

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

**КОМП’ЮТЕРНІ МЕТОДИ  
ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЗАЦІЇ**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів спеціальності  
«Автоматизоване управління технологічними процесами»

Київ  
НТУУ “КПІ”  
2013

Комп'ютерні методи проектування систем автоматизації: конспект лекцій для студентів спеціальності «Автоматизоване управління технологічними процесами» / Уклад.: М. З. Кваско, Я. Ю. Жураковський, – К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 172с.

*Гриф надано Вченою радою ІХФ  
(Протокол № 10 від 25 листопада 2013 р.)*

Навчальне видання

КОМП'ЮТЕРНІ МЕТОДИ  
ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЗАЦІЇ

Конспект лекцій для студентів спеціальності «Автоматизоване управління технологічними процесами»

Укладачі: Кваско Михайло Зіновійович, к.т.н., проф.  
Жураковський Ярослав Юрійович, ст. викл.

Відповідальний  
редактор А.І. Жученко, д.т.н., проф.

Рецензент Ладієва Л.Р., к.т.н.

Авторська редакція

## Зміст

1. Аналіз і синтез дискретних систем керування з мікро- та міні- ЕОМ .....	6
1.1. Основні поняття .....	6
1.1.1. Імпульсні елементи та їх представлення .....	6
1.1.2. Визначення зв'язку дискретного перетворення Лапласа з ґратчастою функцією .....	10
1.1.3. Теорема переривання .....	12
1.1.4. Формування безперервних сигналів .....	17
1.1.5. Властивості z-перетворення .....	19
1.1.6. Дискретна передаточна функція .....	24
1.1.7. Методи зворотного переходу до часової області .....	26
1.1.8. Модифіковане z-перетворення .....	31
1.2. Аналіз дискретної системи керування з мікро - і міні-ЕОМ .....	37
1.2.1. Передаточна функція .....	37
1.2.2. Критерій стійкості .....	46
1.2.3. Дослідження дискретних систем .....	50
1.3. Синтез систем керування з мікро- та міні-ЕОМ .....	51
1.3.1. Метод логарифмічних амплітудних характеристик як .....	52
1.3.2. Застосування нелінійних законів керування .....	54
1.3.3. Застосування показника коливності .....	59
1.3.4. Мінімізація тривалості перехідного процесу і похибки .....	61
1.3.6. Побудова оптимальної за швидкістю системи керування .....	64
1.4. Алгоритми керування .....	70
1.4.1. Форми запису алгоритмів .....	70
1.4.2. Характеристики алгоритмів керування .....	71
1.4.3. Склад і послідовність виконання окремих процедур .....	71

2. Моделювання об'єктів керування.....	78
2.1. Типи передаточних функцій .....	79
2.2 Практичні приклади ідентифікації об'єктів керування .....	80
2.2.1. Визначення числових значень істинної імпульсної перехідної функції .....	81
2.2.2. Визначення числових значень експериментальної імпульсної перехідної функції за допомогою ПВДП.....	81
2.2.3. Оцінювання параметрів моделі каналу керування .....	89
3. Аналітичне конструювання і дослідження динамічних властивостей дискретних регуляторів .....	96
3.1. Розрахункова схема.....	96
3.2. Вимоги, що висуваються до дискретної системи керування .....	97
3.3. Дискретний ПІ-регулятор.....	98
3.4. Дискретний ПІД-регулятор .....	101
3.5. Позиційні та швидкісні алгоритми.....	103
3.6. Дискретний регулятор Даліна.....	107
3.6.1. Загальна передаточна функція.....	107
3.6.2. Типи дискретного регулятора Даліна .....	109
3.6.3. Чутливість дискретного регулятора Даліна типу IV до оцінки його параметрів .....	119
3.6.4. Чутливість дискретного регулятора Даліна типу IV до частоти збурюючого впливу і запізнювання в каналі керування.....	125
3.7. Дискретний регулятор Калмана .....	128
3.7.1. Загальна передаточна функція дискретного регулятора Калмана... 128	
3.7.2. Типи дискретного регулятора Калмана .....	131
3.7.3. Недоліки дискретних регуляторів Калмана .....	134
3.8. Дискретний регулятор Хігема .....	136
3.8.1. Загальна передаточна функція дискретного регулятора.....	136

3.8.2. Типи дискретного регулятора Хігема .....	138
3.8.3. Особливості дискретного регулятора Хігема .....	141
3.9. Дискретний регулятор Острьома.....	142
3.9.1. Загальна передаточна функція дискретного регулятора Острьома.	142
3.9.2. Принципи аналітичного конструювання дискретного регулятора Острьома .....	144
3.9.3. Усталена похибка в системі керування з дискретним регулятором Острьома .....	146
3.9.4. Ефективність роботи системи керування з дискретним регулятором Острьома .....	147
3.9.5. Порівняльний аналіз ефективності роботи дискретних систем керування з регуляторами Острьома і Даліна.....	149
3.10 Формування рекурентних співвідношень і структури алгоритмів дискретних регуляторів .....	166
Додаток 1. Z-перетворення функцій часу.....	170
Список рекомендованої літератури.....	171

## **1. Аналіз і синтез дискретних систем керування з мікро- та міні- ЕОМ**

### **1.1. Основні поняття**

Сучасне проектування систем керування базується на широкому використанні ЕОМ, що забезпечує високу точність, більшу надійність та компактність порівняно з аналоговими системами. Розв'язання задач технічної реалізації дискретних систем керування з використанням сучасних мікро- та міні-ЕОМ (ММЕОМ) базується на математичних методах. Перетворення Лапласа та Фур'є дозволяють проводити аналіз і синтез безперервних систем. Дослідження дискретних систем може бути здійснене за допомогою  $z$ -перетворення [1, 2, 4 – 6] (дискретного перетворення Лапласа).

Це перетворення потрібно застосувати до дискретного сигналу, отриманого з безперервного шляхом імпульсної модуляції першого типу без запам'ятовування [4]. В загальному випадку  $z$ -перетворення може бути визначено і для дискретної функції, якій не можна поставити у відповідність безперервну. Розглянемо детальніше суть імпульсної модуляції [6].

#### **1.1.1. Імпульсні елементи та їх представлення**

Як було зазначено вище, перетворення вхідного сигналу здійснюється в аналого-цифровому перетворювачі (АЦП), що формує миттєві імпульси, інтенсивність яких пропорційна значенням вхідного

сигналу в моменти  $nT$ . У цифрових системах керування найчастіше застосовується амплітудна модуляція імпульсів, причому така, при якій висота імпульсу пропорційна поточному значенню безперервного сигналу, ширина постійна, а інтервали між імпульсами однакові і дорівнюють періоду дискретності системи  $T$ .

Якщо вхідним сигналом АЦП є безперервний сигнал  $y(t)$ , то його вихідним сигналом є послідовність імпульсів  $y^*(t)$  певної форми, амплітуди яких пропорційна значенням вхідного сигналу у моменти  $t = nT$ .

**Найпростішим імпульсним елементом (НІЕ)** є такий, вихідні імпульси  $y^*(t)$  якого мають дуже малу тривалість, а тому можуть бути подані у вигляді  $\delta$ -функцій. Отже, НІЕ на своєму виході формує миттєві імпульси, «площі» яких дорівнюють дискретним значенням вхідної змінної  $y(nT)$  у моменти часу  $nT$  (рис. 1.1).

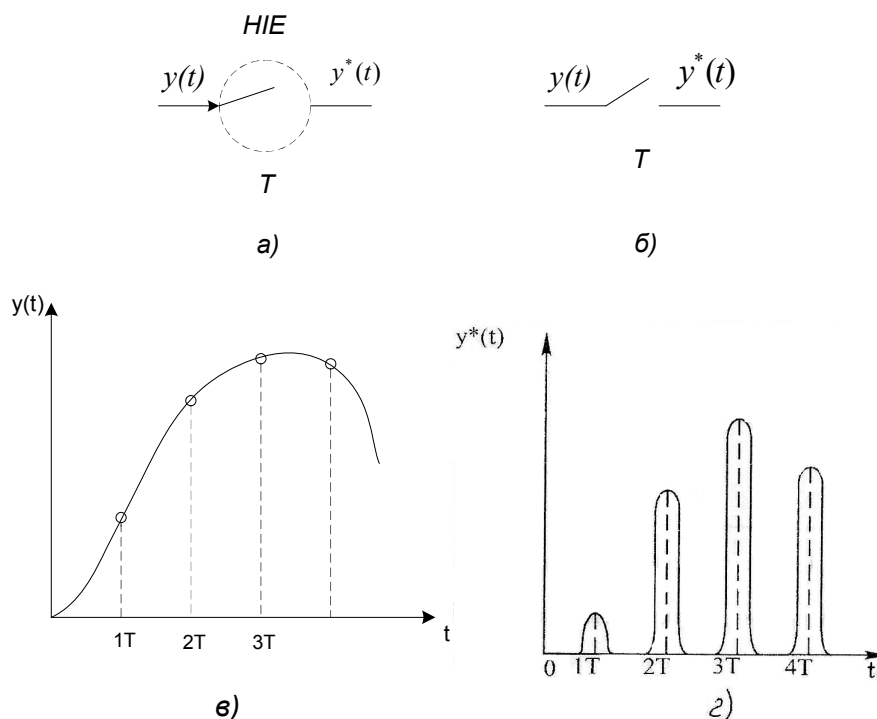


Рис. 1.1. Найпростіший імпульсний елемент:

а, б – зображення на схемах; в – вхідний, г – вихідний сигнали

Наявність дискретних сигналів робить неможливою, зокрема, операцію інтегрування, тому математичний апарат., придатний для аналізу безперервних систем (інтегрування, перетворення Фур'є, Лапласа), не може застосовуватися для дискретних систем. Щоб вирішити цю проблему, послідовність імпульсів на виході НІЕ замінюється гратчастою функцією, що складається з ідеальних імпульсів.

Ідеальний імпульс ( **$\delta$ -функція**) визначається як

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

а його площа дорівнює

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.2)$$

Розглянемо основні властивості  $\delta$  - функції [13].

Властивість 1:

$$y(t) \cdot \delta(t - t_0) = y(t_0) \cdot \delta(t - t_0) \quad (1.3)$$

де  $\delta(t - t_0)$  – зсунута праворуч на  $t_0$   $\delta$ -функція.

Ця властивість випливає з того, що  $\delta(t - t_0)$  відрізняється від нуля тільки при  $t = t_0$

Властивість 2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = y(t_0) \quad (1.4)$$

Ця властивість випливає з попередньої, а саме:



$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t_0)\delta(t-t_0)dt = y(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt$$

З визначення  $\delta$  - функції відомо, що  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1$

Тому, нарешті,

$$y(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = y(t_0)$$

Оскільки, як було зазначено вище, вихідний сигнал НІЕ  $y^*(t)$  є послідовністю модульованих вхідним сигналом  $\delta$  - функцій, то НІЕ можна розглядати як **модулятор  $\delta$  - функцій** (рис. 1.2).

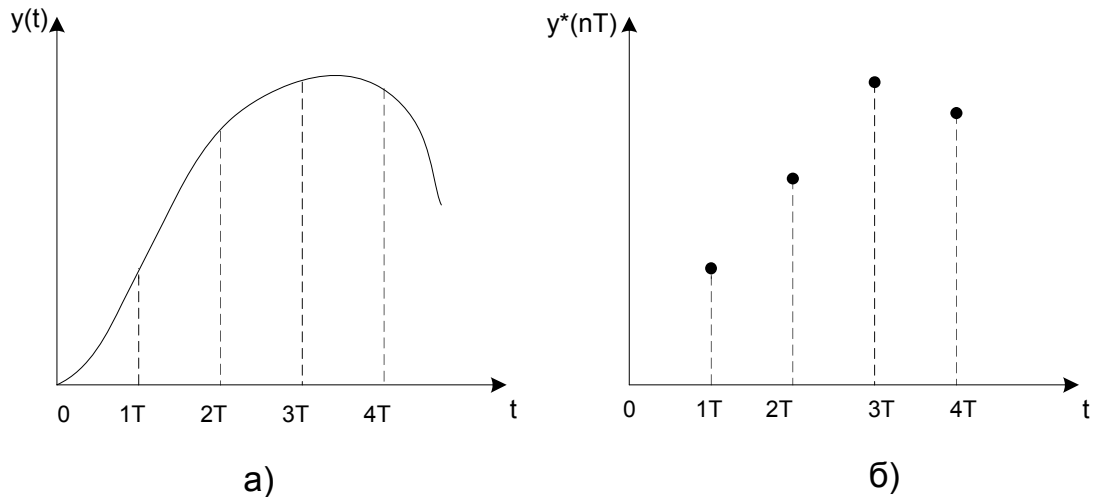


Рис. 1.2. Найпростіший імпульсний елемент як модулятор  $\delta$  - функцій:  
а – вхідний сигнал; б – вихідний сигнал

Немодульована періодична послідовність  $\delta$  - функцій з періодом  $T$  матиме вигляд:

$$\delta_T^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1.5)$$

Модуляція полягає у множенні вхідної змінної  $y(t)$  на немодульовану послідовність  $\delta_T^*(t)$ . Отже, вихідна змінна  $y^*(t)$

$$y^*(t) = y(t)\delta_T^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT)\delta(t - nT) \quad (1.6)$$

Враховуючи, що  $y(t)=0$  при  $t \leq 0$ , вираз (1.6) можна переписати так:

$$y^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT)\delta(t - nT) \quad (1.7)$$

### 1.1.2 Визначення зв'язку дискретного перетворення Лапласа з гратчастою функцією

Знайдемо  $y^*(p)$  – зображення Лапласа вихідної змінної НІЕ:

$$\begin{aligned} y^*(p) &= L\{y^*(t)\} = L\{y(t)\delta_T^*(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} L\{y(t)\delta(t - nT)\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)L\{\delta(t - nT)\} \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$L\{\delta(t - nT)\} = \int_0^{\infty} \delta(t - nT)e^{-pt} dt = e^{-pnT} = e^{-pnT}$$

дістанемо

$$y^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)e^{-pnT} = D\{y(nT)\} \quad (1.8)$$

Вираз (1.8) є дискретним перетворенням Лапласа або **D-перетворенням**. Очевидно, що  $y^*(p)$  не є раціональною функцією від  $p$ . Якщо ввести змінну  $z = e^{pT}$ , то (1.8) матиме вигляд:

$$y^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)z^{-n} \quad (1.9)$$

яке називають **z-перетворенням**.

**Приклад 1.1.** Визначити z-перетворення функції  $y(t) = t$ .

**Розв'язок.** Скориставшись виразом (1.9), дістанемо:

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nTz^{-n}$$

Помножимо ліву та праву частини останнього виразу на  $\frac{1}{Tz} dz$

$$\text{Дістанемо: } y(z) \frac{1}{Tz} dz = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n-1} dz$$

Проінтегруємо отриманий вираз

$$\int \frac{y(z)}{Tz} dz = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} dz + C,$$

де  $C$  – стала інтегрування, а

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots$$

є геометричною прогресією, сума якої

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}.$$

Продиференціювавши після підстановки  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1}$  отриманий інтеграл, дістанемо:

$$\frac{y(z)}{Tz} = \frac{-(z-1) + z}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}.$$

Отже,

$$y(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}.$$

Z-перетворення багатьох найуживаніших функцій табульовані, частина з них наведена в додатку (табл. Д.1).

### 1.1.3. Теорема переривання

Подамо немодульовану періодичну послідовність  $\delta$  - функцій (1.5) з періодом  $T$  у вигляді ряду Фур'є:

$$\delta_T^*(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 nt} \quad (1.10)$$

де  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  - частота квантування за часом;  $n$  - номер гармошки.

Вираз (1.10) можна подати і у такому вигляді:

$$\delta_T^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 nt} \quad (1.11)$$

Тоді зображення вихідної змінної  $y^*(p)$  можна подати так:

$$y^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} L\{y(t)e^{j\omega_0 nt}\} \quad (1.12)$$

Враховуючи властивість перетворення Лапласа

$$L\{y(t)e^{j\omega_0 nt}\} = y(p - jn\omega_0)$$

дістанемо

$$y^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(p - jn\omega_0)$$

Після заміни  $p = j\omega$  в (1.13) матимемо:

$$y^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(j(\omega - n\omega_0)) \quad (1.14)$$

звідки випливає, що спектр  $y^*(j\omega)$  вихідної змінної  $y^*(t)$  НІЕ є періодичним за частотою з «періодом», що дорівнює частоті квантування  $\omega_0$  (рис. 1.3).

Спектр  $y^*(j\omega)$  – це нескінченна сума частот модулюючої вхідної змінної  $y(j\omega)$ , зсунутих на  $\pm \omega_0, \pm 2\omega_0, \pm 3\omega_0, \dots$ . Інакше кажучи, спектр  $y^*(j\omega)$  вихідної змінної  $y^*(t)$  НІЕ пропорціональний сумі зсунутих спектрів  $y[j(\omega - n\omega_0)]$  безперервної вхідної змінної.

