МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

КОМП’ЮТЕРНІ МЕТОДИ ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЗАЦІЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання контрольних і практичних робіт

для студентів спеціальності
„Автоматизоване управління технологічними процесами”

Рекомендовано Вченою радою інженерно-хімічного факультету

Київ 2012

Компьютерні методи проектування систем автоматизації: Методичні вказівки до виконання контрольних і практичних робіт для студентів спеціальності ”Автоматизоване управління технологічними процесами”. / Уклад.: М. З. Кваско, Я. Ю. Жураковський. К.: НТУУ «КПІ», 2012 – 36 с.

Гриф надано Вченою радою ІХФ
(Протокол № 9 від 29.10.2012 р.)

Навчальне видання

КОМП’ЮТЕРНІ МЕТОДИ ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЗАЦІЇ

Методичні вказівки до виконання контрольних і практичних робіт для студентів напряму підготовки „Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології”

Укладачі: Кваско Михайло Зиновійович, к.т.н., проф.
Жураковський Ярослав Юрійович, ст.викл.

Відповідальний редактор Жученко А.І., д.т.н., проф.

Рецензент: Ладієва Л.Р., к.т.н.

Авторська редакція

З М І С Т

Методичні вказівки містять основні теоретичні положення, приклади розв’язання типових задач та необхідні рекомендації до виконання контрольних та практичних робіт з курсу “Компьютерні методи проектування систем автоматизації”.

Термінологія, основні запитання та завдання відповідають матеріалу, викладеному в літературних джерелах, список яких подано в кінці методичних вказівок.

1 ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

1.1 Методичні вказівки до виконання контрольних завдань

Розрахунок імпульсних та цифрових систем керування базується на застосуванні z-перетворення, що здійснюється підстановкою

$$z = e^{pT}, \tag{1.1}$$

де p – оператор Лапласа, T – період дискретизації.

Z-перетворенням гратчастої функції $f(nT)$ називається функція комплексного аргументу z, яка згідно з визначенням z-перетворення має вигляд:

$$F(z) = Z\left[f(nT)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}\ . \tag{1.2}$$

Якщо нескінченний ряд в правій частині виразу сходиться, функцію $f\,(nT)$ називають *оригіналом*, а $F(z)$ – *зображенням функції* $f\,(nT)$. z – перетворення є аналогом перетворення Лапласа безперервної функції $f\,(t)$ при $z=e^{pT}$.

Деякі властивості z–перетворення [2,3,4,5,6]:

І. Алгебраїчне додавання

$$Z\,[\,f_1(t) \pm f_2(t)\,] = F_1(z) \pm F_2(z) \tag{1.3}$$

ІІ. Множення на константу

$$Z\,[af\,(t)\,] = aZ\,[\,f\,(t)\,] = aF(z), \tag{1.4}$$

де a - константа.

ІІІ. Зсув в часовій області

$$Z\,[\,f\,(t\text{-}nT)\,] = z^{-n}F(z), \tag{1.5}$$

$$Z\big[f\,(t+nT)\big] = z^n\left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f\,(kT)z^{-k}\right],$$

де n – додатне число.

IV. Зсув в області зображень (множення оригіналу на експоненту)

$$Z\left[e^{\mp at} f\,(t)\right] = F\,(ze^{\pm aT}), \tag{1.6}$$

де a - константа.

Для спрощення процедури знаходження z-перетворення були складені таблиці z-перетворень простих функцій (див. табл. 1.1). Отже, для пошуку z-перетворення будь-якої функції її необхідно звести до табличного вигляду. Оскільки зображення сигналу або передаточну функцію можна подати у вигляді дробово-раціональної функції, для зведення функції до табличного вигляду можна застосувати розкладання на прості дроби.

Таблиця 1.1 – Безперервні та дискретні перетворення Лапласа

№ з/п	Оригінал $f(t)$ безперервної функції	Зображення за Лапласом $F(p)$	Дискретна функція $f(nT)$	Дискретне зображення за Лапласом $F(z)$ при $t = nT$
1	$\delta(t)$	1	$\delta(nT)$	1
2	$\delta(t\text{-}kT)$	e^{-kTp}	$\delta(nT\text{-}kT)$	z^{-k}
3	$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$1(nT)$	$\frac{z}{z-1}$
4	t	$\frac{1}{p^2}$	nT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{nT^2}{2}$	$\frac{T}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
6	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha nT}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
7	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$e^{\alpha nT}$	$\frac{z}{z-e^{\alpha T}}$
8	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$1 - e^{-\alpha nT}$	$\frac{(1-e^{-\alpha T})z}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$

Зворотне z-перетворення.

Для z-перетворення зворотне z-перетворення $Z^{-1}[\ F(z)\ ]$ не є однозначним, тобто z-перетворення $f(t)$ визначається функцією $F(z)$, а зворотне z-перетворення не обов'язково дорівнює $f(t)$. Коректним результатом зворотного z-перетворення функції $F(z)$ буде $f(nT)$, що дорівнює $f(t)$ тільки в моменти квантування $t = nT$.

Розглянемо два метода отримання зворотного z-перетворення, які є еквівалентними [4,7].

Метод розкладання на прості дроби.

Відомо, що при розкладанні на прості дроби ми отримуємо вирази вигляду $A/(z + a)$, які відсутні у таблиці z-перетворень. Але в таблиці присутній вираз $Az/(z - e^{-aT})$, зворотне z-перетворення якого дорівнює Ae^{-anT}. Виходячи з цього зручніше буде розкладати на прості дроби функцію $F(z)/z$, після чого обидві частини виразу для $F(z)/z$ помножити на z щоб отримати $F(z)$.

Для функції, що не містить нулів ($z = 0$), відповідна послідовність імпульсів має зсув у часі. Розкладання функції $F(z)$ на прості дроби представляють у звичному вигляді:

$$F(z) = \frac{A}{z+a} + \frac{B}{z+b} + \ldots$$

після чого знаходимо

$$F_1(z) = zF(z) = \frac{Az}{z+a} + \frac{Bz}{z+b} + \ldots \qquad (1.7)$$

Якщо знайдене зворотне z-перетворення функції $F_1(z)$, $f_1(nT)$, то зворотне z-перетворення функції $F(z)$ визначається так:

$$f(nT) = Z^{-1}[\,F(z)\,] = Z^{-1}[\,z^{-1}F_1(z)] = f_1[(n-1)T\,]. \qquad (1.8)$$

Метод розкладання у степенний ряд.

Зворотне z-перетворення функції $F(z)$ може бути визначене розкладанням її у безкінечний ряд за степенями z^{-1}. Тобто

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = f(0) + f(T)\,z^{-1} + f(2T)\,z^{-2} + \ldots + f(nT)\,z^{-n} + \ldots, \qquad (1.9)$$

де $B(z)$, $A(z)$ – поліноми від z.

