_1 + 8x_2 - 26x_3 \text{ (min)}$$

1.79
$$5x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 \le -5$$
$$2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 - x_6 \le -5$$
$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1.6};$$
$$Z_{max} = 10x_1 + 10x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 6x_5 - 6x_6$$

1.80
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 \le 5$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 7x_4 \le -3$$
$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1.4};$$
$$Z_{max} = 6x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 28x_4$$

1.81 $x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 \geq 3$
$x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 \geq 3$
$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1.5};$
$Z = 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 (\min)$

1.82 $x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \leq 7$
$x_1 + x_2 + 5x_3 - x_5 \leq -1$
$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1.5};$
$Z = 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 - 4x_5 (\max)$

1.83 $-3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \geq 4$
$-3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 3x_5 \geq 1$
$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1.4};$
$Z = -3x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 8x_4 (\min)$

1.84 $x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 10x_4 - 5x_5 \leq -7$
$7x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_5 - x_6 \leq -2$
$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1.6};$
$Z = 7x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 20x_4 - 6x_5 - 6x_6 (\min)$

1.85 $x_1 + 4_2 - 3x_3 - 5x_4 \leq -6$
$x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 - x_5 \leq 1$
$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1.5};$
$Z = 3x_1 - 4x_2 - 24x_3 - 20x_4 - 6x_5 (\max)$

1.86 $-3x_1 - 3_2 + x_3 \geq 2$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_4 \geq 2$
$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1.4};$
$Z = 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 5x_4 (\min)$

1.85 $-x_1 - 10x_2 - x_3 + x_4 \geq 3$
$-x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 \geq 1$
$x_j \geq 0 \;. \quad j = \overline{1.4};$
$Z = -2x_1 - 10x_2 - 5x_3 + 8x_4 (\min)$

1.85 $-8x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1$
$5x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leq 1$
$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1.3};$
$Z = -16x_1 - 2x_2 + 9x_3 (\max)$

1.4. Транспортна задача лінійного програмування.

Транспортною задачею лінійного програмування називають специфічну задачу пошуку найбільш економічного варіанту транспортування вантажу від кількох пунктів, де вантаж знаходився спочатку, до пунктів де його потребують споживачі. Транспортна задача це задача лінійного програмування, яку можна розв'язати звичайним симплексним методом, але її значно легше та ефективніше розв'язувати спеціальними алгоритмами, зокрема методом потенціалів.

Загальна постановка транспортної задачі має такий вигляд:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij}\, x_{ij} \rightarrow (\min);$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_{ij}; i = \overline{1, m}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geq b_j; j = \overline{1, n};\ x_{ij} \geq 0,$$

де C_{ij} - коефіцієнт питомих транспортних витрат при перевезенні вантажу з пункту і до пункту j; x_{ij} - кількість вантажу, який перевозиться з пункту (і =

1,m) до пункту j (j = 1,n); a_i - потужність поставщика i; b_i - потужність споживачі j.

У тому разі, коли $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, транспортна задача є закритою.

Коли ж $\sum a_i \neq \sum b_j$ впроваджується фіктивний поставщик або споживач залежно від того, де сумарна потужність менша за розміром. До матриці коефіцієнтів питомих транспортних витрат додається стовпчик або рядок з нульовими питомими витратами C_{ij} (залежно від того, де додається фіктивний контрагент).

Розв'язання транспортної задачі складається з двох основних етапів. На першому будується початковий опорний план, на другому - пошук оптимального плану. Перший опорний план можна будувати одним з чотирьох методів: північно-західного кута, мінімального елемента, подвійної переваги та апроксимації Фогеля. Пошук оптимального плану на другому етапі треба робити з допомогою методу потенціалів. План перевезень буде оптимальним, якщо знайдено систему з (n+m) чисел α_i, β_j, які відповідають умовам

$$\alpha_i + \beta_j = C_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0$$
$$\alpha_i + \beta_j \quad C_{ij} \text{ для } x_{ij} = 0$$

або

$$\Delta_{ij} = C_{ij} = (\alpha_i + \beta_j) \quad 0$$

Приклад.

Розв'язати транспортну задачу перевезень однорідного вантажу.

- Потужності поставщиків: a_i = (40, 30, 20),
- потужності споживачів b_j = (40, 30, 40, 10).
- Матриця коефіцієнтів питомих транспортних витрат

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Перший опорний план побудуємо методом подвійної переваги. Він матиме такий вигляд (табл. 1.6.).

Таблиця 1.6

a_i	Перевезення для b_i				
	40	30	40	10	$\propto_i$
40	^{4}	30 ^{1}	+ ^{2}	-10 ^{1}	0
30	^{5}	^{2}	30 ^{4}	+0 ^{2}	1
20	20 ^{1}	^{3}	^{3}	^{3}	-2
30	^{0}	^{0}	10 ^{0}	^{0}	-3
β_j	3	1	3	1	

Для першого варіанту плану цільова функція

$Z = 30\times1 + 10\times1 + 30\times4 + 0\times2 + 20\times1 + 20\times0 + 10\times0 = 180$.

Для перевірки оптимального плану обчислимо значення

$\Delta_{ij} = C_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)$.