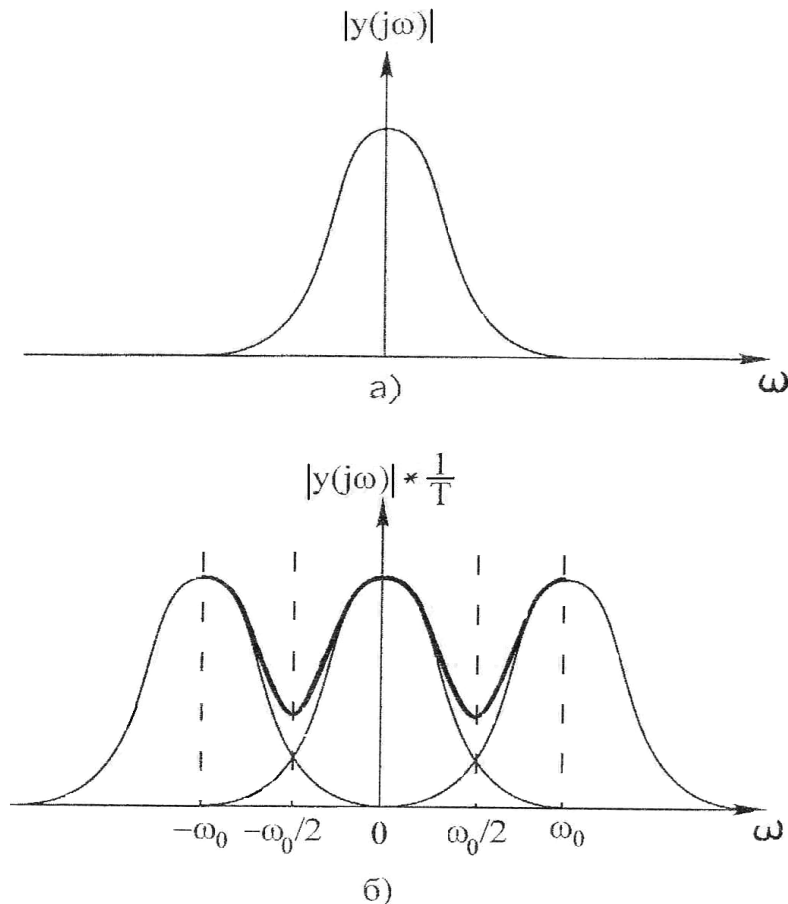


Рис. 1.3. Спектри вхідного (а) і вихідного (б) сигналів найпростішого імпульсного елемента

З аналізу рис. 1.3 очевидно, що спектр  $y^*(j\omega_0)$  повністю визначається діапазоном частот  $(-\omega_0/2, \omega_0/2)$  або, завдяки симетрії, діапазоном  $(0, \omega_0/2)$ .

Згідно з виразом (1.14) для побудови спектра  $y^*(j\omega_0)$  вихідної змінної НІЕ  $y^*(t)$  цей спектр треба зсунути вздовж осі частот на  $\pm n\omega_0$  ( $n=1,2,\dots$ ), знайти їх суму та змінити масштаб по осі ординат в  $1/T$  разів. На рис. 1.3,б жирною лінією виділено частину спектра  $y^*(j\omega)$  у діапазоні частот  $(-\omega_0/2, \omega_0/2)$ .

Сигнали, що проходять через імпульсний модулятор, втрачають частину інформації, оскільки у проміжках між імпульсами характер зміни сигналу  $y(t)$  невідомий. Тобто спектр  $y^*(j\omega)$  може відрізнятись від спектра

$y(j\omega_0)$ , оскільки квантування за часом, що здійснює НІЕ, спотворює сигнал, що квантується. Цей факт матиме місце тоді, як впливає з рис. 1.3,б, коли спектр  $y(j\omega)$  не обмежений.

Припустимо що спектр  $y(j\omega)$  обмежений, тобто  $y(j\omega)=0$  при  $|\omega| \geq \omega_3$ , де  $\omega_3$  - частота зрізання (рис .4).

При  $\omega_0 < 2\omega_3$  здійснюється суміщення зсунутих спектрів  $y[j(\omega - n\omega_0)]$ , і тому  $y^*(j\omega)$  у діапазоні частот  $(-\omega_0/2, \omega_0/2)$  за формою відрізняється від  $y(j\omega)$ .

При  $\omega_0 \geq 2\omega_3$  суміщення відсутнє, і в діапазоні  $(-\omega_0/2, \omega_0/2)$   $y^*(j\omega)$  і  $y(j\omega)$  за формою не відрізняються, а відмінні лише за масштабом.

Зважаючи на ці висновки, період дискретності  $T$  треба обирати таким, щоб дискретна система максимально точно відображала безперервну. Тобто треба не втрачати при квантуванні інформацію, що міститься в безперервному сигналі. Чим швидше змінюється сигнал  $y(t)$ , тим меншим повинен бути період його дискретності.

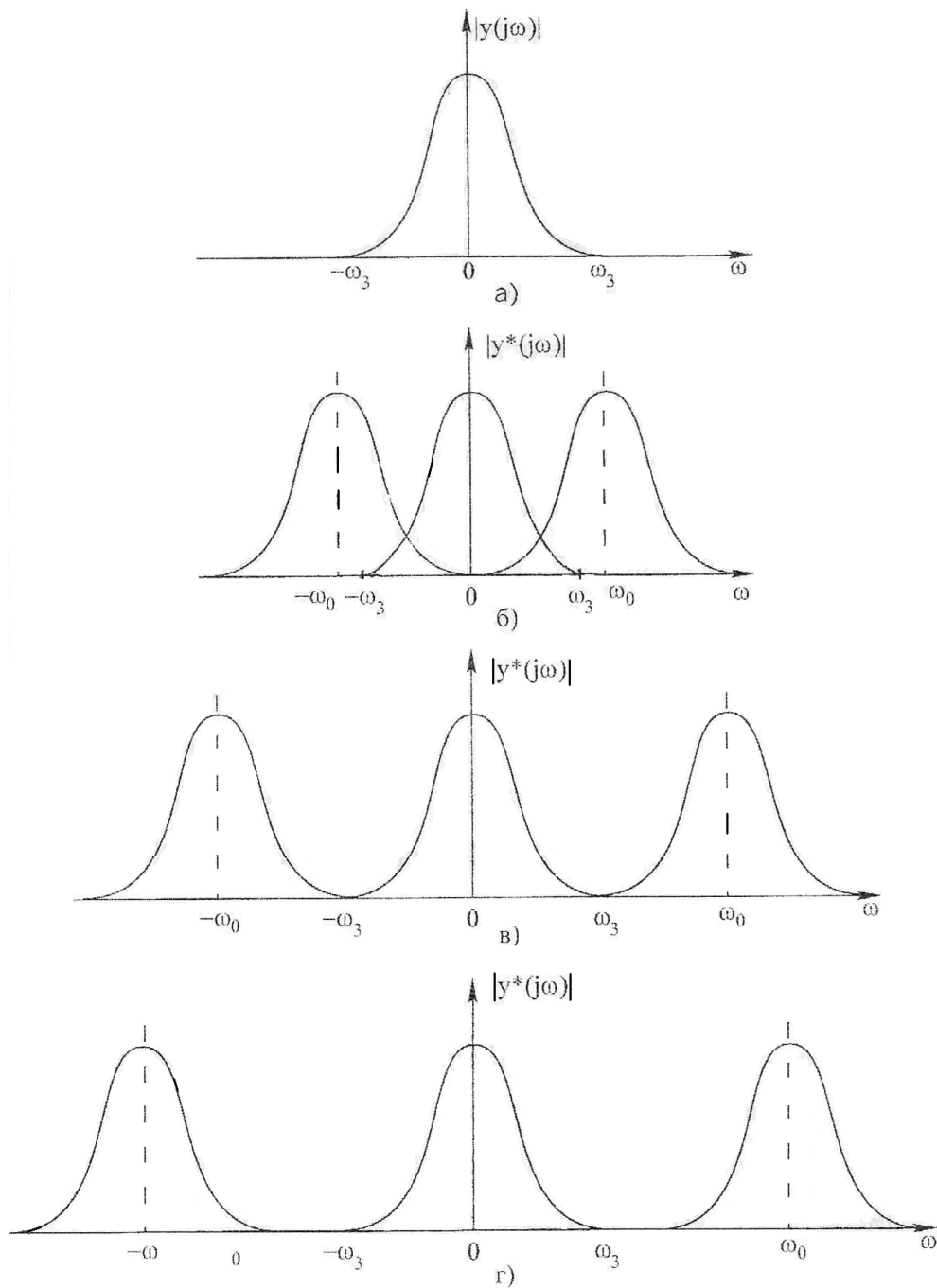


Рис. 1.4. Побудова  $y^*(j\omega)$  залежно від  $y(j\omega)$  і частоти  $\omega$  (а) при  $\omega_0 < 2\omega_3$   
 (б);  $\omega_0 = 2\omega_3$  (в);  $\omega_0 \geq 2\omega_3$  (г)



Залежно від спектра безперервної функції  $y(t)$  величина  $T$  обирається за теоремою В.О Котельникова, згідно з якою  $y(t)$ , що не має гармонійних складових при частотах вище частоти зрізання  $\omega_z$ , повністю визначається своїми значеннями в моменти часу  $nT$ , які відстоять один від одного на періоди  $T = \pi / \omega_z$ . Отже, частота квантування повинна обиратися згідно з нерівністю  $\omega_0 \geq 2\omega_z$ .

У цьому випадку дискретна функція  $y(nT)$  точно відобразить безперервну:

$$y(t) = y(n\pi / \omega_z)$$

де  $n=1,2,\dots$ , і при квантуванні вхідного сигналу інформація не втрачатиметься.

Якщо після імпульсного елемента встановити низькочастотний фільтр-модулятор, який відфільтруватиме гармоніки з частотами, що перевищують  $\omega_z$ , то можна буде враховувати лише основну складову спектра, яка визначається діапазоном частот  $(-\omega_0/2, \omega_0/2)$ , і застосувати формулу:

$$y^*(j\omega) = \frac{1}{T} y(j\omega).$$

#### 1.1.4. Формування безперервних сигналів

Цифро-аналоговий перетворювач, що входить до складу дискретної системи (рис.В.1), виконує функції демодулятора або формуючого елемента. Він здійснює перетворення послідовності імпульсів на відповідну безперервну зміну керуючого впливу. Це необхідно тому, що більшість систем керування містять елементи, розраховані на безперервні

вхідні сигнали. Наявність таких елементів вимагає застосування згладжування імпульсних сигналів. Для спряження цифрових і аналогових елементів часто застосовується пристрій відновлення даних – фільтр [5].

Ідеально точне відновлення безперервного сигналу базується на припущенні, що сигнал  $y(t)$  має обмежений спектр. Тому часто неможливо точно відновити безперервний сигнал з дискретного, якщо він квантований за часом. Отже, треба якнайточніше апроксимувати дискретну функцію часу безперервною, застосувавши, наприклад, розкладання безперервної функції  $y(t)$  в ряд на інтервалі між моментами квантування  $nT$  і  $(n+1)T$ , тобто

$$y_n(t) = y(nT) + y'(nT)(t - nT) + \frac{y''(nT)(t - nT)^2}{2!} + \dots, \quad (1.16)$$

де  $y_n(t) = y(t)$  для  $nT \leq t < (n+1)T$

Пристрій, в якому реалізований тільки член  $y(nT)$  з (1.16), називають екстраполятором (фіксатором) нульового порядку. Він фіксує значення попередньої вибірки протягом періоду квантування. Пристрій, що реалізує два члени з(1.16), називають екстраполятором першого порядку і т.д.

Екстраполятор нульового порядку формує амплітудно-модульовану послідовність прямокутних імпульсів, що мають тривалість  $T$ . Отримаємо його передаточну функцію. Припустимо, що на його вхід надходить послідовність імпульсів

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

для якої перетворення Лапласа має вигляд:

$$x^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nTp}$$

Вихідним сигналом екстраполятора нульового порядку є ступінчастий сигнал

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) [1(t - nT) - 1(t - (n+1)T)]$$

Для нього перетворення Лапласа визначається за формулою:

$$y(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTp} \frac{1}{p} [1 - e^{-pT}]$$

Отже, передаточною функцією екстраполятора нульового порядку є

$$W_E(p) = \frac{y(p)}{x^*(p)} = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \quad (1.17)$$

Модифікуємо (1.17) так:

$$W_E(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} = \frac{e^{pT/2} - e^{-pT/2}}{p} e^{-pT/2}$$

звідки стає очевидним, що екстраполятор нульового порядку вносить запізнювання, що дорівнює половині періоду дискретності системи.

### 1.1.5. Властивості z-перетворення

Розглянемо основні властивості (теореми) z-перетворення [8, 13].

1. **Лінійність.** Зображення алгебраїчної суми гратчастих функцій є такою ж алгебраїчною сумою зображень доданків.

$$Z\{ax(nT) + by(nT)\} = ax(z) + by(z) \quad (1.18)$$

де  $a = \text{const}$ ,  $b = \text{const}$ .

2. **Зсув аргументу оригіналу:**

а) зсув за часом праворуч

$$Z\{x(t - mT)\} = z^{-m} x(z) \quad (1.19)$$

при  $x(-1T) = x(-2T) = \dots = x(-mT) = 0$  ;

б) зсув за часом ліворуч

$$Z\{x(t + mT)\} = z^m \left[ x(z) - \sum_{r=0}^{m-1} x(rT) z^r \right]$$

або при  $x(0T) = x(1T) = \dots = x[(m - 1)T] = 0$

$$Z\{x(t + mT)\} = z^m x(z) \quad (1.20)$$

З (1.19) і (1.20) випливає, що множення зображення на  $z^{\pm m}$  відповідає зсуву аргументу оригіналу на  $\pm m$ . Тому цю теорему називають теоремою упередження (б) і запізнювання (а).

### 3. Граничні значення ґратчастої функції:

а) початкове значення ґратчастої функції

$$\lim_{n \rightarrow 0} x(nT) = \lim_{z \rightarrow \infty} x(z) \quad (1.21)$$

б) кінцеве значення ґратчастої функції

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z} x(z) \quad (1.22)$$

### 4. Зміна масштабу по z

$$Z\{e^{\pm \alpha n T} x(nT)\} = x(e^{\mp \alpha n T} z) \quad (1.23)$$

### 5. Диференціювання зображення по z

$$Z\{n^k x(nT)\} = z^k \frac{d^k x(z)}{dz^k} \quad (1.24)$$

### 6. Диференціювання зображення по параметру a

$$Z\left\{\frac{\partial}{\partial a} x(nT, a)\right\} = \frac{\partial}{\partial a} x(z, a) \quad (1.25)$$

## 7. Зображення суми

$$Z\left\{\sum_{m=0}^{n-1} x(mT)\right\} = \frac{1}{z-1} x(z) \quad (1.26)$$

Отже, додавання в області оригіналів відповідає в області зображень діленню на  $(z-1)$ .

## 8. Згортка функцій

$$Z\left\{\sum_{m=0}^n x(mT)y(t-mT)\right\} = x(z)y(z) \quad (1.27)$$

Ця теорема дає можливість знайти оригінал добутку зображень, якщо відомі оригінали множників.

Розглянуті теореми є основою  $z$ -перетворення. Застосовуючи їх, можна збільшити кількість відповідностей між оригіналами та їх зображеннями. До того ж, застосовуючи ці теореми, можна досліджувати властивості оригіналів за допомогою їх зображень.

В загальному випадку  $z$ -перетворення функції вигляду:

$$F(p) = F_1(p)F_2(p)$$

визначається за допомогою виразу

$$Z\{F(p)\} = Z\{F_1(p)F_2(p)\} \quad (1.28)$$

Оскільки при цьому необхідно шукати  $z$ -перетворення добутку передаточних функцій окремих ланок, задача дослідження дискретних систем значно ускладнюється. Проте, якщо на вході кожної ланки системи стоїть імпульсний елемент (ІЕ), наприклад так, як показано на рис. 1.5, то  $z$ -перетворення визначається за формулою:

$$Z\{F(p)\} = Z\{F_1(p)\}Z\{F_2(p)\} \quad (1.29)$$

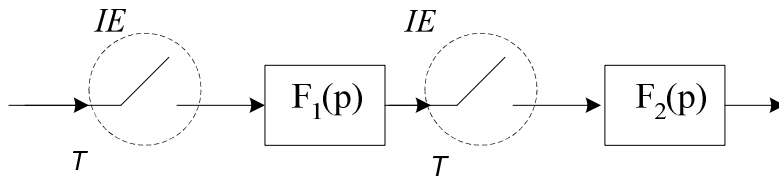


Рис. 1.5. Послідовне з'єднання двох ланок

Оскільки в контурі керування дискретної системи з ММЕОМ є два комутатори (вхідний та вихідний), співвідношення (1.29) є справедливим при визначенні загального виразу для передаточної функції окремого контуру керування системи.