Тоді, порівнюючи (1.9) з (1.2) можна зробити висновок, що коефіцієнти ряду (1.9) є значеннями $f(t)$ у моменти квантування. Такий безкінечний ряд можна отримати послідовним діленням полінома чисельника $B(z)$ на поліном знаменника $A(z)$ функції $F(z)$.

1.2 Приклади розв’язання задач

Приклад 1.2.1 Знайти z-перетворення функції, якщо її зображення за Лапласом

$$F(p) = \frac{k_1 e^{-p\tau}}{p^2(T_1 p + 1)}, \quad \text{де } k_1 = 5;\ T = 0{,}3;\ T_1 = 0{,}5;\ \tau = 0{,}3.$$

Розв’язання.

Згідно (1.5):

$$F(z)=Z\left[\frac{k_1}{p^2(T_1p+1)}\right]z^{-k},\quad \text{де } k=\tau/T=0{,}3/0{,}3=1.$$

Розкладемо вираз у фігурних дужках на прості дроби:

$$\frac{k_1}{p^2(T_1p+1)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p}+\frac{C}{T_1p+1}.$$

Домножимо обидві частини виразу на $p^2(T_1p+1)$ та отримаємо:

$$k_1 = A(T_1p+1)+Bp(T_1p+1)+Cp^2.$$

Порівнявши коефіцієнти при однакових степенях p в лівій та правій частинах рівняння, дістанемо невідомі коефіцієнти A, B, C:

$$\left\{\begin{array}{ll} p^0: & k_1=A;\\ p^1: & 0=AT_1+B;\\ p^2: & 0=BT_1+C;\end{array}\right. \quad\Bigg|\quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=k_1;\\ B=-k_1T_1;\\ C=k_1T_1^2.\end{array}\right.$$

Отже:

$$\frac{k_1}{p^2(T_1p+1)}=k_1\left(\frac{1}{p^2}-\frac{T_1}{p}+\frac{T_1^2}{T_1p+1}\right)=k_1\left(\frac{1}{p^2}-\frac{T_1}{p}+\frac{T_1}{p+1/T_1}\right).$$

Після застосування z–перетворення до кожного доданку окремо, згідно табл. 1.1 матимемо:

$$F(z)=k_1\left(\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{T_1 z}{z-1}+\frac{T_1 z}{z-d}\right)z^{-k}=k_1 z\,\frac{(T+T_1(d-1))z-Td+T_1(1-d)}{(z-1)^2(z-d)}\,z^{-k},$$

де $d = e^{-T/T_1}$.

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$F(z)=\frac{0{,}377z+0{,}297}{(z-1)^2(z-0{,}551)}.$$

Приклад 1.2.2 Знайти *z*-перетворення функції, якщо її зображення за Лапласом

$$F(p)=\frac{1-e^{-pT}}{p}\frac{k_1}{(T_1 p+1)},\quad \text{де } k_1 = 5;\ T = 0{,}4;\ T_1 = 0{,}2.$$

Розв’язання.

Позначимо $W_1(p)=\dfrac{k_1}{T_1 p+1}$. Тоді:

$$F(z)=Z\left[\frac{1-e^{-pT}}{p}W_1(p)\right]=Z\left[\frac{W_1(p)}{p}-e^{-pT}\frac{W_1(p)}{p}\right]=$$

$$=Z\left[\frac{W_1(p)}{p}\right]-Z\left[e^{-pT}\frac{W_1(p)}{p}\right]=Z\left[\frac{W_1(p)}{p}\right]-z^{-1}Z\left[\frac{W_1(p)}{p}\right].$$

Були використані властивості *z*–перетворень (1.3) та (1.5).

Таким чином:

$$F(z)=\frac{z-1}{z}Z\left[\frac{W_1(p)}{p}\right]=\frac{z-1}{z}Z\left[\frac{k_1}{p(T_1p+1)}\right]=$$

$$=k_1\frac{z-1}{z}Z\left[\frac{1/T_1}{p(p+1/T_1)}\right]=k_1\frac{z-1}{z}\frac{\left(1-e^{-T/T_1}\right)z}{(z-1)\left(z-e^{-T/T_1}\right)},$$

або після спрощення та підстановки числових даних:

$$F(z)=k_1\frac{1-e^{-T/T_1}}{z-e^{-T/T_1}}=\frac{5\left(1-e^{-2}\right)}{z-e^{-2}}.$$

Приклад 1.2.3 Знайти зворотне z-перетворення функції

$$F(z)=\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})},$$

якщо a - додатне число, T – період квантування.

Розв'язання.

Спосіб 1. Розкладемо на прості дроби функцію $F(z)/z$:

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{A}{z-1}-\frac{B}{z-e^{-aT}},\qquad \text{де } A=1,\ B=1.$$

Домножимо обидві частини виразу на z:

$$F(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}.$$

За таблицею z-перетворень (табл. 1.1) знайдемо оригінал:

$$f(nT) = 1(nT) - e^{-anT} = 1 - e^{-anT}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Спосіб 2. Розділимо поліном чисельника на поліном знаменника функції $F(z)$:

$$F(z) = \frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})} = \frac{(1-e^{-aT})z}{z^2-(1+e^{-aT})z+e^{-aT}}.$$

Виконаємо ділення в стовпчик:

$$\begin{array}{rl|l}
- & (1 - e^{-aT})z & z^2 - (1 + e^{-aT})z + e^{-aT} \\
\cline{3-3}
 & (1 - e^{-aT})z - (1 - e^{-2aT}) + e^{-aT}(1 - e^{-aT})z^{-1} & (1 - e^{-aT})z^{-1} + (1 - e^{-2aT})z^{-2} + \ldots \\
\cline{2-2}
- & (1 - e^{-2aT}) - e^{-aT}(1 - e^{-aT})z^{-1} & \\
 & (1 - e^{-2aT}) - (1 + e^{-aT})(1 - e^{-2aT})z^{-1} + e^{-aT}(1 - e^{-aT})z^{-2} & \\
\cline{2-2}
 & (1 - e^{-3aT})z^{-1} - e^{-aT}(1 - e^{-aT})z^{-2} &
\end{array}$$

Отже:

$$F(z) = (1 - e^{-aT})z^{-1} + (1 - e^{-2aT})z^{-2} + \ldots$$

Легко бачити, що $f(nT) = 1 - e^{-anT}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Приклад 1.2.4 Знайти зворотне z-перетворення функції

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 1{,}5z + 0{,}5}.$$

Розв’язання.

Знайдемо корені рівняння

$$z^2 - 1{,}5\,z + 0{,}5 = 0.$$

Значення коренів $z_1 = 1$, $z_2 = 0{,}5$.