Серед них відберемо лише Δ_{ij}, що менше за нуль. У даному разі це всього одне значення (якщо їх було б кілька, то вибирали б максимальне за модулем). Таким чином,

$\Delta_{1,3} = 2 - (3 + 0) = -1$

Побудуємо цикл у клітинці (1,3). Потім за зайнятими маршрутами або клітинками побудуємо цикл перебудови плану (його вдосконалення). Перенумеруємо вершини циклу знаками “+” і “-”, починаючи з нової клітинки (1,3). Далі виберемо за маршрутом, позначеним знаком “-”, найменше число (10). Це означає, що x_{13} = 10.

Число 10 додамо до кількості вантажу в клітинках, позначених знаком ”+”, та віднімемо в клітинках, позначених знаком “-”. Після цього побачимо, що один маршрут ввійшов до плану, а один вийшов з нього. Таким чином, дістали новий план. Він має такий вигляд (табл. 1.7.).

Таблиця 1.7.

a_i	Перевезення для b_i				
	40	30	40	10	$\propto_i$
40	^{4}	-30 ^{1}	+10 ^{2}	^{1}	0
30	^{5}	+ ^{2}	-20 ^{4}	10 ^{2}	2
20	20 ^{1}	^{3}	^{3}	^{3}	-1
30	20 ^{0}	^{0}	10 ^{0}	^{0}	-2
β_j	2	1	2	1	

Знов обчислимо значення Δ_{ij}, серед яких від’ємним буде те, яке відповідає маршруту (2,3):

$\Delta_{2,3} = 2 - 1 + 2 = -1$

Побудуємо цикл зміни плану. Він відображений на схемі транспортної задачі. Дістанемо оптимальний розв’язок, який має такий вигляд (табл. 1.8.).

Таблиця 1.8.

a_i	**Перевезення для b_i**				
	40	30	40	10	α_i
40	^{4}	$10\ ^{1}$	$30\ ^{2}$	^{1}	0
30	^{5}	$20\ ^{2}$	^{4}	$10\ ^{2}$	1
20	$20\ ^{1}$	$3\ ^{3}$	^{3}	^{3}	-1
30	$20\ ^{0}$	$0\ ^{0}$	$10\ ^{0}$	^{0}	-2
β_j	2	1	2	1	

$Z = 10\times1 + 30\times2 + 20\times2 + 10\times2 + 20\times1 + 20\times0 + 10\times0 = 150$.

Завдання 1.5

Розв’язати транспортну задачу:

1.89 $a = (10,\ 20,\ 10,\ 30);$ $b = (20,\ 10,\ 10,\ 20);$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

1.90 $a = (5,\ 18,\ 12,\ 25);$ $b = (1,\ 16,\ 18,\ 24);$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

1.91 $a = (3,\ 17,\ 8,\ 16);$ $b = (4,\ 16,\ 8,\ 17);$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 9 & 8 & 11 \\ 1 & 12 & 14 & 9 \\ 2 & 8 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

1.92 $a = (10,\ 10,\ 20,\ 10);$ $b = (20,\ 10,\ 10,\ 20);$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1.93 $a = (20,\ 10,\ 30,\ 30);$ $b = (30,\ 30,\ 20,\ 30);$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.94 $a = (10,\ 20,\ 40,\ 10);$ $b = (20,\ 20,\ 50,\ 20);$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

1.95 $a = (80,\ 40,\ 80,\ 80);$ $b = (90,\ 60,\ 20,\ 40);$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1.96 $a = (18,\ 12,\ 16,\ 24);$ $b = (4,\ 15,\ 25,\ 36);$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

1.97 $a = (10,\ 20,\ 10,\ 15);$ $b = (10,\ 20,\ 10,\ 20);$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

1.98 $a = (5,\ 3,\ 8,\ 6)$; $b = (4,\ 2,\ 6,\ 4)$;

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 6 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

1.99 $a = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$; $b = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$;

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1.100 $a = (20,\ 10,\ 15,\ 8)$; $b = (10,\ 17,\ 15,\ 6)$;

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 16 \\ 21 & 15 & 13 & 18 \\ 17 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & 13 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

1.101 $a = (6,\ 12,\ 12,\ 13)$; $b = (8,\ 10,\ 12,\ 13)$;

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1.102 $a = (8,\ 7,\ 15,\ 15)$; $b = (6,\ 9,\ 20,\ 22)$;

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 7 & 4 \\ 9 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

1.103 $a = (10,\ 10,\ 12,\ 18)$; $b = (10,\ 10,\ 15,\ 15)$;

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 5 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1.104

$a = (8,\ 9,\ 11,\ 22)$; $b = (7,\ 7,\ 14,\ 12)$;

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 12 & 9 \\ 8 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

1.105 $a = (10,\ 12,\ 8,\ 10)$; $b = (20,\ 10,\ 17,\ 18)$;

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 5 \\ 9 & 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1.106 $a = (10,\ 12,\ 10,\ 18)$; $b = (17,\ 13,\ 15,\ 25)$;

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

1.107 $a = (5,\ 6,\ 7,\ 5)$; $b = (4,\ 8,\ 3,\ 7)$;

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 1 & 8 \\ 4 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

1.108 $a = (13,\ 8,\ 11,\ 14)$; $b = (12,\ 6,\ 11,\ 8)$;

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 7 \\ 9 & 2 & 9 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Цілочисельне програмування

Приклад.