**Приклад 1.2.** Визначити  $z$ -перетворення для функції часу, зображення Лапласа якої:

$$f(p) = \frac{k_0}{p^2(T_0p + 1)}$$

**Розв'язок.** Розкладемо задану функцію на прості дроби:

$$\frac{k_0}{p^2(T_0p + 1)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{T_0p + 1}$$

Зводячи до загального знаменника, дістанемо:

$$A + AT_0p + T_0Bp^2 + Bp + Cp^2 = k_0$$

Звідки випливає, що  $A = k_0, B = -k_0T_0, C = k_0T_0^2$

Тоді 
$$f(p) = \frac{k_0}{p^2(T_0p + 1)} = \frac{k_0}{p^2} - \frac{k_0T_0}{p} + \frac{k_0T_0^2}{T_0p + 1}$$

або, скориставшись табл. Д1, маємо:

$$F(z) = \frac{k_0Tz}{(z-1)^2} - \frac{k_0T_0z}{z-1} + \frac{k_0T_0z}{z-d} =$$

$$= \frac{k_0 T z(z-d) - k_0 T_0 z(z-1)(1-d)}{(z-1)^2(z-d)}$$

де  $d = \exp(-T/T_0)$

При розкладанні на прості дроби можна скористатися теоремою розкладання Лапласа. Відомо, що якщо  $f(p) = y_1(p)/y_2(p)$ , а корені знаменника  $p_i$  - є простими і жоден з них не дорівнює нулю, то

$$f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{y_1(p_i)}{y_2(p_i)} \times \frac{1}{p-p_i}$$

де  $n$  - кількість коренів  $y_2(p)$ .

Якщо знаменник зображення Лапласа  $f(p)$  має нульовий корінь, то зображення подають у вигляді:

$$y(p) = \frac{y_1(p)}{p y_3(p)} = \frac{y_1(0)}{p y_3(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{y_1(p_i)}{p y_3(p_i)} \times \frac{1}{p-p_i}$$

де  $n+1$  - загальна кількість коренів  $y_2(p)$ .

**Приклад 1.3.** Визначити  $z$ -перетворення функції часу, зображення Лапласа якої має вигляд:

$$f(p) = \frac{k_0 T_0}{p(T_0 p + 1)}$$

користуючись теоремою розкладання.

**Розв'язок.** Для заданого зображення  $f(p)$  маємо:

$$n = 1; y_1(p) = k_0 T_0; y_3(p) = T_0 p + 1; p_i = -1/T_0$$

Отже, 
$$f(p) = \frac{k_0 T_0}{p} - \frac{k_0 T_0}{p + 1/T_0}$$

Тоді, скориставшись табл. Д1,

$$F(z) = \frac{k_0 T z}{z-1} - \frac{k_0 T_0 z}{z-d} = \frac{k_0 T(1-d)z}{(z-1)(z-d)}$$

де

$$d = \exp(-T / T_0).$$

**Приклад 1.4.** Задана гратчаста функція часу

$$u(n) = k_1 y(n) + k_2 y(n-1) + k_3 y(n-2)$$

Знайти z-перетворення даної функції.

**Розв'язок.** Відповідно до теореми запізнювання та теореми лінійності z-перетворення [1] дістанемо:

$$u(z) = k_1 y(z) + k_2 y(z)z^{-1} + k_3 y(z)z^{-2}$$

### 1.1.6. Дискретна передаточна функція

Дискретною передаточною функцією окремої ланки називають відношення z-перетворення вихідного сигналу до z-перетворення вхідного сигналу за нульових початкових умов, тобто

$$W(z) = \frac{y_{вих}(z)}{y_{вх}(z)} \tag{1.30}$$

Нехай дискретні послідовності  $y_{вих}(z)$  і  $y_{вх}(z)$  задовольняють співвідношення вигляду

$$W(z) = \frac{y_{вих}(z)}{y_{вх}(z)} = \frac{\varepsilon_m z^m + \varepsilon_{m-1} z^{m-1} + \dots + \varepsilon_0}{c_l z^l + c_{l-1} z^{l-1} + \dots + c_0} \tag{1.31}$$

За умови, що  $c_l \neq 0$ ,  $m \geq l$  поділимо чисельник і знаменник виразу (1.31) на

$$W(z) = \frac{y_{вих}(z)}{y_{вх}(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}{z^{l-m} + b_1 z^{l-m-1} + \dots + b_m z^{-m}} \tag{1.32}$$



Скориставшись теоремою запізнювання, можна записати співвідношення, яке називається **різницеvim рівнянням**:

$$\begin{aligned} & a_0 y_{ex}(n) + a_1 y_{ex}(n-1) + \dots + a_m y_{ex}(n-m) = \\ & = y_{вих}(n+l-m) + b_1 y_{вих}(n+l-m-1) + \dots + b_e y_{вих}(n-m) \end{aligned} \quad (1.33)$$

де  $y_{ex}(n)$ ,  $y_{ex}(n-1)$ ,  $y_{ex}(n-m)$ ,  $y_{вих}(n+l-m)$ ,  $y_{вих}(n+l-m-1)$ ,  $y_{вих}(n-m)$  є значеннями  $y_{ex}(t)$  і  $y_{вих}(t)$  в дискретні моменти часу  $t = nT$ ,  $nT - T$  і т.д.

Отже, згідно з передаточною функцією (1.32) може бути складене різницеве рівняння, за допомогою якого описується поведінка дискретної ланки або системи в цілому.

**Приклад 1.5.** Дана дискретна передаточна функція вигляду

$$W(z) = \frac{y_{вих}(z)}{y_{ex}(z)} = \frac{0.11}{(z-1)(z-0.78) + 0.11}$$

Записати різницеве рівняння, що зв'яже вхідний і вихідний сигнали.

**Розв'язок.** Спростивши вираз у знаменнику, дістанемо:

$$W(z) = \frac{0.11}{z^2 - 1.78z + 0.89}$$

Для переходу до різницевого рівняння треба в цьому випадку поділити чисельник і знаменник на  $z^2$ . Тоді

$$W(z) = \frac{y_{вих}(z)}{y_{ex}(z)} = \frac{0.11z^{-2}}{1 - 1.78z^{-1} + 0.89z^{-2}}$$

або

$$y_{вих}(z) - 1.78y_{вих}(z)z^{-1} + 0.89y_{вих}(z)z^{-2} = 0.11y_{ex}(z)z^{-2}$$

Скориставшись теоремами лінійності і запізнювання, дістанемо різницеве рівняння вигляду

$$y_{вих}(n) - 1.78y_{вих}(n-1) + 0.89y_{вих}(n-2) = 0.11y_{вих}(n-2)$$

або

$$y_{вих}(n) = 1.78y_{вих}(n-1) - 0.89y_{вих}(n-2) + 0.11y_{вих}(n-2)$$

### 1.1.7. Методи зворотного переходу до часової області

Ці методи дозволяють отримувати значення функції лише для дискретних моментів часу. Треба зазначити, що в той час, коли z-перетворення є однозначним, зворотне z-перетворення, на відміну від зворотного перетворення Лапласа, є неоднозначним, оскільки підстановка  $z = \exp(pT)$ , де  $p = j\omega$ , багатозначна при переході з області z до області p.

В інженерних розрахунках застосовується три методи зворотного переходу в часову область: зворотне інтегральне перетворення, розкладання на прості дроби та розкладання в ряд Лорана.

#### 1.1.7.1. Зворотне інтегральне перетворення

Зворотне інтегральне перетворення здійснюється за формулою:

$$y(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_r y(z) z^{n-1} dz \quad (1.34)$$

де r – контур інтегрування у площині z, який охоплює всі особливі точки підінтегрального виразу.

Для фізичних систем контур інтегрування обирають у вигляді кола одиничного радіуса. Контурний інтеграл визначається за допомогою

теорема про лишки (теорія комплексної змінної), причому значення інтеграла дорівнює сумі лишків в особливих точках, розташованих всередині контуру інтегрування  $\Gamma$ , тобто

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} y(z) z^{n-1} dz = \sum_{\text{по усіх } z_k} \text{Res}[y(z) z^{n-1}] \quad (1.35)$$

де  $z_k$  – особливі точки підінтегрального виразу.

Відомо, якщо підінтегральна функція може бути подана у вигляді  $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$  де  $\varphi(z)$  і  $\psi(z)$  задовольняють умови  $\varphi(z_k) \neq 0$ ,  $\psi(z_k) = 0$ , а  $\psi'(z_k) \neq 0$  то лишок визначають з виразу

$$\text{Res}f(z_k) = \varphi(z_k)/\psi'(z_k) \quad (1.36)$$

**Приклад 1.6.** Знайти зворотне  $z$ -перетворення для функції виду

$$y(z_k) = \frac{z}{z-d}$$

де  $d = \exp(-aT)$

**Розв'язок.** Відповідно до виразу (1.36) дістанемо

$$y(nT) = \sum \text{Res}\left[\frac{z}{z-d} z^{n-1}\right] = \sum_{\text{по усіх } z_k} \text{Res}\left[\frac{z^n}{z-d}\right],$$

$$z_k = d$$

Користуючись формулою (1.36), матимемо:

$$y(nT) = d^n = \exp(-anT)$$

За допомогою отриманого виразу легко визначити значення функції для різних дискретних моментів часу  $nT$ .

### 1.1.7.2. Розкладання на прості дроби

Даний метод зворотного  $z$ -перетворення вимагає розкладання  $y(z)/z$  на прості дроби так, щоб зворотне  $z$ -перетворення кожного дроби помножене на  $z$  можна було б знайти у таблиці  $z$ -перетворень.

Величина чисельника кожного дроби дорівнює лишковій функції  $y(z)/z$  в особливій точці (див. вираз (1.36)).

**Приклад 1.7.** Знайти оригінал функції, якщо

$$y(z) = \frac{k_0 T_0 (1-d)z}{(z-1)(z-d)}$$

**Розв'язок.** Скориставшись методом розкладання на прості дроби, дістанемо

$$\frac{y(z)}{z} = \frac{k_0 T_0 (1-d)}{(z-1)(z-d)}$$

$$\varphi(z) = k_0 T_0 (1-d); \quad \psi(z) = z^2 - z(1+d) + d; \quad \psi'(z) = 2z - (1+d);$$

Коренями знаменника (особливими точками) є  $z_1=1$ ;  $z_2=d$ .

Відповідно до виразу (1.36) чисельниками простих дроби будуть

$$\operatorname{Res} \frac{y(z)}{z} \Big|_{z=z_1} = \frac{k_0 T_0 (1-d)}{1-d} = k_0 T_0$$

$$\operatorname{Res} \frac{y(z)}{z} \Big|_{z=z_2} = -k_0 T_0$$

Тоді

$$y(z) = \frac{k_0 T_0 z}{z-1} - \frac{k_0 T_0 z}{z-d}$$

Використовуючи таблицю z - перетворень (табл. Д1), дістанемо:

$$y(nT) = k_0 T_0 - k_0 T_0 \exp(-anT) - k_0 T_0 [1 - \exp(-anT)]$$

Варто зазначити, що розглянуті вище методи зворотного z-перетворення дозволяють отримати загальний вираз функції-оригіналу для будь-яких дискретних моментів часу, але вони пов'язані з певними обчислювальними труднощами.

### 1.1.7.3. Розкладання в ряд Лорана

Запропонований метод є найпростішим. Він застосовується у випадках, коли необхідно визначити декілька перших значень дискретної функції. Цей метод не дає можливості отримати загальний вираз функції-оригіналу.

Для розкладання в ряд Лорана за від'ємними степенями z чисельник передаточної функції ділять на знаменник:

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0} = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + \dots$$

Коефіцієнти  $c_i$  при відповідних від'ємних степенях z дорівнюватимуть значенням гратчастої функції в дискретні моменти часу  $n=0,1,2,3,\dots$  і обчислюються за формулою:

$$c_i = \frac{b - \sum_{s=0}^{m-1} a_s c_{i-(m-s)}}{a_m}$$

де

$$b = \begin{cases} b_{m-i}, & i \leq m \\ 0, & i \geq m \end{cases}$$

**Приклад 1.8.** Задане зображення функції:

$$y(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Знайти значення відповідної ґратчастої функції для моментів часу 0, T, 2T, 3T.

Розв'язок. Подамо знаменник  $y(z)$  у вигляді полінома:

$$y(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 1}$$

і поділимо поліном-чисельник на поліном-знаменник:

$$\begin{array}{r} z \\ z - 2 + z^{-1} \quad \left| \quad \frac{z^2 - 2z + 1}{z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots} \right. \\ \hline 2 - z^{-1} \\ \hline 2 - 4z^{-1} + 2z^{-2} \\ \hline 3z^{-1} - 2z^{-2} \end{array}$$

Отже,

$$y(nT) = 0z^0 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}$$

тому  $y(0)=0$ ;  $y(T)=1$ ;  $y(2T)=2$ ;  $y(3T)=3$ .

Особливістю методу z-перетворення є те, що він надає можливість обчислити значення змінних лише в момент замкнення імпульсного елемента. Тому в деяких випадках при дослідженні дискретних систем апарат z-перетворення виявляється недостатнім, оскільки до складу таких систем звичайно входять безперервні ланки. У цьому випадку втрачається інформація про поведінку безперервних ланок у проміжках часу між замкненнями імпульсного елемента. Тому для дослідження цих систем застосовується модифіковане z-перетворення.

### 1.1.8. Модифіковане z-перетворення

Розглянемо безперервну функцію  $y(t)$  і відповідну їй гратчасту функцію  $y(n)$ . Знайдемо нову гратчасту функцію, значення якої з'являються у ті ж моменти часу  $t=nT$ , що і значення функції  $y(n)$ , за значеннями  $y(t)$  у моменти часу  $(n+q)T$ . Нову функцію позначимо  $y_q(t)$ . Оскільки  $y_q(t) = y(t+qT)$ , отримана функція виявляється зсунутою праворуч (випереджаючою) на час  $qT$  відносно функції  $y(t)$ .

З безперервної функції  $y_q(t)$  можна звичайним шляхом отримати дискретну функцію  $y_q(nT)$ , яку надалі позначатимемо  $y(n, q)$  або  $y_{n,q}$ , і називатимемо **зсунутою гратчастою функцією**.

Отже,

$$y(n, q) = y_{n,q} = \begin{cases} y(t + qT), t = nT \\ 0, t \neq nT \end{cases} \quad (1.37)$$

причому  $0 \leq q \leq 1$

Процес формування зсунутої гратчастої функції пояснює рис.1.6.

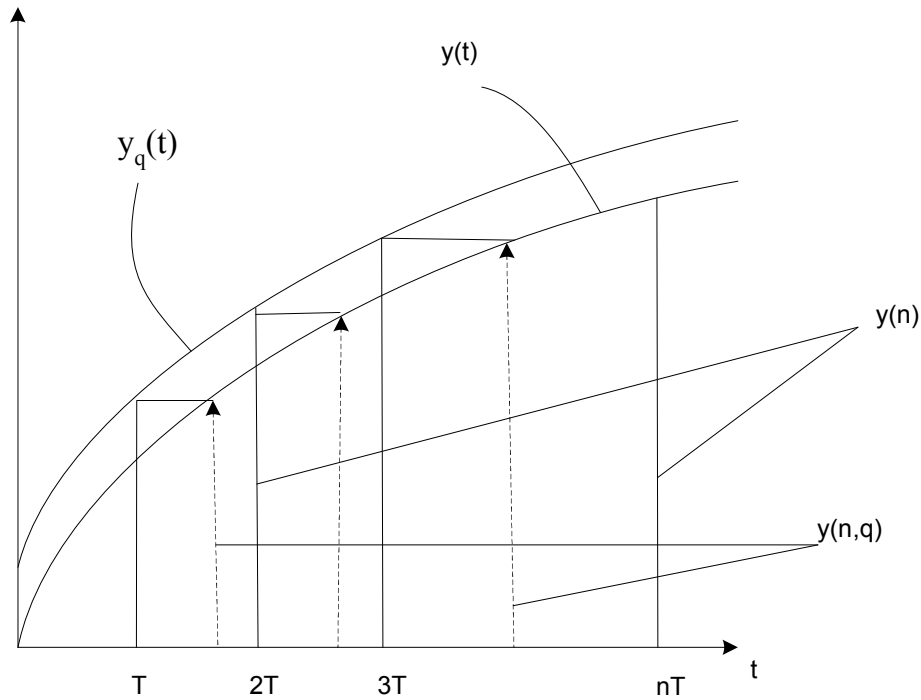


Рис. 1.6. Процес формування зсунутої гратчастої функції

Модифікованим  $z$ -перетворенням називають перетворення зсунутої функції, тобто

$$y(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT + qT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} y(n, q)z^{-n} \quad (1.38)$$

Скориставшись виразом (1.38) можна отримати множину зсунутих функцій для різних значень  $q$ .

Розглянемо деякі основні властивості модифікованого  $z$ -перетворення.

При  $q=0$  модифіковане  $z$ -перетворення стає звичайним  $z$ -перетворенням, тобто  $y(z, 0) = y(z)$ .