Розкладемо на прості дроби функцію $F(z)/z$:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{2}{z-1} - \frac{2}{z-0{,}5}.$$

Домножимо обидві частини виразу на z. Дістанемо:

$$F(z) = 2\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0{,}5}\right).$$

Перший доданок у дужках має оригінал $1(nT)$, другий доданок можна подати у вигляді $z\,/\,(z - e^{-aT})$, якому згідно з табл. 1.1 відповідає оригінал e^{-anT}, де $a = ln0{,}5$. Отже, шуканий оригінал має вигляд:

$$f(nT) = 2[\,1(nT) - e^{-anT}] = 2[1 - e^{-n\ln 0{,}5}] = 2[1 - 0{,}5^n\,],$$

де $n = 0, 1, 2, \ldots$

1.3 Контрольні завдання

Завдання 1 Знайти z-перетворення функції $F(z)$ за її зображенням за Лапласом $F(p)$:

а) $$F(p) = \frac{k_1(T_1 p + 1)e^{-p\tau}}{p(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)};$$

б) $$F(p) = \frac{k_1(T_1 p + 1)e^{-p\tau}}{p^2(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)};$$

в) $$F(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}\,\frac{k_1(T_1 p + 1)e^{-p\tau}}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}.$$

Таблиця 1.2 – Вихідні дані до завдання 1

Варіант	Формула	k_1	T_1	T_2	T_3	T	τ
1	*а)*	10	0	1	0,5	1	0
2		5	0	2	0,5	1	0
3		10	0	0,5	0,5	2	4
4		6	0,2	0,4	1	0,5	0
5		4	0,6	1	0,7	0,5	1,5
6		0,8	1	0,4	1,2	1,5	0
7		1	0	2	0,4	0,5	1
8		12	0,5	0	1	2	2
9		7	1,4	0,6	0,9	0,8	1,6
10	*б)*	10	0	1	0,5	1	0
11		5	0	2	0,5	1	0
12		10	0	0,5	0,5	2	4
13		6	0,2	0,4	1	0,5	0
14		4	0,6	1	0,7	0,5	1,5
15		0,8	1	0,4	1,2	1,5	0
16		1	0	2	0,4	0,5	1
17		12	0,5	0	1	2	2
18		7	1,4	0,6	0,9	0,8	1,6
19	*в)*	14	0	0,5	0,5	2	4
20		6	0,2	0,4	1	0,5	0
21		4	0,6	1	0,7	0,5	1,5
22		0,8	1	0,4	1,2	1,5	0
23		1	0	2	0,4	0,5	1
24		12	0,5	0	1	2	2
25		7	1,4	0,6	0,9	0,8	1,6

Завдання 2 Знайти зворотне *z*-перетворення функції

а) $F(z) = \dfrac{k_1 z}{(z-a)(z-b)}$;

б) $F(z) = \dfrac{k_1 z}{(z-a)(z-b)(z-c)}$;

в) $F(z) = \dfrac{z}{z-1}\dfrac{k_1 z}{(z-a)(z-b)}$;

г) $F(z) = \dfrac{z}{z-1}\dfrac{k_1 z}{(z-a)(z-b)(z-c)}$.

Таблиця 1.3 – Вихідні дані до завдання 2

Варіант	Формула	k_1	a	b	c
1	*а)*	10	6,14	1,22	-
2		5	0,74	2,16	-
3		10	4	0,56	-
4		6	0,27	2,49	-
5		4	0,65	1,17	-
6		0,8	1,54	0,47	-
7	*б)*	15	0	2,36	0,4
8		12	0,58	0	1
9		7	1,4	0,6	0,9
10		18	0,32	0,18	0,5
11	*б)*	25	0,66	0,25	1,2
12		10	0,21	0,59	2,5
13		16	0,2	0,74	1
14	*в)*	4	0,6	1	-
15		1,8	1	0,4	-
16		1	0,96	2	-
17		12	0,5	0,37	-
18		7,5	1,4	0,6	-
19		14	0,89	0,5	-
20	*г)*	6	0,26	0,4	1
21		4,5	0,88	0,61	0,7
22		8	1	0,43	1,2
23		19	0,24	2,68	0,4
24		25	0,59	0	1
25		7	1,47	0,64	0,9

2 ПЕРЕДАТОЧНІ ФУНКЦІЇ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

2.1 Методичні вказівки до виконання контрольних завдань

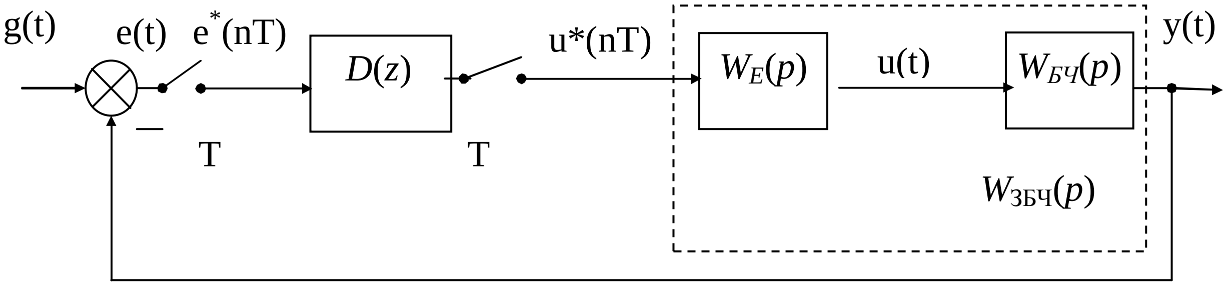


Рис. 2.1

На рис. 2.1 зображено цифрову систему автоматичного керування [6,10], що складається з ідеального імпульсного елемента (квантувача), зображеного у вигляді ключа, що замикається з періодом Т; цифрового регулятора з дискретною передаточною функцією $D(z)$; формуючого фільтра (екстраполятора нульового порядку) з передаточною функцією $W_{\text{Е}}(p) = (1 - e^{-pT})/p$; безперервної частини системи, передаточна функція якої $W_{\text{БЧ}}(p)$. Передаточні функції екстраполятора та безперервної частини об’єднують у передаточну функцію зведеної безперервної частини $W_{\text{ЗБЧ}}(p)$. $g(t)$ – сигнал завдання у безперервній формі; $e(t)=g(t) - y(t)$ сигнал розузгодження у аналоговій та $e(nT)$ – у дискретній формі; $u^*(nT)$, $u(t)$ – сигнал керуючого впливу відповідно у дискретній та аналоговій формі.

За аналогією з лінійними безперервними системами дискретною передаточною функцією $W(z)$ називається відношення z–перетворення вихідної величини $y[nT]$ до z–перетворення вхідної величини $x[nT]$ за нульових початкових умов [4,10].

$$W(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} \tag{2.1}$$

Дискретна передаточна функція може розглядатися також як z-перетворення функції ваги $w(nT)$ зведеної безперервної частини системи, тобто

$$W_{ЗБЧ}(z)=Z\,[w(nT)]. \tag{2.2}$$

Оскільки за означенням зображення за Лапласом функції ваги зведеної безперервної частини системи дорівнює її передаточній функції, тобто

$$L[w(t)]=W_{\text{ЗБЧ}}(p),$$

то можна записати, що:

$$W_{ЗБЧ}(z)=Z\,[W_{ЗБЧ}(p)]. \tag{2.3}$$

Це співвідношення дозволяє знаходити z-перетворення функції $f(t)$ на основі її зображення за Лапласом, використовуючи таблицю z-перетворень.