Знайти розв'язок задачі

$Z = x_1 + 4x_2 \quad (\min),$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2,$

$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6,$

$x_i > 0, \quad j = 1.4$

$x_j - цілі$

Задача розв'язується методом відтинаючих площин (метод Гоморі). На першому етапі розв'язання відкидаємо умову цілочисельності і розв'язуємо задачу звичайним симплекс-методом (табл. 2.1.)

Таблиця 2.1.

Базис	$C_{баз}$	A	1	4	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	2	-1	2	1	0	1
x_4	0	6	3	2	0	1	3
Z_i-C_i		0	-1	-4	0	0	
x_2	4	1	-1/2	1	1/2	0	-
x_4	0	4	4	0	-1	1	1
Z_j-C_j		4	-3	0	2	0	
x_2	4	3/2	0	1	3/8	1/8	
x_1	1	1	1	0	-1/4	1/4	
Z_j-C_j		7	0	0	5/4	3/4	

Здобутий план x=(1,3/2,0,0) - умовно оптимальний відносно даної початкової задачі, оскільки всі (Z_i-$C_i \geq 0$ ля всіх A_J), але не виконується умова цілочисельності змінних. На другому етапі розв'язку переходимо до розв'язання задачі з цією умовою.Запишемо перший переріз Гоморі:

$$\left(\left\{\frac{3}{8}\right\}x_3 + \left\{\frac{1}{8}\right\}x_4\right) \geq \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

або

$$\left(\left\{\frac{3}{8}\right\}x_3 + \left\{\frac{1}{8}\right\}x_4\right) \geq \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 - x_5 = \frac{1}{2};$$

$$\frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 - x_5 + W = \frac{1}{2}.$$

Додамо здобуте рівняння до двох рівнянь останньої симплексної таблиці (табл. 2.1.) дістанемо нову задачу (табл. 2.2.). Знайдемо її розв'язок .

Таблиця2.2.

Базис	$C_{баз}$	A	1	4	0	0	0	-M	Q_i

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	W_1	
x_1	4	3/2	0	1	3/8	1/8	0	0	4
x_2	1	1	1	0	-1/4	1/4	0	0	—
W_2	-M	1/2	0	0	3/8	1/8	-1	1	4/3
Z_j-C_j		7	0	0	5/4	3/4	0	0	
		1/2	0	0	-3/8	-3/8		0	
x_1	4	1	0	1	0	0	1		
x_2	1	4/3	1	0	0	1/3	-2/3		
x_3	0	4/3	0	0	1	1/3	-8/3		
Z_j-C_j		16/3	0	0	0	1/3	10/3		

Знов дійстанемо умовно оптимальний план. Виходячи з цього перейдемо до побудови нової

задачі (табл.2.3.).

Другий переріз Гоморі має вигляд

$$\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}x_4 + \left\{-\frac{2}{3}\right\}x_5\right) \geq \left\{\frac{4}{3}\right\}$$

або після закінчення перетворювань

$$\frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 - x_6 + W_2 = \frac{1}{3}.$$

Таблиця2.3.

Базис	$C_{баз}$	A	1	4	0	0	0	0	-M	Qi
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	W_2	
x_2	4	1	0	1	0	0	1	0	0	
x_1	1	4/3	1	0	0	1/3	-2/3	0	0	4
x_3	0	4/3	0	0	1	1/3	-8/3	0	0	4
W_2	-M	1/3	0	0	0	1/3	1/3	-1	1	1
Z_j-C_j		16/3	0	0	0	1/3	10/3	0	0	
		1/3	0	0	0	-1/3	-1/3	M	0	
x_2	4	1	0	1	0	0	1	0		
x_1	1	1	1	0	0	0	-3	0		
x_3	0	1	0	0	1	0	-3	1		
x_4	0	1	0	0	0	1	1	-3		
Z_j-C_j		5	0	0	0	0	3	1		

Здобутий план буде оптимальним і одночасно відповідатиме умові цілочисельності:

$$\overline{x_{опт}} = (1,1,1,1), Z_{\max} = 5$$

Завдання2.1.

На основі умовно-оптимального плану цілочисельних задач побудувати додаткові обмежен-ня і приєднавши їх до плану, знайти цілочисельний розв'язок.

2.1.

C	Базис	План	-3	-4	0	0	0
			x_1	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	7/11	5/11	5/11	0	0	1
0	x_5	10/11	2/11	2/11	1	0	0
0	x_6	3/11	16/11	16/11	0	1	0
Z_j-C_j		0	3	4	0	0	0

2.2.

C	Базис	План	5	10	2	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_3	1/6	0	0	1	-7/3	5/6
5	x_1	1/2	1	0	0	-1/6	-2/3
10	x_2	5/6	0	1	0	2/3	1/3
Z_j-C_j		67/6	0	0	0	7/6	5/3

2.3.

C	Базис	План	0	-2	1	-3	4
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_4	13/7	0	-2/7	-1	1	6/7
0	x_1	4/7	1	8/7	2	0	-3/7
Z_j-C_j		-39/7	0	20/7	3	0	10/7

2.4.

C	Базис	План	1	-2	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-2	x_2	1/5	6/5	1	0	0	1/5
0	x_3	7/5	8/5	0	1	0	-13/5
0	x_4	3/5	3/5	0	0	1	2/5
Z_j-C_j		-2/6	-17/5	0	0	0	-2/5

2.5.

C	Базис	План	-4	1	2	0	-3
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_3	2	-1	0	1	0	4
1	x_2	14/9	-2/9	1	0	0	16/9
0	x_1	41/9	15/9	0	0	1	-7/9
Z_j-C_j		50/9	16/9	0	0	0	115/9

2.6.