При  $q=1$  матимемо:

$$y(z, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} y[(n+1)T]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} y[(n+1)T]z^{-n} = z \sum_{n=1}^{\infty} y(nT)z^{-n} =$$



$$= z \left[ \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) z^{-n} - y(0) \right]$$

тобто

$$y(z,1) = z[y(z) - y(0)]$$

Значення  $y(0)$  можна знайти за допомогою теореми про граничні значення змінної:

$$y(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} y(z) = \lim_{p \rightarrow \infty} py(p)$$

Апарат модифікованого  $z$ -перетворення дозволяє визначати значення вихідного сигналу безперервної ланки у проміжках між моментами подачі імпульсного сигналу на вході. Відповідні дискретні значення функції часу можуть бути отримані за формулою зворотного  $z$ -перетворення або шляхом розкладання в ряд Лорана, тобто діленням чисельника  $y(z,q)$  на його знаменник, причому коефіцієнти при  $i$  т.д. дають відповідні дискретні значення сигналу в моменти часу  $t=qT, (1+q)T, (2+q)T$  і т.д.

**Приклад 1.9.** На рис.1.7. наведена структурна схема дискретної системи, що складається з імпульсного елемента (ІЕ) і об'єкта керування, передаточна функція якого

$$W(p) = \frac{y_{вих}(p)}{u_{ок}(p)} = \frac{1}{T_o p + 1}$$

де  $T_o$  - стала часу об'єкта керування.

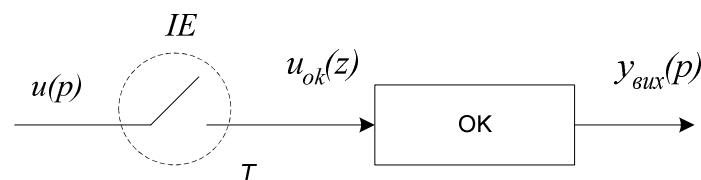


Рис. 1.7. Структурна схема дискретної системи

Період дискретності вихідного сигналу ІЕ дорівнює  $T$ . Використовуючи модифіковане  $z$ -перетворення, визначити, як змінюватиметься вихідна змінна ОК, якщо в момент часу  $t = 0$  на вхід ІЕ прикладено такий вплив:

$$u_{OK} = u l(t); T_o = 10 T; u = const.$$

**Розв'язок.** Для розв'язку цієї задачі треба знайти  $z$ -перетворення для вихідного сигналу (впливу) і передаточної функції ОК.  $z$ -перетворення вхідного сигналу ОК:

$$u_{ok}(z) = u \frac{z}{z-1}$$

Для того, щоб отримати  $z$ -перетворення передаточної функції ОК, трансформуємо заданий вираз так :

$$W(p) = \frac{1}{T_o(p+1/T_o)} = a \frac{1}{p+a}$$

де  $a = 1 / T_o$

Для того, щоб дослідити зміну вихідного сигналу ОК у будь-які моменти часу, скористаємося модифікованим  $z$ -перетворенням передаточної функції:

$$W(z, q) = a \frac{z d^q}{z-d}$$

де  $d = \exp(-T/T_o)$ .

Значення вихідної змінної ОК:

$$y(z, q) = W(z, q) u_{ok}(z) = \frac{a d^q z}{z-d} u \frac{z}{z-1}$$

Розкладемо  $y(z, q)$  в ряд Лорана. Дістанемо:

$$y(z, q) = \frac{u}{T_o} \cdot \frac{z^2 \exp(-0.1q)}{(z-1)(z-0.91)} =$$

$$= \frac{u}{T_o} [1 + 1.91z^{-1} + 2.74z^{-2} + 3.49z^{-3} + 4.17z^{-4} + \dots] \exp(-0.1q)$$

Нехай  $q = 0$ , тоді

$$y_0(z) = \frac{u}{T_o} [1 + 1.91z^{-1} + 2.74z^{-2} + 3.49z^{-3} + \dots]$$

Для  $q = 0,5$

$$y(z, q) = \frac{u}{T_o} [1 + 1.91z^{-1} + 2.74z^{-2} + 3.49z^{-3} + \dots] \cdot 0.95$$

Для  $q = 0,9$

$$y(z, q) = y_0(z) \cdot 0.91$$

Використовуючи вираз для  $y(z, q)$ , складемо таблицю значень вихідної змінної.

Таблиця 1.1

$y/(u/T_o)$	1,0	0,95	0,91	1,91	1,81	1,74	2,74	2,60	2,50	3,49
t	0	0,5T	0,9T	T	1,5T	1,9T	2,0T	2,5T	2,9T	3,0T

За даними цієї таблиці на рис. 1.8 побудований графік вихідної змінної  $y/(u/T_o)$  (графік 3) при поданні на імпульсний елемент ступінчастої функції (графік 1), а отже, на об'єкт керування послідовності імпульсів (графік 2).

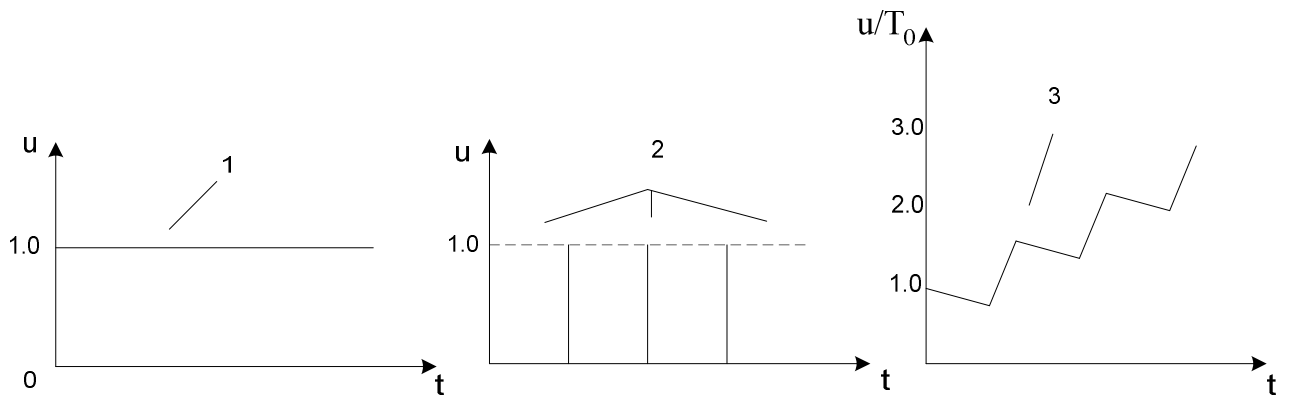


Рис. 1.8. Графік вихідної; змінної (графік 3) при поданні на вхід цифрової системи одиничної ступінчастої функції (графік 1), а отже, послідовності імпульсів: (графік 2) на об'єкт керування

## 1.2. Аналіз дискретної системи керування з мікро- і міні-ЕОМ

### 1.2.1. Передаточна функція

При дослідженні систем керування хіміко-технологічними процесами застосовуються їх передаточні функції. Тому отримаємо загальний вираз для визначення передаточної функції окремого контуру системи автоматичного керування. Для цього скористаємося структурною схемою, наведеною на рис. 1.9, де  $y_1, \dots, y_n$  - керовані змінні ;  $u_1, \dots, u_n$  - керуючі впливи ;  $f_1, \dots, f_n$  - зовнішні збурення ;  $g_1, \dots, g_n$  - сигнали завдання

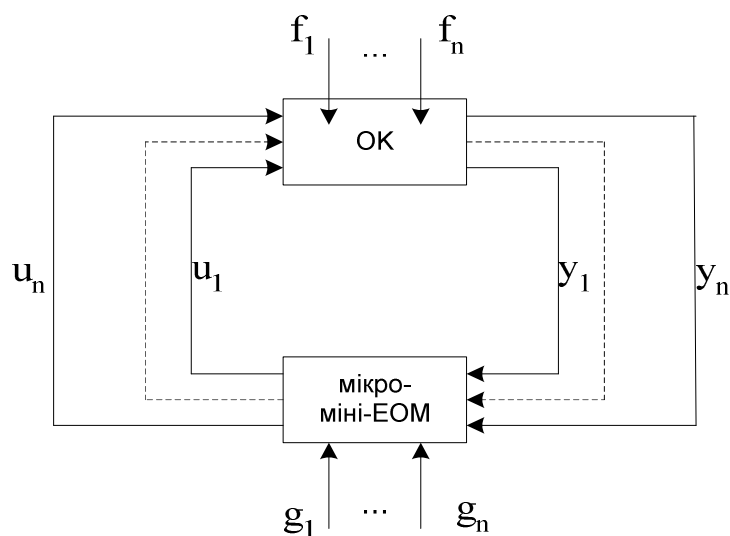


Рис. 1.9. Структурна схема системи керування з мікро-і міні-ЕОМ

Як правило на одну ММЕОМ замикається декілька контурів керування. Оскільки аналіз такої системи є надто громіздким, обмежимося контуром керування безперервним об'єктом керування (ОК). В багатьох

практичних випадках дослідження обчислювальної системи може бути зведено до розгляду таких поодиноких контурів.

Треба зазначити, що зараз існують методики аналізу лише багатоконтурних систем керування, в той час, як методи розрахунку багатозв'язаних систем керування практично відсутні. Далі будуть наведені окремі випадки розв'язку такої задачі.

Будемо вважати, що окремий контур керування складається з безперервної і дискретної частин. Дискретним нелінійним елементом (ланкою) є ММЕОМ. Вона складається з трьох частин (рис. 1.10): вхідного блока (ВхБ), центрального процесорного блока (ЦПБ) і вихідного блока (ВихБ) [7].



Рис. 1.10. Склад ММЕОМ

Вхідний блок виконує квантування, сигналів за часом та рівнем. Першою ланкою цього блока є імпульсний елемент ІЕ1, що здійснює перетворення безперервної вхідної змінної на дискретні імпульси. Другою ланкою є кодуєчий елемент КЕ, що перетворює імпульси на код шляхом їх квантування за рівнем.

Центральний процесорний блок можна подати як дискретний елемент (фільтр) ДФ, що перетворює згідно з прийнятим алгоритмом один дискретний сигнал на інший, причому ці сигнали подаються у двійковому коді.

Блок ВихБ складається з нелінійного елемента НЕ, що перетворює код на послідовність імпульсів, імпульсного елемента ІЕ2, який розподіляє

канали керування в часі, і екстраполятора  $E$ , що генерує безперервну ступінчасту функцію.

У більшості випадків як екстраполятор використовується фіксуючий пристрій (екстраполятор нульового порядку), призначений для запам'ятовування вихідних сигналів протягом інтервалів між їх надходженнями (на період дискретності).

Отже, структурну схему ММЕОМ можна подати так, як наведено на рис. 1.11.

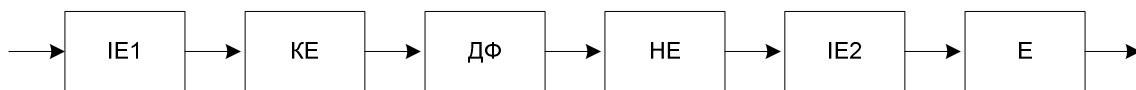


Рис. 1.11. Структурна схема ММЕОМ

Нелінійність ЕОМ обумовлена квантуванням сигналів за рівнем елементами  $KE$  і  $HE$ . Однак застосування цифрової системи справджується лише тоді, коли потрібна висока точність обробки інформації, тому величина кроку квантування за рівнем обирається достатньо малою, чого досягають збільшенням кількості розрядів перетворювачів  $KE$  і  $HE$ . За цих умов при дослідженні динаміки роботи системи у першому наближенні можна не враховувати квантування за рівнем, тобто знехтувати елементи  $KE$  і  $HE$ . Тоді система стає лінійною, і для її аналізу можна застосовувати апарат, розроблений для імпульсних систем [1, 2, 4-6, 8, 10, 13].

Вважатимемо, що елементи  $IE1$  і  $IE2$  працюють синхронно і синфазно [9]. Тоді спрощена структура ММЕОМ матиме вигляд, поданий на рис.1.12.

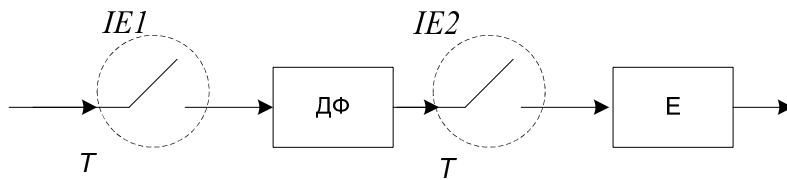


Рис. 1.12. Спрощена структура ММЕОМ

Для того, щоб отримати загальний вираз передаточної функції, розглянемо розімкнений контур керування, функціональна схема якого наведена на рис. 1.13.

$D(z)$  - передаточна функція дискретного фільтра ДФ;  $W_E(p)$ - передаточна функція екстраполятора Е;  $W_o(p)$  -передаточна функція безперервної частини (виконавчий пристрій і об'єкт керування).

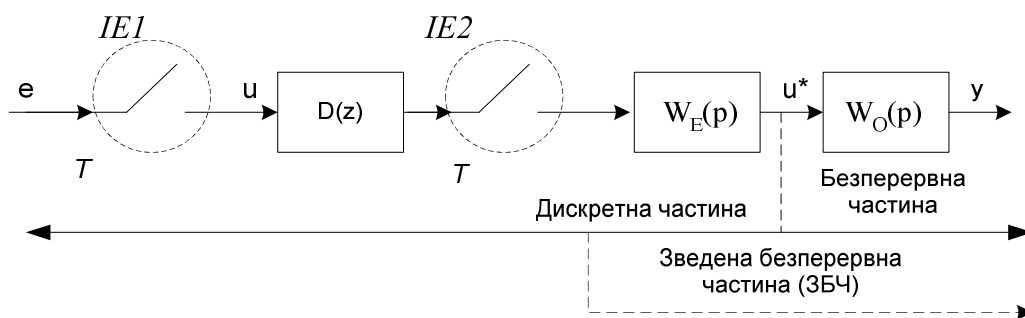


Рис. 1.13. Розімкнений контур керування

Імпульсні елементи і ДФ є дискретною частиною системи, а екстраполятор і безперервна частина системи, утворюють зведену безперервну частину (ЗБЧ). Безперервна частина, на вхід якої подається ступінчаста функція  $u^*$ , називається фільтром із запам'ятовуванням або фільтром з фіксацією .



Поведінка одного контуру цифрової системи в розімкненому стані відповідно до виразу (1.29) характеризуватиметься дискретною передаточною функцією:

$$W(z) = \frac{y(z)}{e(z)} = D(z)W_{збч}(z) \quad (1.39)$$

де  $e(z) = g(z) - y(z)$ .

У загальному випадку вихідний сигнал ДФ у моменти часу  $t = nT$ , де  $n = 0, 1, 2, \dots$  визначається значенням вхідного сигналу  $e_n$  у той же момент часу і значеннями вхідних  $e_{n-m}$  і вихідних  $u_{n-l}$  сигналів у попередні моменти часу, тобто

$$u_n = f(e_n, e_{n-1}, \dots, e_{n-m}, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-l})$$

Якщо ДФ є лінійним, а  $m = l$ , то згідно з (1.33) можна записати:

$$u_n = a_0 e_n + a_1 e_{n-1} + \dots + a_m e_{n-m} - b_1 u_{n-1} - \dots - b_l u_{n-l}$$

Від різницевого рівняння за допомогою відомих методів можна перейти до дискретної передаточної функції:

$$D(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_l z^{-l}}$$

Таке подання ЦПБ припустиме, якщо в алгоритмі керування відсутні логічні оператори.

Як видно з рис. 1.13, передаточна функція зведеної безперервної частини системи:

$$W_{збч}(p) = W_E(p)W_o(p) \quad (1.40)$$

Передаточна функція ідеального екстраполятора нульового порядку може бути отримана шляхом аналізу вхідного  $u$  і вихідного  $u^*$  сигналів (рис. 1.14, а, б).