Передаточна функція зведеної безперервної частини системи дорівнює добуткам передаточних функцій екстраполятора та безперервної частини системи:

$$W_{ЗБЧ}(p)=W_E(p)W_{БЧ}(p)=\frac{1-e^{-pT}}{p}W_{БЧ}(p).$$

Дискретна передаточна функція зведеної безперервної частини $W_{ЗБЧ}(z)$ (див. приклад 1.2.2):

$$W_{ЗБЧ}(z) = \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{W_{БЧ}(p)}{p}\right]. \tag{2.4}$$

Дискретна передаточна функція розімкненої системи має вигляд:

$$W_P(z)=Y(z)/E(z)=D(z)\ W_{ЗБЧ}(z). \tag{2.5}$$

Дискретна передаточна функція замкненої системи для каналу «завдання-вихід»:

$$W_З(z) = \frac{W_P(z)}{1+W_P(z)} = \frac{D(z)W_{ЗБЧ}(z)}{1+D(z)W_{ЗБЧ}(z)}. \tag{2.6}$$

Отже, для визначення дискретної передаточної функції розімкненої $W_P(z)$ та замкненої системи $W_З(z)$ треба:

- знайти передаточну функцію безперервної частини $W_{БЧ}(p)$;
- за формулою (2.4) знайти дискретну передаточну функцію зведеної безперервної частини системи $W_{ЗБЧ}(z)$;
- за формулою (2.5) знайти дискретну передаточну функцію розімкненої системи $W_P(z)$;
- за формулою (2.6) знайти дискретну передаточну функцію системи замкненої системи $W_З(z)$.

Передаточна функція замкненої системи для каналу «завдання-розузгодження» визначається як:

$$W_{\varepsilon}(z) = \frac{E(z)}{G(z)} = \frac{1}{1+W_p(z)}. \tag{2.7}$$

Передаточна функція замкненої системи за збуренням це відношення z-перетворень вихідної змінної $Y(z)$ до збурення $F(z)$:

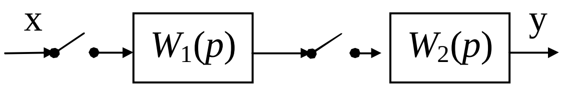
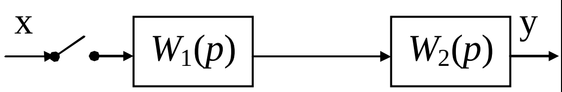
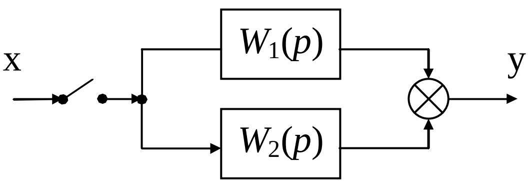
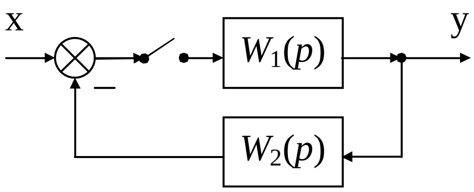
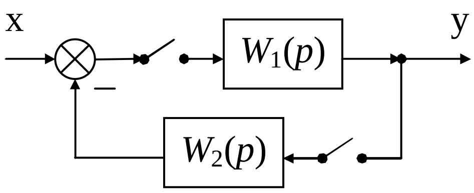
$$W_f(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{\Phi_f(z)}{1+W_p(z)}, \tag{2.8}$$

де Φ_f (z) – передаточна функція об’єкту за каналом «точка прикладання збурення – вихід», тобто Φ_f (z) – передаточна функція з’єднання ланок, що знаходяться між точкою прикладання збурення та виходом системи [4,6,7,10].

При визначенні дискретних передаточних функцій можна користуватися табл. 2.1, в якій наведені основні схеми з’єднань та еквівалентні вирази для їх дискретних передаточних функцій.

Для послідовно з’єднаних ланок, між якими немає квантувача, їх дискретна передаточна функція є z–перетворенням добутку їх передаточних функцій. Для послідовно з’єднаних ланок, між якими є квантувач, їх дискретна передаточна функція дорівнює добутку z-перетворень їхніх передаточних функцій.

Таблиця 2.1–Дискретні передаточні функції основних схем з’єднань

Схема з’єднань	Передаточна функція
	$W_{XY}(z)=W_1(z)\ W_2(z)$
	$W_{XY}\,(z)=Z\,[W_1(z)W_2(z)]=\ W_{12}(z)$
	$W_{XY}\,(z)=Z\,[W_1(z)+W_2(z)]=$ $=\ W_1(z)+W_2(z)$
	$W_{XY}(z)=\dfrac{W_1(z)}{1+W_{12}(z)}$
	$W_{XY}(z)=\dfrac{W_1(z)}{1+W_1(z)\cdot W_2(z)}$

2.2 Приклади розв’язання задач

Приклад 2.2.1 Знайти дискретні передаточні функції розімкненої та замкненої системи, структура якої наведена на рис. 2.1:

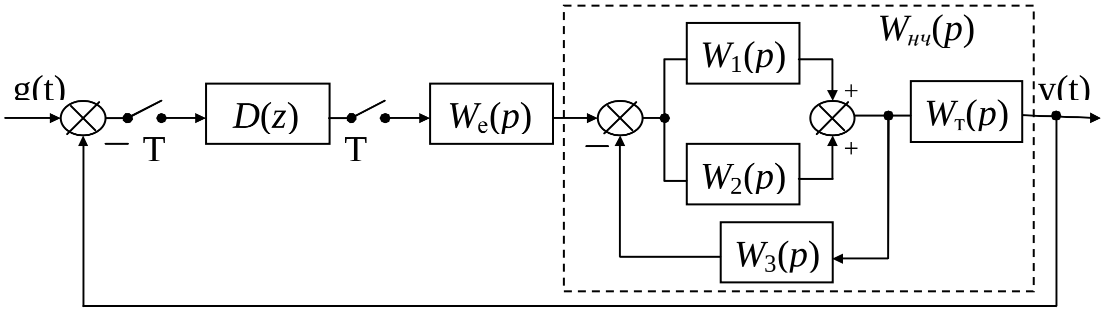


Рис. 2.1

$$W_1(p)=\frac{k_1}{T_1p+1};\quad W_2(p)=\frac{k_2}{T_2p+1};\quad W_E(p)=\frac{1-e^{-pT}}{p};$$

$W_3(p) = k_3$; $\quad W_T(p) = e^{-p\tau}$; $\quad D(z) = 1$,

де $k_1 = 5$; $k_2 = 2$; $k_3 = 0{,}2$; $T_1 = 0{,}5$; $T_2 = 0{,}5$; $T = 0{,}3$; $\tau = 0{,}3$.

Розв’язання.