C	Базис	План	3	6	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
6	x_2	1/7	0	1	5/7	0	1/7
0	x_4	15/7	0	0	13/7	1	-20/7
3	x_1	2/7	1	0	-9/7	0	4/7

Z_j-C_j	12/7	0	0	3/7	0	18/7

2.7.

C	Базис	План	2	3	4	0	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	1/3	1	4/3	-17/3	0	0
0	x_4	5/6	0	-7/6	1/6	1	0
0	x_5	2/3	0	-1/3	8/3	0	1
Z_j-C_j		2/3	0	-1/3	-46/3	0	0

2.8.

C	Базис	План	1	-4	1	0	2
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_5	1/2	0	0	5/2	7/3	1
1	x_1	2/3	1	0	2	-20/3	0
-4	x_2	1/6	0	1	17/6	-1/3	0
Z_j-C_j		1	0	0	-13/3	-2/3	0

2.9.

C	Базис	План	-1	2	0	3	4
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1	x_1	7/4	1	1/4	-3/4	7/2	0
-5	x_5	3/2	0	1/2	5/2	-1/2	1
Z_j-C_j		-37/4	0	-19/4	-47/4	-9/4	0

2.10.

C	Базис	План	-1	1	2	3	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1	x_1	1/3	1	1/3	0		
2	x_3	2/3	0	5/3	1		
0	x_5	4/3	0	13/3	0		
Z_j-C_j		1	0	2			

Розрахунково-графічна робота №2

3.Нелінійне програмування

3.1 Геометрична інтерпретація задач нелінійного програмування

Приклад.

Розв'язати задачу нелінійного програмування.

$Z = x_1 x_2 \to \max;$
$6x_1 + 6x_2 \le 36;$
$x_1 + 2x_2 \ge 2;$
$2x_1 + x_2 \le 10;$
$x_i \ge 0$

Область припустимих розв'язків системи -багатокутник АВСВ. Цільова функція при сталому значенні Z- гіпербола X_2=Z/X_1 з центром у початку координат. При збільшенні значення Z гіпербола зміщується вгору, доки не зіткнеться з межою області припустимих розв'язків у точці М Координати цієї точки знаходимо, виходячи з того, що точка М лежить на прямій ВС і є точкою дотику цієї прямої з гіперболою. Отже, кутовий коефіцієнт прямої ВС збігається зі значеннями похідної функції Z=X_1X_2 у точці М.

Диференціюючи функцію Z=X_1X_2 як неявну, дістанемо дві умови, з яких знайдемо координати точки М (Рис. 3.1.)

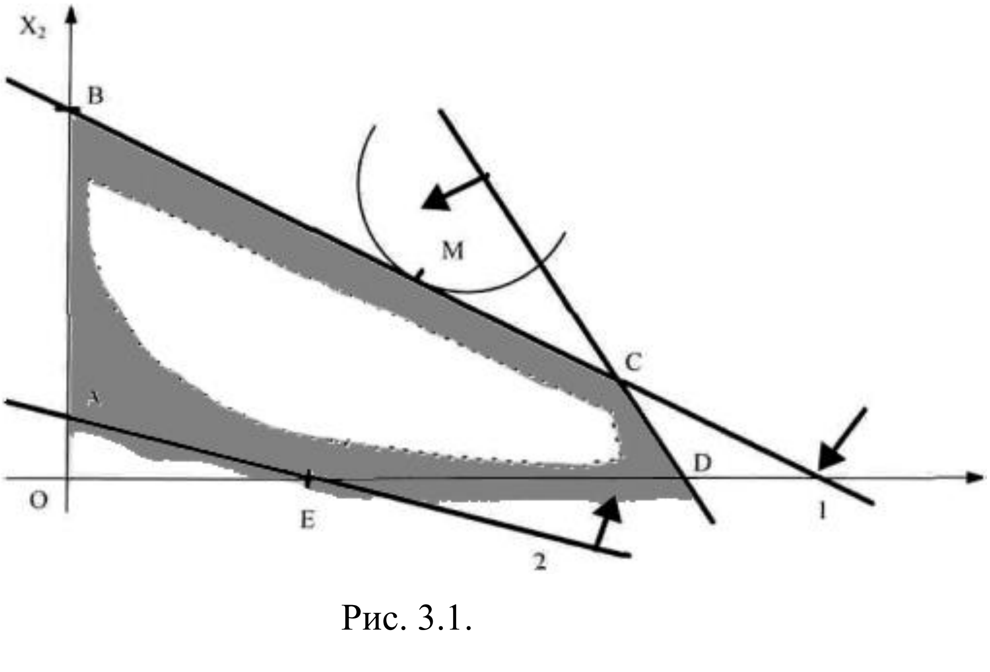

Рис. 3.1.

$$\begin{cases} X_{1m} + X_{2m} = 6 \\ \dfrac{X_{1m}}{X_{2m}} = 2 \end{cases}$$

$M(3,3);\ Z_{\max} = 9$

Завдання3.1.

розв'язати графічним методом (знайти найбільше і найменше значення функції) задачі нелінійного програмування.

3.1.

$Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2;$

$5x_1 + 9x_2 \le 45;$

$12x_1 + 5x_2 \le 60;$

$x_i \ge 0$

3.2.