Вхідним сигналом  $u$  екстраполятора є дискретна функція,  $z$ -перетворення якої має вигляд:

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)z^{-n}$$

Після переходу до дискретного перетворення Лапласа дістанемо:

$$u(p) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) \exp(-pnT) \quad (1.41)$$

Кожний вихідний  $u_i$  імпульс екстраполятора може бути створений з двох зсунутих в часі різнополярних імпульсів (рис. 1.14, в). Тоді зображення Лапласа окремого вихідного імпульсу  $u_i$  матиме вигляд:

$$u_i(p) = \frac{1}{p} u(iT) - \frac{1}{p} u(iT) \exp(-pT)$$

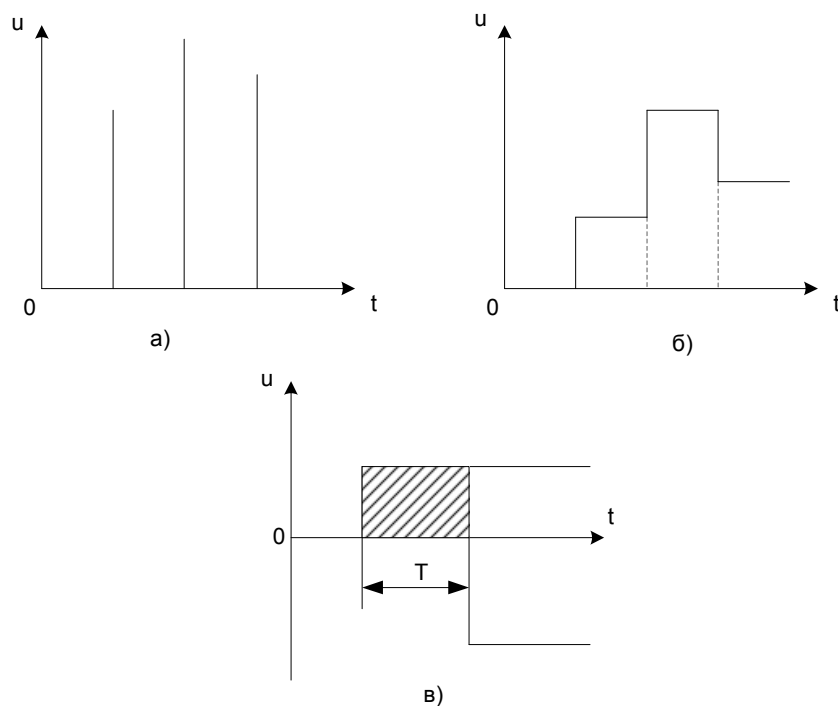


Рис. 1.14. Вхідний (а) і вихідний (б) сигнали екстраполятора нульового порядку; формування прямокутного імпульсу (в)

Перетворення Лапласа вихідної функції дорівнює сумі імпульсів, що діють на виході екстраполятора:

$$\begin{aligned}
 u^*(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{u(nT)}{p} - \frac{u(nT)}{p} \exp(-pT) \right] \exp(-pnT) = \\
 &= \frac{1 - \exp(-pT)}{p} \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) \exp(-pnT)
 \end{aligned}$$

Тоді передаточна функція екстраполятора матиме вигляд:

$$W_E(p) = \frac{u^*(p)}{u(p)} = \frac{1 - e^{-pT}}{p} = \frac{e^{pT} - 1}{e^{pT}} \cdot \frac{1}{p} \quad (1.42)$$

Використавши вираз (1.40) і перейшовши до z-перетворення після підстановки у (1.42)  $W_E(p)$ , дістанемо:

$$W_{зБЧ}(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_o(p)}{p} \right\} \quad (1.43)$$

Підставивши вираз (1.43) у вираз (1.39), дістанемо дискретну передаточну функцію окремого розімкненого контуру керування:

$$W(z) = D(z) \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_o(p)}{p} \right\}$$

Отже, визначення дискретної передаточної функції окремого контуру керування  $W(z)$  зводиться до пошуку передаточної функції  $W_o(p)$

розімкненої безперервної частини системи, переходу до її z-перетворення і множення його на  $(z - 1)/z$  і  $D(Z)$ .

**Приклад 1.10.** Визначити дискретну передаточну функцію системи, якщо передаточна функція дискретного фільтра  $D(z)=1$ , а передаточна функція безперервної частини системи:

$$W_o(p) = \frac{k_o}{p(T_{o1}p + 1)(T_{o2}p + 1)}$$

**Розв'язок.** Розкладемо передаточну функцію безперервної частини системи на прості дроби згідно з виразом

$$W_o(p) = \frac{k_o}{p} + k_o \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{p + a_i} = \frac{k_o}{p} + k_o \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{T_i p + 1}$$

де  $R_i = N_i \cdot T_i$ ;  $a_i = 1 / T_i$  - коефіцієнти розкладання .

Тоді

$$W_o(p) = \frac{k_o}{p} + k_o \sum_{i=1}^2 \frac{k_i}{T_i p + 1}$$

Відомо, що

$$\frac{R_i}{T_i p + 1} = \frac{F_i(p_i)}{F_2(p_i)} \cdot \frac{1}{p - p_i}$$

Для випадку, що розглядається,

$$p_1 = -1/T_{o1}; \quad p_2 = -1/T_{o2}$$

Визначимо значення функцій  $F_1(p_i)$  і  $F_2(p_i)$  так :

$$\frac{k_o}{p} + \frac{A}{(T_{o1}p + 1)(T_{o2}p + 1)} = \frac{k_o}{p(T_{o1}p + 1)(T_{o2} + 1)}$$

або

$$k_o(T_{o1}p + 1)(T_{o2}p + 1) + pA = k_o$$

$$A = -k_o(T_{o1} + T_{o2}) - k_oT_{o1}T_{o2}p$$

Тоді

$$W_o(p) = \frac{k_o}{p} - k_o \frac{(T_{o1} + T_{o2}) + T_{o1}T_{o2}p}{(T_{o1}p + 1)(T_{o2}p + 1)}$$

звідки випливає, що

$$F_1(p_i) = T_{o1} + T_{o2} + T_{o1}T_{o2}p$$

$$F_2(p_i) = (T_{o1} + T_{o2})p + T_{o1}T_{o2}p^2 + 1$$

$$F_2(p_i) = T_{o1} + T_{o2} + 2T_{o1}T_{o2}p$$

Остаточний вигляд передаточної функції, розкладеної на прості дроби, буде такий:

$$W_o(p) = \frac{k_o}{p} - k_o \left[ \frac{T_{o1}}{(T_{o1} - T_{o2})} \frac{T_{o1}}{(T_{o1}p + 1)} + \frac{T_{o2}}{(T_{o2} - T_{o1})} \frac{T_{o2}}{(T_{o2}p + 1)} \right]$$

За допомогою таблиці z-перетворення (див. табл. Д1) дістанемо передаточну функцію розімкненої системи:

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_o}{p^2} - k_o \left[ \frac{T_{o1}^2}{(T_{o1} - T_{o2})} \frac{1}{p(T_{o1}p + 1)} + \frac{T_{o2}^2}{(T_{o2} - T_{o1})} \frac{1}{p(T_{o2}p + 1)} \right] \right\} =$$

$$= \frac{k_o T}{z-1} - \frac{k_o T_{o1}^2 (1-d_1)}{(T_{o1} - T_{o2})(z-d_1)} - \frac{k_o T_{o2}^2 (1-d_2)}{(T_{o2} - T_{o1})(z-d_2)}$$

де  $d_1 = \exp(-T/T_{o1})$ ;  $d_2 = \exp(-T/T_{o2})$

### 1.2.2. Критерій стійкості

Відомо, що дискретна передаточна функція замкненої системи для каналу завдання - вихід:

$$\Phi(z) = \frac{y(z)}{g(z)} = \frac{W(z)}{W(z) + 1}$$

Стійкість лінійної системи буде забезпечена, якщо усі корені характеристичного рівняння  $1+W(p)=0$  лежатимуть на лівій півплощині площини коренів. Тобто для безперервних систем умовою стійкості є  $Re(p_i) < 0$ , а межа стійкості збігається з уявною віссю площини  $p$ . Знайдемо відображення уявної осі площини  $p$  на площині  $z$ . Для системи, що знаходиться на межі стійкості,  $p = j\omega$ . Отже, можна записати, що  $z = \exp(pT) = \exp(j\omega T)$ . Скориставшись формулою Ейлера, дістанемо:

$$z = \cos \omega T + j \sin \omega T$$

звідки випливає, що при зміні  $\omega$  від  $-\infty$  до  $+\infty$   $z$  прийматиме значення від  $(1, j)$  до  $(-1, -j)$ .

Межа стійкості на площині  $z$  відображується в коло одиничного радіуса (рис. 1.15), а область стійкості знаходиться всередині цього кола. Отже для стійких дискретних систем корені характеристичного рівняння  $(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m)=0$  повинні задовольняти умову

$$|z_i| < 1, i=1, 2, \dots, m$$

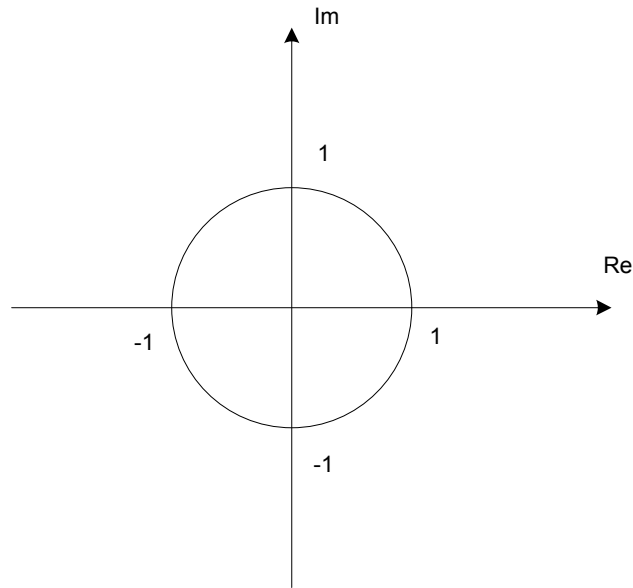


Рис. 1.13. Уявна вісь площини  $p$  на площині  $Z$

Приклад 1.11. Дискретна передаточна функція зведеної безперервної частини

$$W_{ЗБЧ}(z) = \frac{k_o T (1-d) z}{(z-1)(z-d)}$$

де  $d = \exp(-T/T_o)$ .

Передаточна функція дискретного фільтра  $D(z) = k_c z^{-1}$ .

Визначити, чи є стійкою система, якщо  $k_o = 10c^{-1}$ ,  $k_c = 1$ ,

$$T = 0.05c, T_o = 0.2c$$

**Розв'язок.** Визначимо дискретну передаточну функцію розімкненої системи:

$$W(z) = D(z)W_{ЗБЧ}(z) = \frac{k_o T z (1-d)}{(z-1)(z-d)} \cdot \frac{k_c}{z} = \frac{k_o k_c T (1-d)}{(z-1)(z-d)}$$

Тоді характеристичне рівняння матиме вигляд:

$$z^2 - 1.78z + 0.89 = 0$$

а його корені

$$z_{1,2} = 0.89 \pm j0.32; |z| = \sqrt{0.79 + 0.1} = 0.94 < 1$$

отже система є стійкою.

Якщо коефіцієнт підсилення  $k_c$  збільшити удвічі, то за інших рівних умов система опиниться на межі стійкості.

При аналізі перехідних процесів у цифровій системі керування безперервним об'єктом за допомогою методу z-перетворення перехідна функція не дає повної інформації про поведінку керованої змінної у проміжках між дискретними моментами часу, кратними  $T$ .

Перехідний процес для всіх компонентів часу можна побудувати, скориставшись методом модифікованого z-перетворення.

Розглянемо дискретну систему керування, структурна схема якої наведена на рис. 1.16, де  $g$  – сигнал завдання (уставка);  $e$  – сигнал розузгодження (похибка);  $u^*$  – керуючий вплив, що формує керуюча обчислювальна машина (КОМ);  $u$  – керуючий вплив, що формує екстраполятор нульового порядку;  $D(z)$  – дискретна передаточна функція регулятора, що реалізується ММЕОМ;  $W_E(p)$  – передаточна функція екстраполятора нульового порядку;  $W_O(p)$  – передаточна функція безперервної частини системи (ОК і виконавчий механізм).

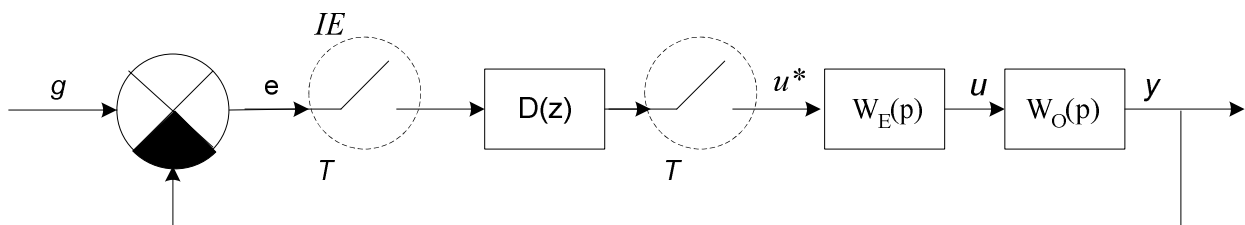


Рис. 1.16. Структурна схема дискретної системи керування



Відомо, що дискретна передаточна функція замкненої системи по каналу похибки при одиничному зворотному зв'язку

$$\Phi_E(z) = \frac{e(z)}{g(z)} = \frac{1}{1 + D(z) \cdot W_{збч}(z)}, \quad (1.44)$$

де

$$W_{збч}(z) = Z\{W_{збч}(p)\} = Z\{W_E(p)W_O(p)\}$$

Аналіз наведеної на рис. 1.16 структурної схеми показує, що модифіковане  $Z$  - перетворення вихідної змінної

$$y(z, q) = u^*(z)W_{збч}(z, q), \quad (1.45)$$

де  $W_{збч}(z, q)$  - модифіковане  $z$ -перетворення передаточної функції зведеної безперервної частини системи  $W_{збч}(p)$ .

Оскільки,  $u^*(z) = D(z)e(z)$ , а  $e(z) = \Phi_E(z)g(z)$ , тобто  $u^*(z) = D(z)\Phi_E(z)g(z)$ , то

після підстановки наведених виразів у (1.45) матимемо:

$$y(z, q) = \frac{D(z)W_{збч}(z, q)}{1 + D(z) \cdot W_{збч}(z, q)}. \quad (1.46)$$

**Приклад 1.12.** Передаточна функція безперервної частини цифрової системи (рис. 1.16) має вигляд:

$$W_O(p) = \frac{k_O}{T_O p + 1},$$

а передаточна функція дискретного фільтра:

$$D(z) = k_p.$$

Записати різницеве рівняння  $y(n, q) = f[g(n)]$ , що дозволить визначити значення вихідної змінної у будь-який момент часу.

**Розв'язок.** Для розв'язку цієї задачі використаємо модифіковане  $z$ -перетворення від  $W_{збч}(p)$ .

$$W_{3БЧ}(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{W_o(p)}{p}\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{k_o}{(T_o p + 1)p}\right\} = \frac{k_o(1-d)}{z-d},$$

де  $d = \exp(-T/T_o)$ .

$$W_{3БЧ}(z, q) = \frac{z-1}{z} Z\left(\frac{k_o z}{z-1} - \frac{k_o d^q z}{z-d}\right) = \frac{k_o(1-d^q)z - k_o(d-d^q)}{z-d}.$$

Підставляючи  $D(z)$  і  $W_{3БЧ}(z, q)$  у (1.46), матимемо:

$$y(z, q) = \frac{k_o k_p (1-d^q)z - k_o k_p (d-d^q)}{(z-d) \left[1 + \frac{k_o k_p (1-d^q)}{z-d}\right]} g(z) = \frac{k(1-d^q) - k(d-d^q)z^{-1}}{1 - [d - k(1-d)]z^{-1}} g(z),$$

де  $k = k_o k_p$ .

Скориставшись теоремою запізнювання, запишемо шукане різницеве рівняння :

$$y(n, q) = k(1-d^q)g(n) - k(d-d^q)g(n-1) + [d - k(1-d)]y((n-1)q)$$

### 1.2.3. Дослідження дискретних систем

Дослідження систем з КОМ виконується на основі методики аналізу безперервних систем за умови використання  $w$ -перетворення, що реалізується підстановкою такого вигляду:

$$z = \frac{1+w}{1-w} \Rightarrow w = \frac{z-1}{z+1}.$$

Замінивши в останньому виразі  $z$  на  $\exp(j\omega T)$ , матимемо:

$$w = \frac{\exp(j\omega T) - 1}{\exp(j\omega T) + 1} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j\nu,$$

де  $\nu$  - відносна псевдочастота.

При зміні частоти  $\omega$  від  $-\pi/4$  до  $\pi/4$  відносна псевдочастота змінюється від  $-\infty$  до  $+\infty$ , а комплексна змінна  $w$  змінюється від  $-j\infty$  до  $+j\infty$ . Область стійкості у цьому випадку виявляється зліва від уявної осі.

Тому для передаточної функції з  $w$ -перетворенням можуть використовуватись звичайні критерії оцінки якості, справедливі для безперервних систем.

При аналізі дискретних систем користуються також **абсолютною псевдочастотою** :

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = \frac{2\nu}{T}.$$

Застосування такого виразу для абсолютної псевдочастоти пояснюється тим, що при малих значеннях частоти  $\omega$ , коли  $\omega T < 2$ , відносна псевдочастота

$$\nu = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega T}{2}.$$

Отже,

$$\lambda = \frac{2\nu}{T} \approx \frac{2\omega T}{T} \approx \omega.$$

Використання  $w$ -перетворення і псевдо частоти  $\lambda$  дозволяє привести передаточну функцію до вигляду, зручного для застосування методу логарифмічних частотних характеристик.