Передаточна функція безперервної частини з урахуванням послідовних, паралельних з’єднань та зворотного зв’язку матиме вигляд:

$$W_{БЧ}(p)=\frac{W_1(p)+W_2(p)}{1+\left[W_1(p)+W_2(p)\right]W_3(p)}W_T(p).$$

Зважаючи на те, що $T_1 = T_2$, матимемо:

$$W_{БЧ}(p)=\frac{\dfrac{k_1+k_2}{T_1p+1}}{1+\dfrac{k_1+k_2}{T_1p+1}k_3}e^{-p\tau}=\frac{k_1+k_2}{T_1p+1+(k_1+k_2)k_3}e^{-p\tau}.$$

Враховуючи формулу (2.4) та властивості z–перетворення (1.5), передаточна функція зведеної безперервної частини системи:

$$W_{ЗБЧ}(z) = \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{1}{p}\frac{k_1+k_2}{T_1 p + 1 + (k_1+k_2)k_3}\right] z^{-k}, \quad \text{де } k = \tau / T.$$

Розкладемо вираз у фігурних дужках на прості дроби та знайдемо його z–перетворення:

$$W_{ЗБЧ}(z) = \frac{k_1+k_2}{1+(k_1+k_2)k_3}\frac{1-d}{z-d} z^{-k}, \quad \text{де } d = e^{-T/T_1}.$$

Після підстановки числових даних дістанемо:

$$W_{ЗБЧ}(z) = 2{,}9167\frac{0{,}763}{z-0{,}2369} z^{-1} = \frac{2{,}225z^{-2}}{1-0{,}2369z^{-1}},$$

Оскільки $D(z)$=1, дискретна передаточна функція розімкненої системи згідно (2.5) матиме вигляд:

$$W_P(z) = D(z)\, W_{ЗБЧ}(z) = \frac{2{,}225z^{-2}}{1-0{,}2369z^{-1}}.$$

Дискретна передаточна функція замкненої системи для каналу «завдання $g(t)$ – вихід $y(t)$» згідно з (2.6) матиме вигляд:

$$W_З(z) = \frac{W_P(z)}{1+W_P(z)} = \frac{2{,}225z^{-2}}{1-0{,}2369z^{-1}+2{,}225z^{-2}}.$$

2.3 Контрольні завдання

Завдання 3 Для системи, що зображена на рисунку, знайти передаточні функції безперервної та зведеної безперервної частини системи, дискретні передаточні функції розімкненої та замкненої системи для каналу $g(t)$ - $y(t)$.

$$W_1(p)=\frac{k_1}{T_1 p+1}; \qquad W_2(p)=\frac{k_2}{T_2 p+1}; \qquad W_3(p)=k_1 k_2;$$

$$W_4(p)=\frac{k_1}{p(T_1 p+1)}; \qquad W_5(p)=\frac{k_2(0{,}8p+1)}{T_2 p+1};$$

$$W_E(p)=\frac{1-e^{-pT}}{p}; \qquad W_{\mathrm{T}}(p)=e^{-p\tau}; \qquad D(z)=1.$$