$Z = -x_1 + (x_2 - 1)^2;$

$2x_1 + 2x_2 \ge 3;$

$x_1 \le 3;$

$x_i \ge 0$

3.3.

$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2;$

$12x_1 + 5x_2 \le 60;$

$12x_1 + 5x_2 \le 60;$

$x_i \le 0$

3.4.

$Z = (x_1 - 2)^2 + x_2;$

$3x_1 + 2x_2 \ge 6;$

$4x_1 + 5x_2 \le 10;$

$x_i \ge 0$

3.5.

$Z = x_1 - (x_2 - 2)^2;$

$x_1 + x_2 \le 4;$

$0 \le x_1 \le 3;$

$x_i \ge 0$

3.6.

$Z = 2x_1 + x_2;$

$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 6)^2 \le 4;$

$x_1 \ge 2;$

$x_2 \ge 5$

3.7.

$Z = (x_1 - 2)^2 + x_2;$

$4x_1 + 8x_2 \le 36;$

$10x_1 + 5x_2 \le 54;$

$x_i \ge 0$

3.8.

$Z = 3x_1 + x_2^2;$

$(x_1 - 3) + (x_2 - 6) \ge 4;$

$(x_1 - 3) + (x_2 - 6) \le 12;$

$x_1 \ge 2,\ \ x_2 \ge 5$

3.9.

$Z = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2;$

$3x_1 - x_2 \ge 1;$

$-x_1 + 3x_2 \le 13;$

$2x_1 - x_2 \le 9;$

$x_1 + 4x_2 \ge 9;$

$x_i \ge 0$

3.10.

$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2;$

$3x_1 - x_2 \ge 1;$

$-x_1 + 3x_2 \le 13;$

$2x_1 - x_2 \le 9;$

$x_1 + 4x_2 \ge 9;$

$x_i \ge 0$

3.11.

$Z = (x_1 - 3)\cdot(x_2 - 3);$
$x_1 + x_2 \le 2;$
$3x_1 + x_2 \le 14;$
$x_1 + 3x_2 \ge 10;$
$x_i \ge 0$

3.12.

$Z = (x_1 - 3)\cdot(x_2 - 5);$
$x_1 - 3x_2 \ge -2;$
$3x_1 + x_2 \le 14;$
$2x_1 + 3x_2 \ge 10;$
$x_i \ge 0$

3.13.

$Z = x_1 + (x_2 - 3)^2;$
$5x_1 + 8x_2 \le 40;$
$9x_1 + 4x_2 \le 54;$
$x_i \ge 0$

3.14.

$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2;$
$x_1 + x_2 \le 7;$
$0 \le x_1 \le 5;$
$0 \le x_2 \le 10;$

3.15.

$Z = (x_1 - 1)\cdot(x_2 - 2);$
$3x_1 + 2x_2 \le 12;$
$-2x_1 + x_2 \le 4;$
$x_1 - 3x_2 \le 0;$
$x_i \ge 0$

3.16.

$Z = x_1 - (x_2 - 1)^2;$
$3x_1 - x_2 \ge 6;$
$-x_1 + 3x_2 \le 5;$
$2x_1 + x_2 \ge 2;$
$x_i \ge 0$

3.17.

$Z = (x_1 - 1)^2 + x_2^2;$
$5x_1 - 2x_2 \le 7;$
$-x_1 + 2x_2 \le 5;$
$x_1 + x_2 \ge 1;$
$x_i \ge 0$

3.18.

$Z = 2\cdot(x_1 - 4)^2 + x_2^2;$
$x_1 + 3x_2 \le 12;$
$3x_1 - x_2 \ge 6;$
$x_i \ge 0$

3.2. Метод множників Лагранжа

Приклад.

Знайти точки умовного екстремуму функції

$$Z = x_1 + x_2 + 2x_1^2$$
$$3x_1 + 4x_2 = 12$$
$$-x_1 + 2x_2 = 6$$

Побудуємо функцію Лагранжа

$$F = -x_1 + x_2 + 2x_1^2 + \lambda_1(3x_1 + 4x_2 - 12) + \lambda_2(-x_1 + 2x_2 - 6)$$

і знайдемо її похідні за $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$.

Прирівнявши здобуті вирази до нуля, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial X_1} = -1 + 4X_1 + 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial X_2} = 1 + 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 3X_1 + 4X_2 - 12 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = X_1 + 2X_2 - 6 = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему методом Жордана-Гауса, дістанемо $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.

Завдання3.2.

Використовуючи метод множників Лагранжа, знайти точки умовного екстремуму функції Z.

3.19.

$Z = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2;$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8.$

3.20.

$Z = 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2;$
$2x_1 + 4x_2 = 8.$

3.21.

$Z = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2;$
$x_1 + 3x_2 = 6.$

3.22.

$Z = 3x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2;$
$2x_1 + 3x_2 = 5;$
$x_1 + 4x_2 = 7.$

3.23.

$Z = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3;$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 5;$
$-x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6.$

3.24.

$Z = 2x_1 - 3x_1^2 + 4x_2^2;$
$x_1 + 2x_2 = 4;$
$4x_1 + x_2 = 1.$

3.25.

$Z = 3x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2;$
$x_1 + 2x_2 = 8;$
$3x_1 + x_2 = 12.$

3.26.