### 1.3. Синтез систем керування з мікро- та міні-ЕОМ

Синтез дискретних систем керування хіміко-технологічними процесами пов'язаний з визначенням передаточної функції  $D(z)$  дискретного фільтра, якщо КОМ вмикається безпосередньо у контур керування лінійним або лінеаризованим ОК, або з пошуком закону формування впливів, що прикладаються до органів настроювання первинних керуючих пристроїв.

КОМ мають великі можливості реалізації різних дискретних передаточних функцій  $D(z)$ . Розглянемо деякі класичні методи синтезу систем керування.

### 1.3.1. Метод логарифмічних амплітудних характеристик як функцій псевдочастоти

Нехай бажана дискретна передаточна функція розімкненої системи

$$W_B(z) = \frac{\Phi_B(z)}{1 - \Phi_B(z)} = D(z)W_{збч}(z), \quad (1.57)$$

де  $\Phi_B(z)$  - бажана дискретна передаточна функція замкненої системи.

З виразу (1.57) легко визначити передаточну функцію дискретного фільтра

$$D(z) = \frac{W_B(z)}{W_{збч}(z)} = \frac{\Phi_B(z)}{(1 - \Phi_B(z))W_{збч}(z)}. \quad (1.58)$$

Визначення  $D(z)$  полягає в тому, щоб від побудованої бажаної логарифмічної амплітудної характеристики  $W_B(\lambda)$  перейти до  $W_B(w)$ . Потім треба зробити перехід до  $z$ -перетворення шляхом підстановки  $z = (1+w)/(1-w)$ , після чого знайти бажану дискретну передаточну функцію  $WB(z)$ , а, маючи її, дістати

$$D(z) = \frac{W_B(z)}{W_{збч}(z)}.$$

Наприкінці розрахунків здійснюється перехід до різницевого рівняння.

**Приклад 1.14.** Визначити передаточну функцію ДФ  $D(z)$ , записати різницеве рівняння  $u(n) = f[e(n)]$  для окремого контуру керування дискретної слідкуючої системи стеження з КОМ, якщо відомі:

1) бажана передаточна функція розімкненої системи, що забезпечує максимальну вхідну швидкість і прискорення, припустиму похибку та припустимий показник коливності системи і має вигляд :

$$W_B(\lambda) = \frac{k(1 + j\lambda\tau_2)\left(1 - j\lambda\frac{T}{2}\right)}{j\lambda(1 + j\lambda\tau_1)},$$

де  $k = 420 \text{ c}^{-1}$ ;  $\tau_1 = 2 \text{ c}$ ;  $\tau_2 = 0.112 \text{ c}$ ;  $T = 0.01 \text{ c}$ ;

2) передаточна функція безперервної частини

$$W_O(p) = k/p.$$

**Розв'язок.** Оскільки  $w = j\lambda T/2$ , то

$$W_B(w) = \frac{k\left(1 + w\frac{2\tau_2}{T}\right)(1 - w)}{w\frac{2}{T}\left(1 + w\frac{2\tau_1}{T}\right)}.$$

Оскільки  $w = (z-1)/(z+1)$ , то після підстановки цього виразу у передаточну функцію  $W_B(w)$  дістанемо :

$$W_B(z) = \frac{kT\left[z + 1 + (z-1)\frac{2\tau_2}{T}\right]}{(z-1)\left[z + 1 + (z-1)\frac{2\tau_1}{T}\right]}.$$

Дискретна передаточна функція безперервної частини

$$W_O(z) = \frac{z-1}{kT}.$$

Після підстановки  $W_B(z)$  і  $W_O(z)$  у (1.58) дістанемо :

$$D(z) = \frac{23,4 - 21,4z^{-1}}{401 - 399z^{-1}}$$

Отже, різницеве рівняння матиме такий вигляд;

$$u(n) = 0.06e(n) - 0.053e(n-1) + 0.995u(n-1).$$

### 1.3.2. Застосування нелінійних законів керування

При синтезі цифрових систем керування доцільно розв'язувати задачу пошуку такого закону керування, який забезпечував би достатньо широку область стійкості поблизу "робочої точки", що відповідає найбільш продуктивному режиму об'єкта керування при впливі на нього значних за величиною збурень. Ця задача розв'язується за допомогою **нелінійних законів** керування, що потім реалізуються на керуючій обчислювальній машині (КОМ). До нелінійного закону керування входять оператори, які плавно або у вигляді ступінчастої функції змінюють коефіцієнти складових закону, тобто змінюють структуру закону керування.

**Приклад 1.15.** Безперервна частина системи складається з об'єкта керування і виконавчого механізму, передаточні функції яких такі:

$$W_1(p) = 1/T_1 p \quad \text{і} \quad W_2(p) = 1/T_2 p,$$

де  $T_1$  і  $T_2$  - сталі часу об'єкта керування і виконавчого механізму відповідно.

Застосовуючи фазові площини, треба визначити нелінійний закон керування, що забезпечував би найпростішу реалізацію керування об'єктом на КОМ.

**Розв'язок.** Структурна схема системи керування подана на рис. 1.23.

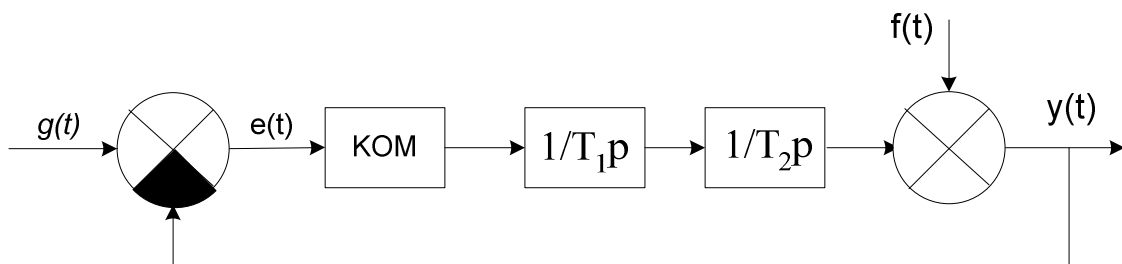


Рис. 1.23. Структурна схема системи керування з КОМ

Припустимо, що зовнішнє збурення  $f(t)$  і сигнал завдання  $g(t)$  стали або дорівнюють нулю. Оскільки рівняння, що описують поведінку безперервної частини, складаються у відхиленнях, тоді для розглядуваного випадку  $f=g=0$ . Отже,  $g = -y$ , а зображення вихідної змінної

$$y(p) = \frac{1}{T_1 T_2 p} u(p).$$

Тоді передаточна функція безперервної частини

$$W_o(p) = k/p^2,$$

де  $k = 1/T_1 T_2$ .

Рівняння руху системи відносно сигналу похибки матиме вигляд:

$$p^2 e = -u/(T_1 T_2) \text{ або } p^2 e + ku = 0, \text{ де } k > 0.$$

Позначимо  $e = e_1$ ,  $de_1/dt = e_2$ . Тоді замість рівняння руху системи дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = e_2, \\ \frac{de_2}{dt} = -ku. \end{cases}$$

Відповідно до рекомендацій теорії автоматичного керування лінійний закон керування повинен мати вигляд [1]:

$$u(p) = \alpha(p)e(p),$$

де  $\alpha(p)$  - поліном першого степеня від  $p$  для даного контуру керування.

При реалізації цього закону керування виникають труднощі, пов'язані з формуванням, наприклад, точного значення похідних. Однак відносно просто можна визначити знак похідної від сигналу похибки  $\Delta e$  і виділити його. Виконання цих операцій потребує меншого часу і не пов'язане із завантаженням каналу керування.

Тому спробуємо реалізувати закон керування у вигляді

$$u = \alpha_e e_1; \alpha_e = \begin{cases} \alpha_{e1} = const > 0, \\ \alpha_{e2} = const > 0 \end{cases}$$

за умови, що відомий  $\text{sign } e_2$ .

Вважатимемо також, що  $\alpha_{e1} > \alpha_{e2}$ . Очевидно, що при будь-яких  $\alpha_e > 0$  система знаходиться на межі стійкості, оскільки її характеристичне рівняння

$$p^2 + k\alpha_e = 0 \text{ має уявні корені } p_{1,2} = \pm \sqrt{k\alpha_e}.$$

Якщо  $\alpha_e < 0$ , то система нестійка, тому що один корінь характеристичного рівняння - додатний.

Побудуємо фазові портрети для кожної зі структур (при різних  $\alpha_e$ ). Поділимо перше рівняння системи (1.60) на друге. Дістанемо :

$$\frac{de_1}{de_2} = -\frac{e_2}{ku} = -\frac{e_2}{k\alpha_{e_i} e_1}, j=1,2.$$

Поділимо змінні

$$-k\alpha_{e_i} e_1 de_1 = e_2 de_2$$

і проінтегруємо останній вираз. Тоді

$$\frac{\frac{e_1^2}{2}}{k\alpha_{e_i}} + \frac{e_2^2}{2} = C_0 \Rightarrow \frac{e_1^2}{2C_0} + \frac{e_2^2}{2C_0} = 1,$$

де  $C_0$  – стала інтегрування.

Останнє рівняння є рівнянням еліпса. При різних значеннях  $C_0$  можна побудувати нескінченну множину еліпсів.

Якщо  $k\alpha_{e_1} > 1$ , а  $k\alpha_{e_2} < 1$ , то фазові портрети кожної зі структур матимуть вигляд, показаний на рис. 1.24.



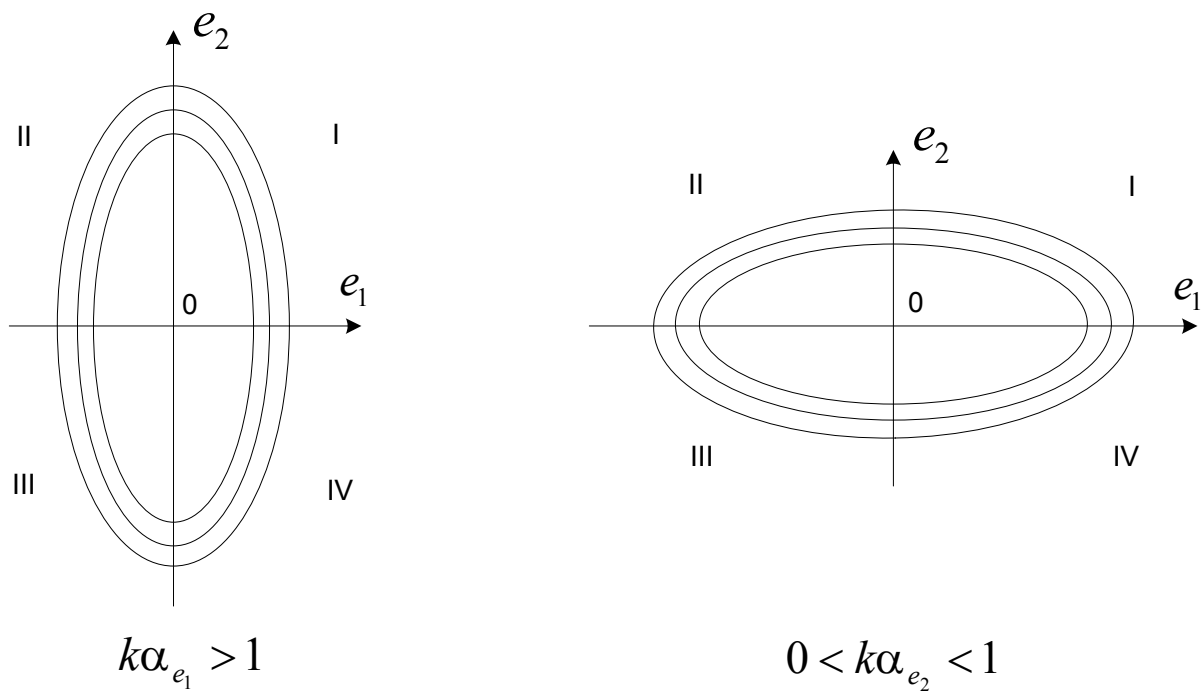


Рис. 1.24. Фазові портрети системи

З аналізу рисунків випливає, що кожна зі структур окремо є нестійкою. Якщо реалізувати керування так, що в першому і третьому квадрантах фазової площини матимуть місце траєкторії, які відповідають першій структурі ( $k\alpha_{e_1} > 1$ ) в другому і четвертому - другій, тоді зображуюча точка, рухаючись з будь-якого початкового положення (наприклад, з точки А, рис. 1.25) по ділянках нестійких траєкторій, буде асимптотично наближатись до початку координат.

Як результат дістанемо бажаний портрет системи, що має дві різні структури (рис.1.25).

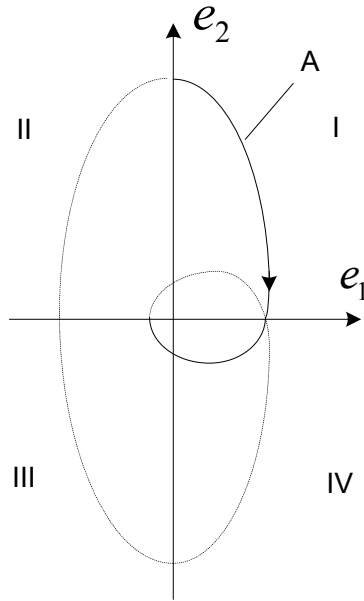


Рис. 1.25. Бажаний фазовий портрет системи

На основі фазового портрета можна остаточно сформулювати закон керування. Дійсно, якщо добуток похідних  $e_1 e_2 > 0$  (перший і третій квадранти), то повинна реалізуватися перша структура, тобто

$$u_1 = \alpha_{e_1} e_1.$$

Якщо ж  $e_1 e_2 < 0$  - друга структура, тобто

$$u_2 = \alpha_{e_2} e_2.$$

Отже, можна записати закон керування так:

$$u = \begin{cases} \alpha_{e_1} e_1, & e_1 e_2 > 0 \\ \alpha_{e_2} e_2, & e_1 e_2 < 0 \end{cases}$$

Останній вираз може бути поданий у дискретній формі:

$$u = \begin{cases} \alpha_{e_1} e_1(n), & z(n) > 0 \\ \alpha_{e_2} e_2(n), & z(n) < 0 \end{cases}$$

де  $z(n) = \text{sign}_{e_1}(n) \text{sign}_{e_2}(n)$ .

Такий закон дуже зручно реалізовувати на КОМ, оскільки машина може виконувати логічні операції, необхідні для визначення  $\text{sign}1$ , і  $\text{sign}2$ , а також для зміни структури закону керування.

Отже, задача синтезу окремого контуру керування цифрової системи керування при застосуванні нелінійного закону керування полягає у виборі операторів усіх ланок і логічних законів, відповідно до яких змінюється структура закону керування. Характер логічних законів може бути визначений для лінійних або лінеаризованих ОК і виконавчих механізмів, шляхом створення фазових траєкторій, їх "зшивання" і визначення ліній перемикавання.

### 1.3.3. Застосування показника коливності

Синтез цифрової системи керування на основі застосування показника коливності проілюструємо на прикладі.

**Приклад 1.16.** Визначити передаточну функцію дискретного фільтра  $D(z)$ , різницеве рівняння і період дискретності системи  $T$ , у якої показник коливності  $M \leq 1.2$ . Передаточні функції ОК і ВМ мають відповідно такий вигляд:

$$W_1(p) = 1/T_1 p; \quad W_2(p) = 1/T_2 p,$$

де  $T_1$  і  $T_2$  - сталі часу ОК і ВМ відповідно.

**Розв'язок.** Дискретна частотна передаточна функція зведеної безперервної частини вихідної системи

$$W_{звч}(j\lambda) = \frac{k(1 - j(T/2))}{(j\lambda)^2},$$

де  $k = 1/T_1 T_2$

Бажану передаточну функцію системи запишемо у вигляді:

$$W_B(j\lambda) = \frac{k(1 + j\lambda\tau)(1 - j(T/2)\lambda)}{(j\lambda)^2(1 + j(T/2)\lambda)},$$

де  $\tau$  - стала часу дискретного фільтра.

Параметри  $\tau$  і  $T$  визначимо, виходячи із забезпечення необхідної коливності  $M$ .

Відомо [1], що

$$\tau \geq \frac{1}{\lambda_\sigma} \sqrt{\frac{M}{M-1}}, \text{ а } \lambda_\sigma = \sqrt{k} = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}},$$

де  $\lambda_\sigma$  - базова частота.