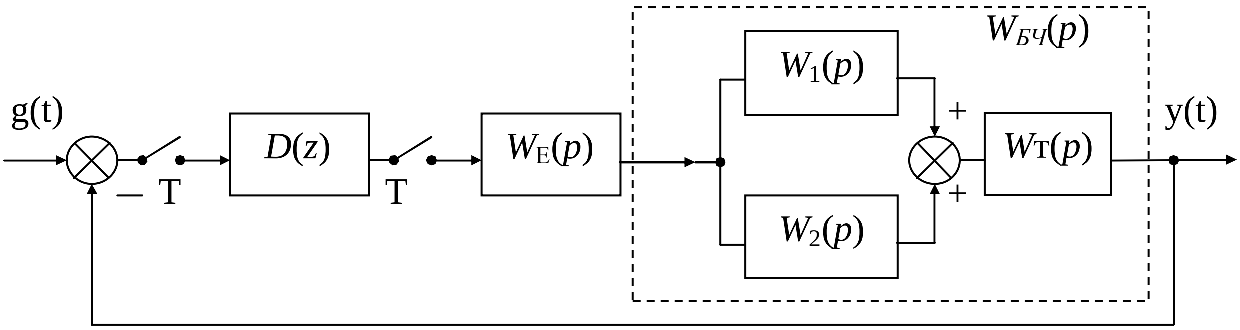


Рис. 2.2

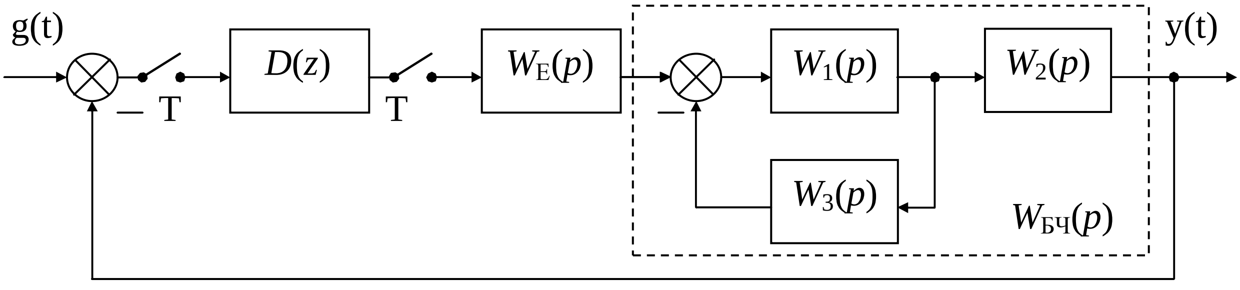


Рис. 2.3

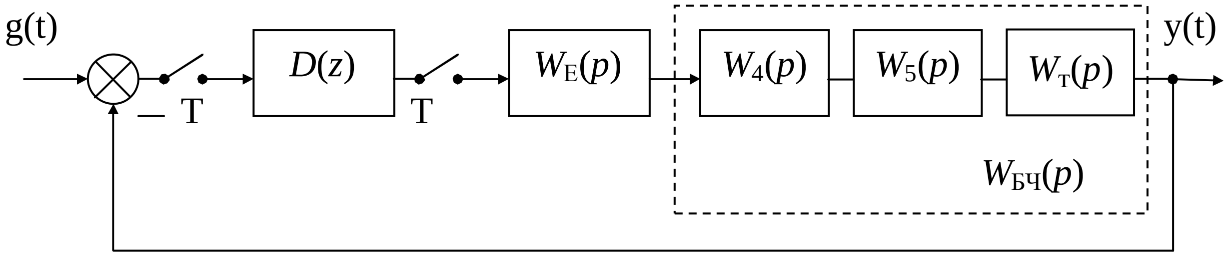


Рис. 2.4

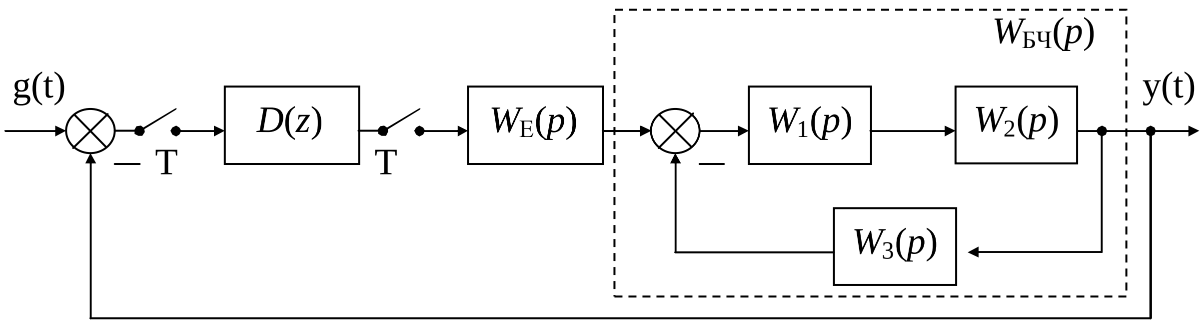


Рис. 2.5

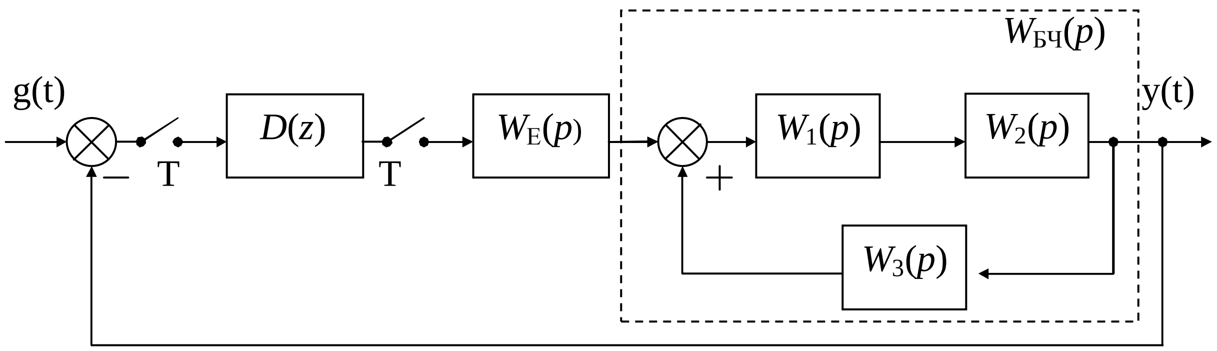


Рис. 2.6

Таблиця 2.2

Вихідні дані до завдання 3

Варіант	Рисунок	k_1	k_2	T_1	T_2	τ	T
1	2.2	0,5	2	0,5	0,2	0,1	0,1
2		1,2	0,8	0,2	0,5	0,2	0,1
3		1	2	0,4	0,2	0,2	0,2
4		0,4	1,2	0,4	0,1	0,1	0,1
5		1,6	0,3	0,2	0,7	0,2	0,2
6	2.3	0,5	2	0,2	0,6	-	0,1
7		1,2	0,8	0,5	0,5	-	0,1
8		1	2	0,2	0,5	-	0,2
9		0,4	1,2	0,1	0,8	-	0,1
10		1,6	0,3	0,7	0,5	-	0,2
11	2.4	0,5	2	0,5	0,2	0,1	0,1
12		1,2	0,8	0,2	0,5	0,2	0,1
13		1	2	0,4	0,2	0,2	0,2
14		0,4	1,2	0,4	0,1	0,1	0,1
15		1,6	0,3	0,2	0,7	0,2	0,2
16	2.5	0,5	2	0,2	0,6	-	0,1
17		1,2	0,8	0,5	0,5	-	0,1
18		1	2	0,2	0,5	-	0,2
19		0,4	1,2	0,1	0,8	-	0,1
20		1,6	0,3	0,7	0,5	-	0,2
21	2.6	1	2	0,2	0,5	-	0,2
22		1,2	0,8	0,5	0,5	-	0,1
23		0,4	1,2	0,1	0,8	-	0,1
24		0,5	2	0,2	0,6	-	0,1
25		1,6	0,3	0,7	0,5	-	0,2

3 ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

3.1 Методичні вказівки до виконання контрольних завдань

Необхідною та достатньою умовою стійкості дискретної системи є знаходження коренів її характеристичного рівняння всередині кола одиничного радіуса з центром у початку координат на площині комплексної змінної z (рис. 3.1) [2,4,5,6,7].

Тобто для характеристичного рівняння

$$A(z) = z^{n} + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0, \qquad (3.1)$$

з коренями z_i ($i = 1, 2, \ldots, n$)

умова стійкості має вигляд $|z_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n.$ (3.2)

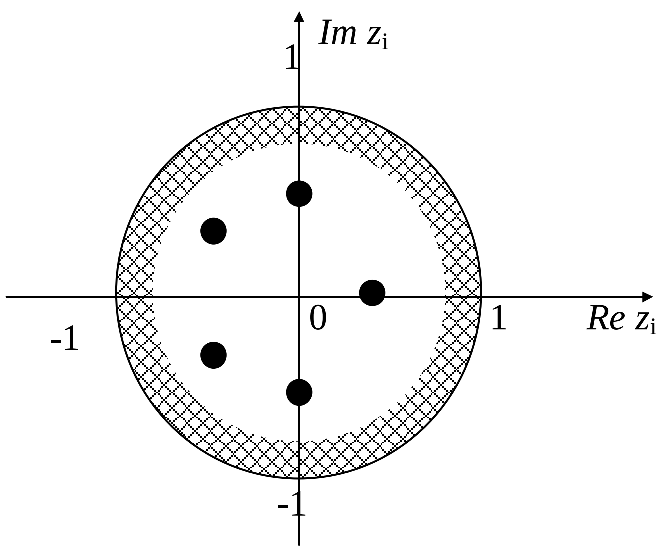


Рис 3.1

Для знаходження коренів рівнянь порядку $n \geq 3$ доцільно застосовувати чисельні методи, програмна реалізація яких наведена в [9].

Щоб запобігти необхідності розв'язку алгебраїчних рівнянь високого порядку, розроблені критерії стійкості, які дозволяють судити про стійкість системи автоматичного керування за деякими відношеннями коефіцієнтів характеристичного рівняння.

За **критерієм Шур-Кона** корені характеристичного рівняння (3.1) будуть лежати всередині кола одиничного радіуса, якщо коефіцієнти рівняння задовольняють умовам:

$$\Delta_i < 0 \text{ для непарних } i;$$
$$\Delta_i > 0 \text{ для парних } i, \tag{3.3}$$

де Δ_i - визначник Шур-Кона [1, 4, 11, 12] виду:

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{\nu-1} \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{\nu-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & a_{\nu-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-\nu+1} & a_{n-\nu+2} & a_{n-\nu+3} & \dots & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n^* & a_{n-1}^* & a_{n-2}^* & \dots & a_{n-\nu+1}^* \\ a_1^* & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n^* & a_{n-1}^* & \dots & a_{n-\nu+2}^* \\ a_2^* & a_1^* & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_n^* & \dots & a_{n-\nu+3}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu-1}^* & a_{\nu-2}^* & a_{\nu-3}^* & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n^* \end{vmatrix},$$

де $\nu = 1, 2, 3, \dots, n$;

a_1^*, a_2^*, …, a_n^* - спряжені значення коефіцієнтів характеристичного рівняння. Для дійсних коефіцієнтів $a_1^* = a_1$, $a_2^* = a_2$, …, $a_n^* = a_n$.