$Z = x_1 - 2x_2^2 + 2x_3^2;$
$3x_1 + x_2 = 6;$
$5x_1 + 4x_2 = 7.$

3.27.

$Z = x_1 \cdot x_2 - x_2^2 + x_2;$
$3x_1 + 2x_2 = 12;$
$-4x_1 + 8x_2 = 16.$

3.28.

$Z = x_2 - x_1 + 2x_1^2;$
$3x_1 + 4x_2 = 12;$
$-x_1 + 2x_2 = 6.$

3.29.

$Z = 2x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 - x_2 \cdot x_3;$
$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1;$
$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4.$

3.30.

$Z = 3x_1 - 2x_1^2 + 2x_2^2;$
$5x_1 + 4x_2 = 4;$
$-x_1 + 6x_2 = 18.$

3.31.

$Z = 2x_1 + 5x_1 \cdot x_2 + x_2^2;$
$x_1 + 2x_2 = 4;$
$3x_1 + x_2 = 6.$

3.32.

$Z = 8x_1 + 2x_1^2 + 4x_1 \cdot x_2 + x_2^2;$
$6x_1 + 2x_2 = 6;$
$x_1 + 8x_2 = 16.$

3. 3. Квадратичне програмування

Приклад.

Розв'язати задачу квадратичного програмування, використавши метод множників

Лагранжа.

$$Z = -(x_1 - 1)^2 + 2x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 \le 4 \\ X_1 \le 3 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

Квадратична форма функції Z є від'ємно визначена, тобто вгнута. Оптимальний розв'язок цієї задачі можна знайти як опорний план задачі з обмеженнями

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 = 4 \\ X_1 + X_4 = 3 \end{cases}$$

$$X_j \ge 0, \quad j = \overline{1.4}$$

Склавши систему додаткових обмежень вигляду

$$\frac{\partial Z}{\partial X_j} - \sum_i \lambda_i \cdot a_{ij} + u_i = 0$$

за умови $x_j * u_j = 0$ (для *всіх j),* додаткові обмеження мають вигляд

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2 - \lambda_1 - \lambda_2 + u_1 &= 0; \\ 2 - 2\lambda_1 + u_2 &= 0; \\ -\lambda_1 + u_3 &= 0; \\ -\lambda_2 + u_4 &= 0; \end{aligned}$$

Виключимо з цієї системи λ_1 і λ_2.

Після простих перетворень дістанемо систему, опорний розв'язок якої слід знайти (табл.3.1).

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8;$
$x_1 + x_4 = 9;$
$2x_1 - u_1 + u_3 + u_4 = 2;$
$2x_1 - u_2 + 2u_3 = 2;$
$x_i \ge 0,\ u_i \ge 0;$
$x_i \cdot u_i = 0$

Таблиця 3.1.

x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	u_3	u_4	b_i
1	2	1	0	0	0	0	0	8
1	0	0	1	0	0	0	0	9
2	0	0	0	-1	0	1	1	2
2	0	0	0	0	-1	2	0	2
0	2	1	0	1/2	0	-1/2	-1/2	7
0	0	0	1	1/2	0	-1/2	-1/2	8
1	0	0	0	-1/2	0	1/2	1/2	1
0	0	0	0	0	-1	2	0	2
0	1	1/2	0	1/4	0	-1/4	-1/4	7/2
0	0	0	1	1/2	0	-1/2	-1/2	8
1	0	0	0	-1/2	0	1/2	1/2	1
0	0	0	0	0	-1	2	0	2
0	1	1/2	0	1/4	-1/8	0	-1/4	15/4
0	0	0	1	1/2	-1/4	0	-1/2	17/2
1	0	0	0	-1/2	1/4	0	1/2	1/2
0	0	0	0	0	-1/2	1	0	1

Розв'язання.

$x_1 = 1/2,\ x_2 = 15/4,\quad x_3 = 0,\quad x_4 = 17/2,\quad Z = 8\,(\max)$

Завдання3.3.

Розв'язати задачі квадратичного програмування.

3.33.

$Z = x_1 + 2x_2 - x_2^2 \to \max;$
$-2x_1 + x_2 \le 8;$
$3x_1 - x_2 \le 9;$
$x_i \ge 0.$

3.34.

$Z = x_1 - x_1^2 + 2x_2 - 1 \to \max;$
$-2x_1 + x_2 \le 10;$
$3x_1 - x_2 \le 9;$
$x_i \ge 0.$

3.35.

$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min;$
$2x_1 - 5x_2 \le 10;$
$0 \le x_1 \le 4;$
$0 \le x_2 \le 3.$

3.36.

$Z = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min;$
$-2x_1 - 5x_2 \le 10;$
$0 \le x_1 \le 4;$
$0 \le x_2 \le 3.$

3.37.

3.38.