У цьому випадку період дискретності системи

$$T \leq \frac{1}{\lambda_\sigma} \frac{\sqrt{M(M-1)}}{M+1}.$$

Тоді

$$\tau \geq 2,45\sqrt{T_1 T_2}, \text{ а } T \leq 0,35\sqrt{T_1 T_2}.$$

Частотна передаточна функція дискретного фільтра, виходячи з (1.58)

$$D(j\lambda) = \frac{W_B(j\lambda)}{W_{ЗБЧ}(j\lambda)} = \frac{1 + j\lambda\tau}{1 + j\lambda \frac{T}{2}}$$

Застосовуючи в останньому виразі підстановку  $w = j\lambda T / 2$  і білінійну підстановку  $z = (1+w)/(1-w)$ , визначимо передаточну функцію дискретного фільтра:

$$D(z) = \frac{(1 + 2\tau/T)z + 1 - 2\tau/T}{2z} = \frac{15z - 13}{2z} = \frac{15 - 13z^{-1}}{2}.$$

Тоді різницеве рівняння матиме вигляд:

$$u(n) = 7.5e(n) - 6.5e(n-1).$$

### 1.3.4. Мінімізація тривалості перехідного процесу і похибки керування

При синтезі дискретної системи керування намагаються обирати такі її параметри, що забезпечували б оптимальне керування ОК.

Критерій оптимальності залежить від специфічних вимог, що визначаються особливостями застосовуваної системи. Досить часто, наприклад, постає задача мінімізації тривалості перехідного процесу й похибки в дискретні моменти часу при дії на вхід типового сигналу завдання (ступінчастий вплив, лінійно зростаючий сигнал і т. ін.), або мінімізації середньоквадратичної похибки протягом періоду дискретності системи.

Аналіз передаточної функції дискретної системи керування, реалізованої на мікро-ЕОМ, показав [10], що в контурі керування буде нульова усталена похибка і кінцевий час перехідного процесу при типовому впливі, якщо задовольняються такі умови:

1) для  $g(t) = g_0(t)$  або  $g(z) = g_0 \frac{z}{z-1}$ , бажана передаточна функція за сигналом похибки:

$$\Phi_{EB} = \frac{F(z)}{\frac{z}{z-1}} = F(z)(1-z^{-1}) \quad ; \quad (1.59)$$

2) для  $g(t) = kt$  або  $g(z) = k \frac{Tz}{(z-1)^2}$

$$\Phi_{EB} = \frac{F(z)}{\frac{z}{(z-1)^2}} = F(z)(1-z^{-1})^2 \quad (1.60)$$

і т.д.

Отже, в загальному випадку для  $g(z) = \frac{N_k(z)}{(1-z^{-1})^k}$ , де  $N_k(z)$  - поліном від  $z^{-1}$

бажана передаточна функція повинна мати вигляд:

$$\Phi_{EB}(z) = F(z)(1-z^{-1})^k, \quad (1.61)$$

де  $F(z)$  - раціональний поліном від  $z$ , який треба обрати.

Час перехідного процесу залежить від порядку передаточної функції  $\Phi_{EB}(z)$ . Очевидно, що передаточна функція  $\Phi_{EB}(z)$  буде мати мінімальний порядок, якщо  $F(z)$  буде дорівнювати одиниці або сталій. При цьому реакція системи керування на  $g(t)=1(t)$  і  $g(t)=t$  буде закінчуватися відповідно за один і два періоди дискретності системи  $T$ .

Треба зазначити, що вирази (1.59) - (1.61) можна застосовувати тільки тоді, коли безперервна частина системи не містить чистого запізнювання, а передаточна функція  $W_{ЗБЧ}(z)$  не має полюсів на колі одиничного радіуса та поза ним, тобто система стійка. Якщо безперервна частина системи має запізнювання, то найнижчий степінь  $z^{-1}$  у передаточній функції  $\Phi_{EB}(z)$  має бути таким же, як і в передаточній функції  $W_{ЗБЧ}(z)$ .

Якщо безперервна частина дискретної системи керування нестійка, тобто, якщо передаточна функція  $W_{ЗБЧ}(z)$  має полюси, розташовані на колі одиничного радіуса або поза ним, то в цьому випадку не можна користуватися виразами (1.59) і (1.60) для визначення бажаної передаточної функції  $\Phi_{EB}(z)$ , оскільки передаточна функція дискретного фільтра  $D(z)$ , що забезпечує оптимальність керування, буде фізично нереалізовною.

Відомо, що дискретна передаточна функція замкненої системи

$$\Phi(z) = \frac{y(z)}{g(z)} = \frac{D(z)W_{ЗБЧ}(z)}{1 + D(z)W_{ЗБЧ}(z)}, \quad (1.62)$$

а дискретна передаточна функція системи по сигналу похибки

$$\Phi(z) = \frac{e(z)}{g(z)} = \frac{1}{1 + D(z)W_{ЗБЧ}(z)}, \quad (1.63)$$

тому

$$\Phi(z) = \Phi_E(z)D(z)W_{ЗБЧ}(z). \quad (1.64)$$

Для забезпечення стійкості дискретної системи передаточна функція  $\Phi(z)$  не повинна мати полюсів на колі одиничного радіуса та поза ним ( $|z| < 1$ ). Це забезпечується підбором  $\Phi_E(z)$ .

Дослідження довели [1], що оптимальна за швидкістю система керування повинна мати:

- 1) дискретну передаточну функцію  $\Phi_E(z)$ , нулі якої дорівнюють полюсам передаточної функції  $W_{ЗБЧ}(z)$ , розташованим на колі одиничного радіуса або поза ним;
- 2) дискретну передаточну функцію  $\Phi_B(z)$ , нулі якої збігаються з усіма нулями передаточної функції  $W_{ЗБЧ}(z)$ , розташованими на колі одиничного радіуса або поза ним;
- 3) дискретну передаточну функцію  $\Phi_B(z)$ , яка має множник  $z^{-1}$ .

Отже, проектування оптимальної дискретної системи керування з мікро-ЕОМ починається з визначення передаточної функції  $W_{ЗБЧ}(z)$  і вибору дискретної передаточної функції для похибки  $\Phi_E(z)$  відповідно до наведених вище рекомендацій. Потім, застосовуючи отримані передаточні функції  $W_{ЗБЧ}(z)$  і  $\Phi_E(z)$ , з виразу (1.64) визначають передаточну функцію дискретного фільтра (регулятора):

$$D(z) = \frac{\Phi_B(z)}{\Phi_E(z)W_{ЗБЧ}(z)} = \frac{1 - \Phi_E(z)}{\Phi_E(z)W_{ЗБЧ}(z)} \quad (1.65)$$

Синтез дискретних регуляторів з використанням виразу (1.65) розглядається детальніше у розд.3.

### 1.3.6. Побудова оптимальної за швидкодією системи керування на основі середньоквадратичного критерію якості

Побудова оптимальної за швидкодією без перерегулювання, при будь-якому характері задавального впливу дискретної системи керування з мікро-ЕОМ, пов'язана з пошуком компромісу між тривалістю перехідного процесу, величиною коливань вихідної змінної у проміжках між моментами формування (видавання) керуючих впливів і величиною перерегулювання.

Ця задача може розв'язуватися із застосуванням середньоквадратичного критерію якості. Значення середньоквадратичної похибки (СКП) або критерію  $J$  для дискретної системи керування можуть визначатися за допомогою виразу:

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} [e(n)]^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_r e(z)e(z^{-1})z^{-1} dz, \quad (1.67)$$

отриманого з (1.35).

Тут оптимізація керування здійснюється завдяки введенню спеціального коефіцієнта  $c_0$ , у знаменнику бажаної дискретної передаточної функції і ФЕБ( $z$ ). При цьому перерегулювання у контурі керування знижується за рахунок збільшення тривалості перехідного процесу.

У загальному випадку бажана дискретна передаточна функція системи за похибкою має вигляд:

$$\Phi_{EB}(z) = \frac{(1-z^{-1})^k F(z)}{1-c_0 z^{-1}}, \quad (1.68)$$



де коефіцієнт  $c_0$  набуває значення від  $-1$  до  $+1$ , а показник степеня  $k$  набуває значення  $k=1$  при  $g(t)=l(t)$ ,  $k=2$  при  $g(t)=t$  і т.д.

Коефіцієнти полінома  $F(z)$  і коефіцієнт  $c_0$  визначаються, виходячи з необхідності мінімізації суми квадратів дискретних значень похибки  $e(n)$  (1.67). Крім того, при виборі цих коефіцієнтів при оптимізації процесу керування за швидкодією необхідно, щоб передаточна функція  $\Phi_{EB}(z)$  мала усі полюси нульові, а передаточна функція  $\Phi_B(z)$  - усі полюси дискретної передаточної функції  $W_{ЗБЧ}(z)$ , які розташовані поза колом одиничного радіуса.

**Приклад 1.18.** Безперервна частина системи є ідеальною інтегровальною ланкою, передаточна функція якої :

$$W_o(p) = k_o / p,$$

де  $k_o = 3 \text{ c}^{-1}$ .

Знайти вираз для передаточної функції ДФ  $D(z)$ , що забезпечує керування з перехідним процесом, мінімальним за часом, та мінімальною величиною перерегулювання для сигналів завдання  $g(t)=l(t)$  і  $g(t)=t$ . Період квантування вважати рівним  $0.5\text{c}$ .

**Розв'язок.** Дискретна передаточна функція зведеної безперервної частини

$$W_{ЗБЧ}(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_o}{p^2} \right\} = \frac{k_o T z}{(z-1)^2} \cdot \frac{z-1}{z} = \frac{k_o T}{z-1}$$

Відповідно до виразу (1.68) і розглянутих вище умов

$$\Phi_{EB}(z) = \frac{1}{1 - c_0 z^{-1}} = \left[ (1 - z^{-1})^2 (1 + a z^{-1}) \right]$$

$$\Phi_B(z) = \frac{z^{-1}}{1 - c_0 z^{-1}} (b_1 + b_2 z^{-1})$$

Розв'язуючи сумісно ці рівняння, дістанемо:

$$1 - \frac{(1 - z^{-1})^2 (1 + az^{-1})}{1 - c_0 z^{-1}} = \frac{z^{-1} (b_1 + b_2 z^{-1})}{1 - c_0 z^{-1}}$$

Отже,  $(2 - a - c_0)z^{-1} + (2a - 1)z^{-2} - az^{-3} = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$

Тоді

$$-a = 0, \Rightarrow a = 0;$$

$$2a - 1 = b_2 \Rightarrow b_2 = -1;$$

$$2 - a - c_0 = b_1 \Rightarrow b_1 = 2 - c_0.$$

Для визначення коефіцієнтів  $c_0$  і  $b_1$  треба скласти ще одне рівняння.

Його можна одержати за допомогою виразу (1.67).

Для пошуку контурного інтеграла, а, отже,  $\sum_{n=0}^{\infty} [e(n)]^2$ , запишемо

рівняння для визначення  $e(z)$  при подачі на вхід контуру керування сигналу  $g(t) = I(t)$ , а потім -  $g(t) = t$ .

Варіант 1:  $g(t) = I(t)$ . У цьому випадку

$$e(z) = \Phi_{EB}(z)g(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{c - c_0 z^{-1}} \frac{z}{z - 1} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - c_0 z^{-1}}$$

Тоді

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} [e(n)]^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{1}{z} \frac{z - 1}{z - c_0} \frac{1 - z}{1 - c_0 z} dz$$

Даний інтеграл можна визначити, обчислюючи лишки у полюсах  $z = 0$  і

$z=c_o$ . Тому

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} [e(n)]^2 = \frac{1}{c_o} - \frac{(1-c_o)^2}{c_o(1-c_o^2)} = \frac{2(1-c_o)}{1-c_o^2}$$

Варіант 2:  $g(t)=t$ . У цьому випадку

$$e(z) = \Phi_{EB}(z)g(z) = \frac{(1-z^{-1})^2}{c-c_o z^{-1}} \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{Tz^{-1}}{1-c_o z^{-1}}$$

Тоді

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} [e(n)]^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{T}{(z-c_o)z} \frac{Tz}{(1-c_o z)} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_r \frac{T^2}{(z-c_o)(1-c_o z)} dz$$

Визначимо цей інтеграл, обчислюючи лишок у полюсі  $z=c_o$ . Тоді

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} [e(n)]^2 = \frac{T^2}{1-c_o^2}$$

Знайдемо значення  $c_o$ , яке забезпечує мінімальну СКП одночасно для обох сигналів завдання. Побудуємо залежність  $J=f(c_o)$  для двох видів сигналу завдання при  $T=0.5c$ : 1 - для  $g(t)=l(t)$ ; 2 - для  $g(t)=t$  (рис. 1.26). Точка перетину цих кривих визначає значення коефіцієнта  $c_o$ , при якому СКП не перевищує  $\Delta_{\min}$  при поданні на вхід контуру керування задавальних впливів  $g(t)=l(t)$  і  $g(t)=t$ .

Зрівнюючи вирази  $\sum_{n=0}^{\infty} [e(n)]^2$ , сформовані для першого і

другого варіантів, дістанемо оптимальне значення  $c_o$ :

$$\frac{2(1-c_o)}{1-c_o^2} = \frac{T^2}{1-c_o}$$

Звідки

$$c_o^{opt} = \frac{2 - T^2}{2}$$

При  $T=0.5$   $c_o^{opt} = (2 - 0.25) / 2 = 0.875$

Тепер можна визначити значення коефіцієнта  $b_1$ . Оскільки  $c_o=0.875$ ,

то

$$b_1 = 2 - c_o = 1.125$$

Підставивши знайдені значення коефіцієнтів  $c_o$  і  $b_1$  у передаточні функції  $\Phi_{EB}(z)$  і  $\Phi_B(z)$ , матимемо:

$$\Phi_{EB}(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{1 - 0.875z^{-1}}; \quad \Phi_B(z) = \frac{z^{-1}(1.125 - z^{-1})}{1 - 0.875z^{-1}};$$

Застосовуючи розкладання в ряд Лорана, визначимо зміну вихідної змінної  $y(t)$  для двох видів задавальних впливів:

$$y(z) \Big|_{g=1(t)} = \frac{1.125z - 1}{(z - 0.875)(z - 1)} = 1.125z^{-1} + 1.109z^{-2} + 1.095z^{-3} + \dots$$

$$y(z) \Big|_{g=t} = \frac{0.5625z - 0.5}{z^3 - 2.875z^2 + 2.75z - 0.875} = 0.562z^{-2} + 1.117z^{-3} + \dots$$

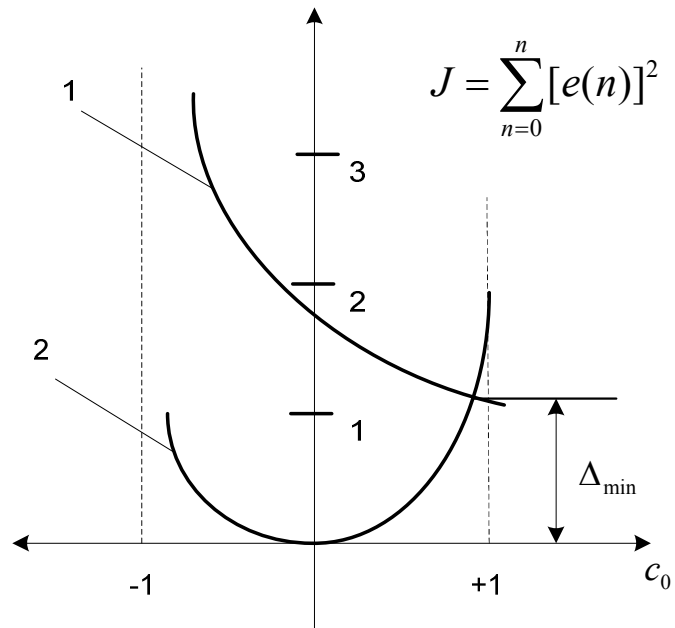


Рис. 1.26. Залежності  $J = f(c_0)I = f(c_0)$ : 1-  $g(t) = I(t)$ ; 2-  $g\{t\} = t$

Тоді передаточна функція ДФ, що відповідає (1.65):

$$D(z) = \frac{\Phi_B(z)}{\Phi_{EB}(z) \cdot W_{ЗБЧ}(z)} = \frac{0.75 - 0.67z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

звідки різницеве рівняння матиме вигляд:

$$u(n) = 0.75e(n) - 0.67e(n-1) + u(n-1).$$

## 1.4. Алгоритми керування

Реалізація на мікро- або міні-ЕОМ сформованих у процесі синтезу (аналітичного конструювання) різницевих рівнянь і законів керування пов'язана зі складанням алгоритмів керування і програм.

Під **алгоритмом** розуміють набір правил (процедур), що визначають послідовність дій над вихідними даними, які приводять до шуканого.

Особливістю алгоритму є те, що з його допомогою можна розв'язати задачу, не переймаючись її суттю. Отже, за заданим алгоритмом, якщо він складений вірно, задача керування може бути розв'язана міні- або мікро-ЕОМ за умови, що машина спроможна виконати операції, передбачені цим алгоритмом.

### 1.4.1. Форми запису алгоритмів

Застосовується декілька форм подання алгоритмів: **словесна** – з використанням необхідної математичної символіки; **структурна** – у вигляді сукупності блоків, що відповідають окремим стадіям організації процесу керування; **операторна** – із застосуванням алгоритмічної мови.

Форму запису алгоритму, що орієнтована на машинну реалізацію, називають **програмою**. Програма може бути написана мовою машини або якоюсь алгоритмічною мовою.