Для характеристичного полінома другого порядку

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2 = 0 \tag{3.4}$$

умови стійкості за Шур-Коном мають вигляд:

$$|A(0)| < 1,\ A(1) > 0,\ \ A(-1) > 0. \tag{3.5}$$

Для характеристичного полінома третього порядку

$$A(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0 \tag{3.6}$$

визначники Шур-Кона для стійкої системи мають вигляд:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ 1 & a_3 \end{vmatrix} < 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & 1 & a_1 \\ a_2 & a_3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a_3 & a_2 \\ a_1 & 1 & 0 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & 0 & 1 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 & 1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} < 0. \qquad (3.7)$$

Для полегшення процедури обчислення визначників високих порядків можна застосовувати обчислювальну техніку. Відповідне програмне забезпечення можна знайти в літературі [9].

Після застосування до характеристичного рівняння **білінійного перетворення** виду

$$z = (1 + w)/(1 - w) \qquad (3.8)$$

стійкість дискретної системи можна досліджувати за критерієм Рауса або Гурвіца [1-6].

Критерій Гурвіца для рівняння n- ого порядку дивись у додатку А.

Так після заміни змінних (3.8) в рівнянні (3.6) та відкидаючи знаменник, матимемо:

$$(1 - a_1 + a_2 - a_3)w^3 + (3 - a_1 - a_2 + 3a_3)w^2 +$$
$$+ (3 + a_1 - a_2 - 3a_3)w + 1 + a_1 + a_2 + a_3 = 0,$$

або

$$b_3w^3 + b_2w^2 + b_1w + b_0 = 0.$$

Тоді згідно з критерієм Гурвіца [1,4,11] складаємо визначники Гурвіца і знаходимо умови стійкості для рівняння третього порядку:

$$\begin{cases} b_3 = 1 - a_1 + a_2 - a_3 > 0, \\ b_2 = 3 - a_1 - a_2 + 3a_3 > 0, \\ b_1 = 3 + a_1 - a_2 - 3a_3 > 0, \\ b_0 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 > 0, \\ b_2\, b_1 - b_3\, b_0 = (3 - a_1 - a_2 + 3a_3)(3 + a_1 - a_2 - 3a_3) - \\ \quad - (1 + a_1 + a_2 + a_3)(1 - a_1 + a_2 - a_3) > 0. \end{cases} \qquad (3.9)$$

3.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 3.2.1 Дослідити стійкість системи автоматичного керування, якщо характеристичне рівняння замкненої системи має вигляд:

$$A(z) = z^3 - 1{,}014456z^2 + 0{,}302017\, z - 0{,}00506 = 0. \qquad (*)$$

Розв'язання.

<u>Спосіб 1.</u> За розташуванням коренів характеристичного рівняння.

Знайдемо корені (рис. 3.2):

$z_1 = 0{,}018$; $z_{2,3} = 0{,}5 \pm j\, 0{,}19$;

$|z_1| < 1$;

$|z_{2,3}| = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}19^2} = 0{,}5348 < 1$.

Оскільки корені заданого характеристичного рівняння замкненої системи знаходяться в середині кола одиничного радіусу, система є стійкою.

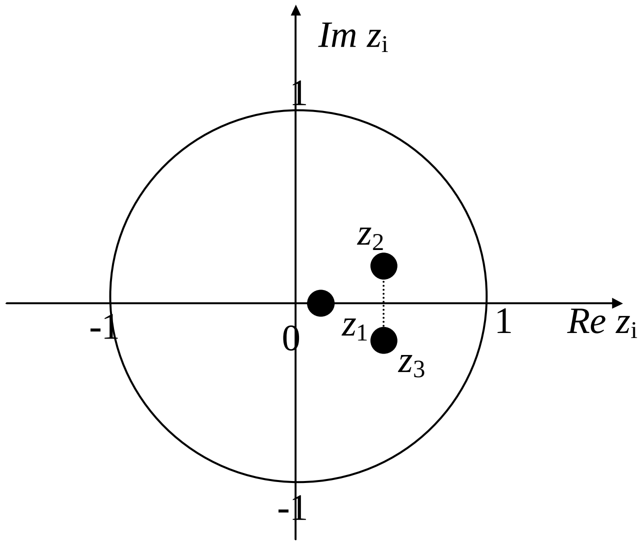


Рис. 3.2

<u>*Спосіб 2.*</u> За критерієм Шур-Кона.

Знайдемо парні та непарні визначники Шур-Кона:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -0{,}00506 & 1 \\ 1 & -0{,}00506 \end{vmatrix} = -1{,}000025 < 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -0{,}00506 & 0 & 1 & -1{,}014456 \\ 0{,}302017 & -0{,}00506 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -0{,}00506 & 0{,}302017 \\ -1{,}014456 & 1 & 0 & -0{,}00506 \end{vmatrix} = 0{,}97 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -0{,}00506 & 0 & 0 & 1 & -1{,}014456 & 0{,}302017 \\ 0{,}302017 & -0{,}00506 & 0 & 0 & 1 & -1{,}014456 \\ -1{,}014456 & 0{,}302017 & -0{,}00506 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -0{,}00506 & 0{,}302017 & -1{,}014456 \\ -1{,}014456 & 1 & 0 & 0 & -0{,}00506 & 0{,}302017 \\ 0{,}302017 & -1{,}014456 & 1 & 0 & 0 & -0{,}00506 \end{vmatrix} =$$

$$= -0{,}6 < 0.$$

Всі умови стійкості Шур-Кона виконуються, отже можна зробити висновок, що замкнена система є стійкою.

Спосіб 3. За допомогою білінійного перетворення.

Зробимо білінійну підстановку (3.8) у характеристичному рівнянні (*) та після елементарних перетворень отримаємо:

$$2{,}321533w^3 + 3{,}697259w^2 + 1{,}698707w + 0{,}282501 = 0.$$

Скористаємося умовою стійкості Гурвіца для рівняння третього порядку (3.9):

$$2{,}321533 > 0, \quad 3{,}697259 > 0, \quad 0{,}282501 > 0,$$

$$3{,}697259*1{,}698707 - 2{,}321533*0{,}282501 = 5{,}624724 > 0,$$

Як бачимо, усі висновки про стійкість системи збігаються.

Приклад 3.2.2 Дослідити стійкість замкненої цифрової системи автоматичного керування, якщо розімкнена передаточна функція системи має вигляд:

$$W_P(z) = \frac{0,632z}{z^2 - 1,368z + 0,368}.$$

Розв’язання.