$Z = (x_1 - 2)^2 + x_2 \to \min;$
$- x_1 + 2x_2 \le 6;$
$2x_1 + 3x_2 \le 12;$
$x_i \ge 0.$

$Z = -(x_1 - 2)^2 + x_2 \to \max;$
$- 3x_1 + 4x_2 \le 12;$
$2x_1 + x_2 \le 8;$
$x_i \ge 0.$

3.39.
$Z = -x_1^2 + 5x_1 + x_2 \to \max;$
$- x_1 + 2x_2 \le 8;$
$2x_1 + x_2 \le 12;$
$x_i \ge 0.$

3.40.
$Z = x_1^2 - 4x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 \to \min;$
$3x_1 + 2x_2 \le 12;$
$2x_1 + x_2 \le 12;$
$x_i \ge 0.$

3.41.
$Z = (x_1 - 3)^2 + 4(x_2 - 4)^2 \to \min;$
$- 3x_1 + 2x_2 \le 12;$
$2x_1 + x_2 \le 6;$
$x_i \ge 0.$

3.42.
$Z = x_1 + (x_2 - 4)^2 \to \max;$
$- 3x_1 + 4x_2 \le 12;$
$2x_1 + x_2 \le 18;$
$x_i \ge 0.$

3.43.
$Z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \min;$
$- 2x_1 + x_2 \le 2;$
$x_1 + 3x_2 \le 9;$
$x_i \ge 0.$

3.44.
$Z = (x_1 - 3)^2 + x_2 \to \max;$
$- 2x_1 + 4x_2 \le 8;$
$2x_1 + 3x_2 \le 12;$
$x_i \ge 0.$

3.45.
$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min;$
$x_1 + x_2 \ge 2;$
$0 \le x_1 \le 4;$
$0 \le x_2 \le 2.$

3.46.
$Z = (x_1 - 2)^2 + x_2 \to \min;$
$x_1 + x_2 \ge 4;$
$0 \le x_1 \le 4;$
$0 \le x_2 \le 3.$

3.47.
$Z = -(x_1 - 1)^2 + x_2 \to \max;$
$x_1 + 2x_2 \le 4;$
$2x_1 + x_2 \le 12;$
$x_i \ge 0.$

3.48.
$Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^1 \to \min;$
$x_1 + x_2 \ge 4;$
$0 \le x_1 \le 3;$
$0 \le x_2 \le 3.$

3.49.
$Z = (x_1 - 4)^2 + x_2 \to \max;$
$x_1 + 2x_2 \le 4;$
$2x_1 + x_2 \le 12;$
$x_i \ge 0.$

3.50.
$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^1 \to \min;$
$x_1 + x_2 \ge 4;$
$0 \le x_1 \le 3;$
$0 \le x_2 \le 3.$

3.51.

$$Z = x_1 - (x_2 - 4)^2 \to \max;$$
$$x_1 + 2x_2 \le 4;$$
$$2x_1 + x_2 \le 12;$$
$$x_i \ge 0.$$

3.52.

$$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min;$$
$$-3x_1 + 2x_2 \le 12;$$
$$2x_1 + x_2 \le 12;$$
$$x_i \ge 0.$$

4. Динамічне програмування

Приклад.

Для збільшення випуску продукції трьох підприємств галузі виділено x_i = .700 тис. гри.

Використання кожним підприємством x_i тис. грн. зазначених коштів забезпечує приріст виробництва продукції $f_i\ (x_i)$ (табл. 4.1.)

Таблиця 4.1.

x_i тис.грн		$f_i\ (x_i)$	
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Для розв'язання задачі треба скласти рекурентні співвідношення Беллмана. У цьому разі ці співвідношення зводять до таких функціональних рівнянь:

$$\varphi_1(x) = \max_{0 \le x_1 \le x} \{f_1(x_1)\}$$

$$\varphi_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le x} \{f_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)\}$$

$$* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *$$

$$\varphi_{n-1}(x) = \max_{0 \le x_{n-1} \le x} \{f_{n-1}(x_{n-1}) + \varphi_{n-2}(x - x_{n-1})\}$$

Функції $\varphi_i(x), i = \overline{1, n-1}$ визначають максимальний приріст виробництва продукції при

відповідному розподілі х тис. грн., коштів між підприємствами.

Використовуючи вихідні дані і рекурентні співвідношення, визначимо спочатку умовно-оптимальний, а потім оптимальний розподіл.

Спочатку визначимо умовно-оптимальні кошти х виділені першому підприємству. Для цього знайдемо значення для кожного х:

$$\varphi_1(0) = 0 \quad x_1 = 0;$$

$$\varphi_1(100) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \end{Bmatrix} = 30 \quad x_1 = 100 \qquad \varphi_1(200) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \end{Bmatrix} = 50 \quad x_1 = 200$$

$$\varphi_1(300) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \end{Bmatrix} = 90 \quad x_1 = 300 \qquad \varphi_1(400) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \end{Bmatrix} = 110 \quad x_1 = 400$$

$$\varphi_1(500) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \end{Bmatrix} = 170 \quad x_1 = 500 \qquad \varphi_1(600) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ 180 \end{Bmatrix} = 180 \quad x_1 = 600$$

$$\varphi_1(700) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ 180 \\ 210 \end{Bmatrix} = 210 \quad x_1 = 700$$

Результати запишемо в табл. 4.2.