Характеристичне рівняння замкненої системи:

$$A(z) = 1 + W_P(z) = 1 + \frac{0,632z}{z^2 - 1,368z + 0,368} = 0,$$

або

$$A(z) = z^2 - 0,736\, z - 0,368 = 0.$$

Його корені: $z_1 = 1,1$; $z_2 = -0,34$.

Система нестійка, тому що один з коренів характеристичного рівняння знаходиться за межами кола одиничного радіусу.

3.3 Контрольні завдання

Завдання 4 Дослідити стійкість системи автоматичного керування за допомогою критеріїв Шур-Кона, Гурвіца, та кореневого критерію, якщо характеристичне рівняння замкненої системи має вигляд:

$$A(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0.$$

Таблиця 3.1– Вихідні дані до завдання 4

Варіант	a_0	a_1	a_2	a_3
1	1	-1,03	-1,32	-0,0044
2	1	1	1	1
3	1	-1,545	0,607	-0,0613
4	0	1	2	3
5	1	-2,47	1,16	-0,054
6	1	-2,22	1,695	-0,474
7	5	2	3	1
8	1	1,22	-1,845	-2,384
9	-1,7	4,1	-0,45	0,62
10	1	5,214	-3,117	0,351
11	1	0,244	-2,92	-0,16
12	1	-0,78	0,591	-1,321
13	1	1,67	-0,22	-1,55
14	1	-1,014	0,302	-0,005
15	0,8	-0,11	-0,44	1,704
16	1	3,95	-0,478	1,244
17	1,2	-5,181	1,687	0,121
18	0,7	0,45	-0,56	1,4
19	1,4	-5,12	-2,7	6,308
20	0	1	1	-0,5
21	0,4	1,204	0,014	-1,154
22	1	-2,51	-2,022	-0,512
23	1	-1,54	0,0056	-1,003
24	1	-1,03	-1,32	0,0044
25	0	1	-1,5	1,5

4 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Типовий контур цифрової системи керування та характеристика його елементів.
2 Види імпульсної модуляції, що застосовуються в цифрових системах керування.
3 Екстраполятор нульового порядку, його характеристика.
4 Властивості δ - функції.
5 Математичні залежності, що зв'язують безперервні та дискретні функції.
6 Теорема В.А. Котельникова.
7 Критерії стійкості цифрових систем.
8 Характеристичне рівняння замкненої цифрової системи.
9 Критерій Шур-Кона.
10 Білінійне перетворення, та його застосування для дослідження стійкості цифрових систем.
11 Застосування критерію Гурвіца для дослідження стійкості цифрових систем.
12 Алгебраїчні критерії стійкості цифрових систем.
13 Частотні методи дослідження стійкості цифрових систем.
14 Властивості z–перетворення.
15 Обмеження використання z–перетворення.
16 Модифіковане z–перетворення, випадки застосування.
17 Визначення z–перетворення функції за її зображенням за Лапласом.
18 Зворотне z–перетворення. Способи визначення.
19 Схеми з'єднань ланок та еквівалентні передаточні функції цифрової системи керування.

20 Особливості знаходження *z*–перетворення для систем з декількома квантувачами.

21 Передаточні функції цифрових систем керування.

22 Формування безперервних сигналів в цифровій системі керування.

23 Система із транспортним запізненням. Її імпульсна передаточна функція.

24 Умова можливості реалізації для передаточної функції цифрової системи.

25 Зв'язок між імпульсною передаточною функцією та перехідною функцією системи.

ДОДАТОК

Критерій Гурвіца для рівняння *n*- ого порядку

Критерій стійкості Гурвіца: для того щоб система автоматичного керування була стійкою, необхідно та достатньо, щоб при $a_0 > 0$ всі визначники Гурвіца Δ_i були додатними.

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \quad \dots;$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix},$$

де n – порядок характеристичного рівняння.

Розкриваючи визначники Гурвіца отримуємо умови стійкості для безперервних систем другого, третього та четвертого порядків.

n=1: $a_0 p + a_1 = 0$;

умови стійкості для системи першого порядку будуть:

$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0$;

n=2: $a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$;

умови стійкості для системи другого порядку будуть:

$a_0 > 0,\quad \Delta_1 = a_1 > 0,\quad \Delta_2 = a_1 a_2 > 0,$ звідки $a_2 > 0$;

n=3: $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0;$

умови стійкості для системи третього порядку будуть:

$a_0 > 0,\quad \Delta_1 = a_1 > 0,$

$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,\quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0,$ звідки $a_3 > 0;$

n=4 : $a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0;$

умови стійкості для системи четвертого порядку будуть:

$a_0 > 0,\quad \Delta_1 = a_1 > 0,\quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$

$\Delta_3 = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0,$

$\Delta_4 = a_4 \Delta_3 > 0,$ звідки $a_4 > 0.$

n=5: $a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0,$

умови стійкості для системи п’ятого порядку будуть:

$a_0 > 0,\quad a_1 > 0,\quad a_2 > 0,\quad a_3 > 0,\quad a_4 > 0,\quad a_5 > 0,$

$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$

$(a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_0 a_1 a_5)\, a_4 -$

$-\,(a_1 a_2^2 - a_0 a_1 a_4 - a_0 a_2 a_3 + a_0^2 a_5)\, a_5 > 0,$

Нагадуємо, що критерій Гурвіца можна застосовувати для характеристичних рівнянь імпульсних та цифрових систем керування тільки після білінійної підстановки (3.8).

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1 Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, Главн. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 768с.

2 Бесекерский В.А.,Израинцев В.В. Системы автоматического управления с микро-ЭВМ. – М.: Наука. Главн. ред. физ.- мат. лит., 1987.-320с.

3 Забашта Ю.П., Самотокин Б.Б. Микропроцессорные системы управления. – К.: УМК ВО, 1989.—83с.

4 Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование - М.: Машиностроение, 1978.–735с.

5 Кваско М.З. Проектирование и расчет цифровых систем управления.—К.:УМК ВО, 1991.—220с.

6 Кваско М.З., Піргач М.С., Аверіна Т.В. Проектування і розрахунок дискретних автоматичних систем керування технологічними процесами: Навч. посібник. – К.:НМЦ ВО, 2000.-248с.

7 Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1986.—448с.

8 Микропроцессорные системы автоматического управления/ Под ред. В.А. Бессекерского. - М.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1988.—365с.

9 Паскаль и числовые методы: Учеб. пособие / А.И.Кубрак, Т.В.Аверина. — К.: УМК ВО, 1992. —108с.

10 Пиргач Н.С., Пиргач В.С. Автоматическое регулирование и регуляторы в целюлозно-бумажной, деревообрабатывающей и лесохимической промышленности —М.: Лесная промышленность, 1983.–262с.

11 Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под ред. В.А. Бесекерского. — М.: Наука, 1978.-512с.
12 Топчеев Ю.И., Цыпляков А.П. Задачник по теории автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1977. – 592с.
13 Ту Ю.Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1964. – 704с.