Таблиц

я 4.2.

x тис.грн.	$\varphi_i(x)$ тис. грн.	x_i тис.грн.
0	0	0
100	30	100
200	50	200
300	90	300
400	100	400
500	170	500
600	180	600
700	210	700

Використовуючи дані табл. 4.1. і 4.2., визначаємо умовно-оптимальну кількість коштів, виділених другому підприємству:

$$\varphi_2(0) = 0 \quad x_2 = 0;$$

$$\varphi_2(100) = \max\begin{Bmatrix} 0+30 \\ 50+0 \end{Bmatrix} = 50 \quad x_2 = 100$$

$$\varphi_2(200) = \max\begin{Bmatrix} 0+50 \\ 50+30 \\ 80+0 \end{Bmatrix} = 80 \quad x_2 = 200$$

$$\varphi_2(300) = \max\begin{Bmatrix} 0+90 \\ 50+50 \\ 80+30 \\ 90+0 \end{Bmatrix} = 110 \quad x_2 = 300$$

$$\varphi_2(400) = \max\begin{Bmatrix} 0+110 \\ 50+90 \\ 80+50 \\ 90+30 \\ 150+0 \end{Bmatrix} = 150 \quad x_2 = 400$$

$$\varphi_2(500) = \max\begin{Bmatrix} 0+170 \\ 50+110 \\ 80+90 \\ 90+50 \\ 150+30 \\ 190+0 \end{Bmatrix} = 190 \quad x_2 = 500$$

$$\varphi_2(600) = \max\begin{Bmatrix} 0+180 \\ 50+170 \\ 80+110 \\ 90+90 \\ 150+50 \\ 190+30 \\ 210+0 \end{Bmatrix} = 220 \quad x_2 = 600 \qquad \varphi_2(700) = \max\begin{Bmatrix} 0+210 \\ 50+180 \\ 80+170 \\ 90+110 \\ 150+90 \\ 190+50 \\ 210+30 \\ 220+0 \end{Bmatrix} = 250 \quad x_2 = 700$$

Результати розрахунків записуємо в табл. 4.3.

Табли

ця 4.3.

x тис.грн.	φ₂(x) тис.грн.	x_2 тис. грн.
0	0	0
100	50	100
200	80	100
300	110	200
400	150	400
500	190	500
600	220	100
700	250	200

Використовуючи дані табл. 4.1.-4.3, знаходимо

$$\varphi_3(x) = \max\{f_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3)\},$$
$$0 \le x_3 \le x.$$

Оскільки в цьому разі підприємств три, то робимо розрахунок лише для одного значення x =700:

$$\varphi_3(700) = \max\begin{Bmatrix} 0+250 \\ 40+220 \\ 50+190 \\ 110+150 \\ 120+110 \\ 180+80 \\ 220+50 \\ 240+0 \end{Bmatrix} = 270 \quad x_3 = 700$$

Отже, максимальний приріст виробництва продукції дорівнює 270 тис. грн. Це буває тоді, коли третьому підприємству виділяється 600 тис. грн., а першому й другому - 100 тис.грн.

Розв'язати задачі динамічного програмування.

А) Для збільшення виробництва продукції підприємствам виділені капіталовкладення 8
тис. грн. (завдання 5.1.- 5.4.). Використання і-м підприємством x_1 тис. грн. забезпечує
приріст виробництва продукції $f_1(x_1)$.

Визначити розподіл капіталовкладень між підприємствами, який би забезпечив
максимальне збільшення виробництва продукції.

Завдання 4.1.

x_1, тис.грн.	$f_1(x_1)$ залежно від капіталовкладень, тис. грн. по підприємствах			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

Завдання 4.2.

x_1, тис.грн.	$f_1(x_1)$ залежно від капіталовкладень, тис. грн. по підприємствах		
	1	2	3
0	0	0	0
50	20	40	30
100	50	60	40
150	90	100	80
200	110	120	100

Завдання 4.3.

x_1, тис.грн.	$f_1(x_1)$ залежно від капіталовкладень, тис. грн. по підприємствах		
	1	2	3
0	0	0	0
10	8	5	3
20	12	7	5
30	14	10	10
40	16	17	14
50	19	21	24

Завдання 4.4.

x_1, тис.грн.	$f_1(x_1)$ залежно від капіталовкладень, тис. грн. по підприємствах			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
20	8	7	6	12
40	11	9	10	14
60	14	13	12	17
80	20	16	19	22
100	26	18	25	24

Б) Для видів робіт направляються x_i осіб. Попередня оцінка ефекту виконання робіт визначається лінійною функцією $f_1(x_1)$ (задания 5.5.-5.7.). Скільки робітників доцільно направити на виконання кожної роботи, щоб дістати максимальний ефект?

Завдання 4.5.

x_1, тис.грн.	$f_1(x_1)$ для підприємства		
	1	2	3
0	0	0	0
1	50	30	200
2	100	60	350
3	150	120	450
4	250	180	550
5	350	300	600
6	500	550	650

Завдання 4.6.

x_1, тис.грн.	$f_1(x_1)$ для підприємства			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	30	20	40	10
2	60	40	60	30
3	90	80	80	60
4	120	80	140	100
5	150	80	200	140

Завдання 4.7.

x_1, тис.грн.	$f_1(x_1)$ для підприємства			
	1	2	3	4

0	0	0	0	0
1	100	70	100	80
2	200	140	200	100
3	250	210	300	120
4	300	250	350	200
5	320	300	400	280

Список рекомендованої літератури

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа. – 1986. – 320с.
2. Таха Т. Введение в исследование операций. В двух книгах. – М.: Мир – 1985. – 479 с.
3. Банди Б. Основы линейного программирования. – М.: Радио и связь – 1989. – 176 с.
4. Остапенко Ю. О. Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу “ Оптимізація технологічних процесів “// Ладієва Л. Р., Жученко А. І. – К .: КПІ – 1992. – 108с.
5. Ладієва Л. Р. Оптимізація технологічних процесів. Навч.посіб. – К .: ІВЦ «Політехніка» – 2004. – 192с.