### 1.4.2. Характеристики алгоритмів керування

Алгоритм керування визначається такими характеристиками, як складність, зв'язність і т. ін. **Складність** алгоритму керування залежить від кількості елементарних операцій ( $N_a$ ), потрібних для його реалізації, складності структури, складу і рівня операторів. **Зв'язність** алгоритму поділяють на внутрішню, зовнішню і повну. **Внутрішня** зв'язність (ПА) оцінюється максимальною кількістю проміжних результатів, що необхідно запам'ятати при виконанні алгоритму, і кількістю вихідних даних. Ця зв'язність визначає потрібну ємність ОЗП. При підготовці задачі до розв'язання бажано зменшити зв'язність алгоритму. Однак при цьому, як правило, зменшується точність результату. **Зовнішня** зв'язність (ПВ) визначається масивом вхідних даних. Загальна зв'язність  $P\Sigma = PA + PB$ .

**Повна** зв'язність визначається сумою внутрішньої, зовнішньої зв'язностей і довжини алгоритму. Остання визначається довжиною запису алгоритму у прийнятому наборі операторів та кількістю команд у програмі, що реалізує даний алгоритм.

Треба зазначити, що для більшості алгоритмів точні значення названих характеристик визначити важко. Тому користуються середніми, найбільш імовірними або екстремальними характеристиками.

### 1.4.3. Склад і послідовність виконання окремих процедур

У ході розробки алгоритмів керування визначається склад і послідовність виконання окремих процедур. Алгоритми, що

розробляються, повинні ставити мінімальні вимоги до мікро-ЕОМ і забезпечувати максимальну надійність виконання задач керування [3].

До складу алгоритму керування, незалежно від застосованої методики, входять процедури підготовки, визначення керуючого впливу і виведення інформації (рис. 1.27).

Раніше було показано, що задача синтезу окремого контуру керування безперервним або лінеаризованим об'єктом керування полягає у тому, щоб дістати вираз для передаточної функції у заданому (бажаному) вигляді. Після цього, застосовуючи теорему про запізнювання, перейти до різницевого рівняння:

$$u(n) = f(e(n), e(n-1), \dots, e(n-m), u(n-1), \dots, u(n-l)).$$

Отже, реалізація функції (1.69) вимагає  $(m+1)$  комірку пам'яті для зберігання  $e$ ,  $l$  комірок - для  $u$ ,  $(m+l+1)$  комірку для зберігання коефіцієнтів



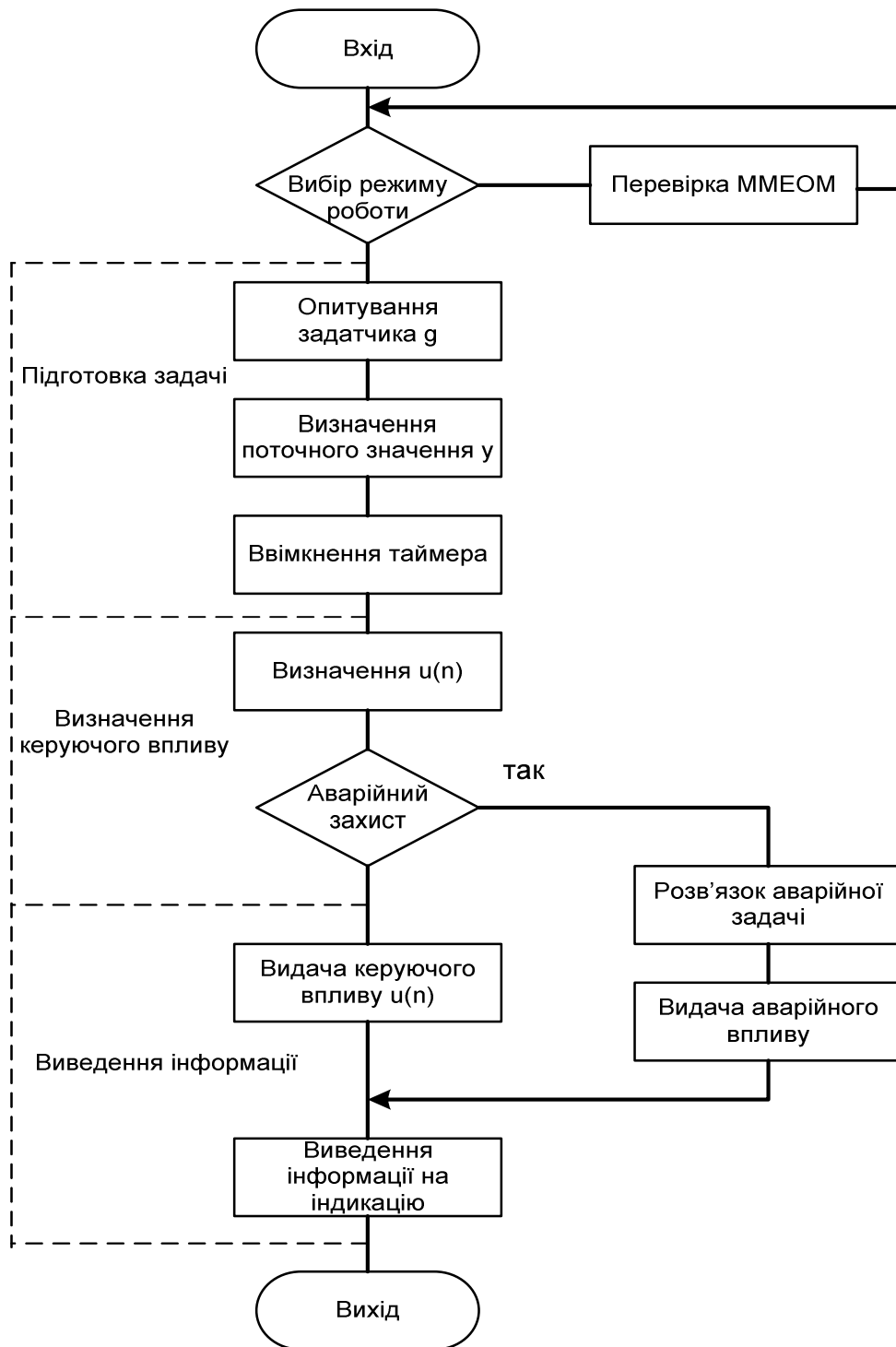


Рис. 1.27. Блок-схема алгоритму керування

Різницеве рівняння для лінійного  $D_\Phi$  при  $m=l$  згідно з виразом (1.33), якщо замість  $y_{вух}(n)$  підставити  $u(n)$ , а замість  $y_{вх}(n) - e(n)$ , можна записати так:

$$u(n) = a_0 e(n) + a_1 e(n-1) + \dots + a_m e(n-m) - b_1 u(n-1) - \dots - b_l u(n-l) \quad (1.69)$$

З виразу (1.69) видно, що для визначення керуючого впливу  $u(n)$  треба:

- 1) задати значення розузгодження  $e(n)$  і знати значення  $e(n-1), \dots, e(n-m)$ , а також значення  $u(n-1), \dots, u(n-l)$ ; сигнали  $e(n-1), u(n-1), \dots$  можна знайти за допомогою  $e(n)$  і  $u(n)$ , якщо застосувати затримку вказаних змінних на один період дискретності; як елементи затримки найкраще застосовувати комірки пам'яті мікро-ЕОМ;
- 2) помножити змінні  $e$  і  $u$  на відповідні коефіцієнти  $a$  і  $b$ , для чого треба застосувати процесорний пристрій мікро-ЕОМ;
- 3) додати визначені результати, для чого також застосувати процесорний пристрій мікро-ЕОМ.

Для розробки структури узагальненого алгоритму керування змінною  $y$ , що забезпечує формування і видачу на виконавчий пристрій керуючого впливу  $u$ , застосуємо умовні адреси, що складаються з буквених і цифрових індексів. Розмістимо сталі коефіцієнти  $a$  і  $b$  у  $\eta$ -комірках, а змінні  $e$  і  $u$  у  $\nu$ -комірках пам'яті мікро-ЕОМ (табл. 1.2).

Тоді структуру узагальненого алгоритму можна подати так, як показано на рис 1.28, де  $(\nu+i)$  - вміст комірки  $(\nu-i)$ , позначка  $\rightarrow$  означає перенесення вмісту із однієї комірки до іншої.

При організації переносів у першій і п'ятій процедурах для переміщення інформації тільки на один крок у циклі визначення  $u$  підстановку замість  $i$  поточних значень треба починати з більших значень. Так при виконанні першої процедури  $i$  повинно дорівнювати  $m-1$ , потім  $m-2$  і т.д. При виконанні п'ятої процедури спочатку  $i$  повинно дорівнювати  $l-1$ , потім  $l-2$  і т.д.

Таблиця 1.2

№ комірок	$v+0$	$v+1$	...	$v+m$	$v+m+1$	...	$v+m+l$
Змінні	$e(n)$	$e(n-1)$	...	$e(n-m)$	$u(n-1)$	...	$u(n-l)$
№ комірок	$\eta$	$\eta+1$	...	$\eta+m$	$\eta+m+1$	...	$\eta+m+l$
Коефіцієнти	$a_0$	$a_1$	...	$a_m$	$b_1$	...	$b_l$

Крім того, необхідні три комірки для збереження поточного значення, заданого значення параметра  $g$  і керуючого впливу  $u$ . Для запису програми теж буде потрібна певна кількість комірок пам'яті. Тому загальна зв'язність алгоритму (без довжини програми)

$$P\Sigma = 2(m+l+1) + 3 \quad (1.70)$$

Для визначення величини  $u(n)$  на одному кроці обчислень треба виконати  $N_a$  операцій.

Дійсно, перша процедура потребуватиме  $m$  операцій переносу, оскільки  $i$  змінюватиметься від  $m-1$  до  $0$ . Друга – чотири операції: опитування датчика  $y(n)$ , опитування задатчика  $g(n)$ , визначення різниці  $e(n)=g(n)-y(n)$  і запис її у комірку  $(v+0)$ . Третя –  $(m+l+1)$  операцій

множення і  $(m+l)$  операцій додавання. Четверта - одну операцію - видачі керуючого впливу  $u(n)$  на виконавчий механізм. П'ята -  $(l-1)$  операцію переносу, оскільки  $i$  змінюватиметься від  $l-1$  до 1. І, нарешті, шоста - одну операцію - запис у комірку  $(v+m+1)$  поточного значення керуючого впливу  $u(n)$ .

Отже, загальна кількість операцій визначатиметься так:

$$N_a = m + 4 + (m+l+1) + (m+l) + (l-1) + 2 = 3(m+1) + 6 \quad (1.71)$$

Необхідна швидкодія мікро-ЕОМ

$$B_a = N_a / T \quad (1.72)$$

де  $T$  - період дискретності системи.

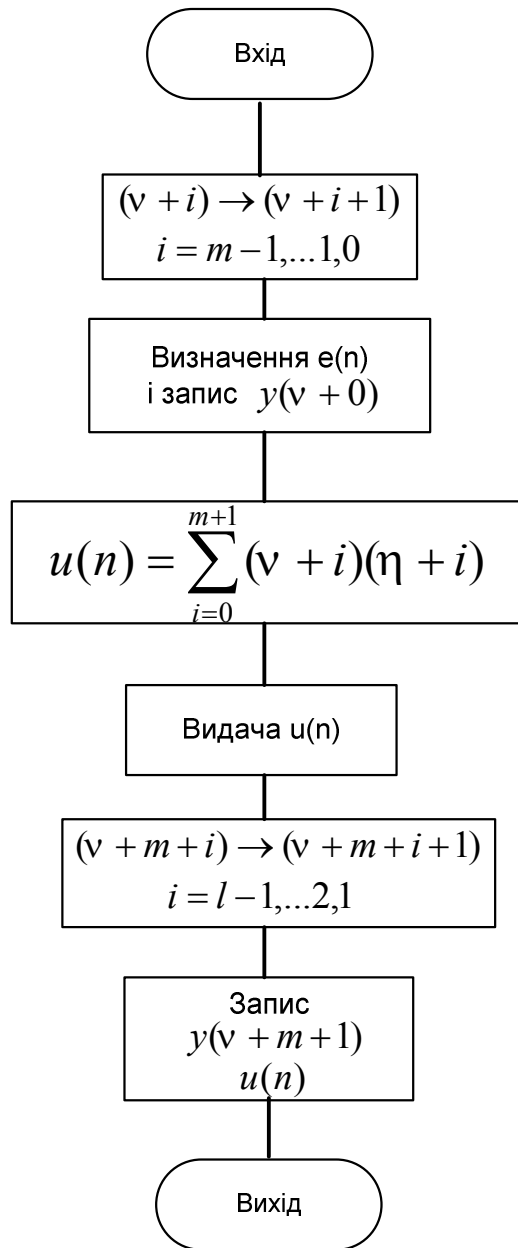


Рис. 1.28. Узагальнена структура алгоритму керування

## **2. Моделювання об'єктів керування технологічними процесами**

Застосування теорії автоматичного керування для аналізу та синтезу автоматичних систем керування (АСК) передбачає формування математичних моделей усіх складових системи. Тому при проектуванні АСК першим її етапом є побудова математичної моделі об'єкта керування. Математичне моделювання складається з описання окремих хімічних, масо-, теплообмінних, гідродинамічних процесів, що проходять в об'єкті. Досліджуючи їх, можна при певних припущеннях описати його поведінку аналітично за допомогою диференціальних, інтегродиференціальних або різницевих рівнянь.

Одержані моделі є математичною формалізацією процесів, що відбуваються в реальному об'єкті. Причому один і той самий об'єкт залежно від прийнятих припущень може бути описаний по-різному. Як наслідок цього, виник напрямок, у межах якого розробляються методи визначення математичної моделі, що є найкращою з точки зору максимального наближення її частотних або часових характеристик до таких для реального об'єкта за даними спостережень за його вхідними та вихідними змінними в нормальному режимі функціонування. Цей напрямок називають **ідентифікацією**.

Отже, результатом ідентифікації є математична модель об'єкта керування, на основі якої можна скласти його структурну схему за допомогою передаточних функцій, матриць або графів та переходити до наступних етапів проектування АСК

## 2.1. Типи передаточних функцій

Аналіз загального вигляду передаточних функцій (2.56)-(2.59) і (2.61)-(2.63) показує, що усі вони можуть бути записані так:

$$W(p) = k_o \frac{\exp(-p\tau)}{T_o p + 1}, \tau < T_o \quad (2.76)$$

де  $k_o, \tau, T_o$  - відповідно коефіцієнт підсилення, запізнювання і стала часу об'єкта або одного із його каналів керування.

Далі називатимемо передаточну функцію (2.76) передаточною функцією моделі типу I.

Передаточна функція (2.60) може бути записана так:

$$W(p) = k_o \frac{\exp(-p\tau)}{(T_o p + 1)p} \quad (2.77)$$

Або

$$W(p) = k_o \frac{\exp(-p\tau)}{p^2 + ap + b} \quad (2.78)$$

де  $a$  і  $b$  - деякі коефіцієнти.

Далі називатимемо передаточну функцію (2.78) передаточною функцією моделі типу II.

Передаточна функція (2.64) може бути подана так:

$$W(p) = k_o \frac{\exp(-p\tau)}{T_o p + 1} p \quad (2.79)$$

Далі називатимемо передаточну функцію (2.79) передаточною функцією моделі типу III.

Передаточні функції (2.66)-(2.74) у загальному вигляді можна подати так:

$$W(p) = k_o \frac{\exp(-p\tau)}{T_o p + 1}, \tau > T_o \quad (2.80)$$

Передаточну функцію (2.80) називатимемо передаточною функцією моделі типу IV.

Якщо  $\tau = 0$ , то з передаточних функцій (2.76) і (2.80) дістанемо функцію моделі типу V:

$$W(p) = \frac{k_o}{T_o p + 1} \quad (2.81)$$

Отже, маємо п'ять типових передаточних функцій: (2.76), (2.78), (2.79)–(2.81).

## 2.2 Практичні приклади ідентифікації об'єктів керування

Для ілюстрації практичного застосування описаного вище методу ідентифікації об'єктів керування здійснимо **цифрове моделювання** процесу ідентифікації на простому прикладі. Припустимо, що треба ідентифікувати об'єкт керування, істинна передаточна функція якого

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{2}{5p + 1} \quad (2.160)$$

де  $y(p)$ ,  $u(p)$  - відповідно, зображення Лапласа вихідної та вхідної змінних.



### **2.2.1. Визначення числових значень істинної імпульсної перехідної функції**

Виходячи з передаточної функції (2.160) істинна імпульсна перехідна функція визначається так:

$$w(t) = 0.4 \exp(-0.2t) \quad (2.161)$$

За виразом (2.161) легко обчислити будь-яку кількість значень істинної імпульсної перехідної функції.

### **2.2.2. Визначення числових значень експериментальної імпульсної перехідної функції за допомогою ПВДП**

#### **2.2.2.1. Генерація ПВДП і обчислення значень вихідного сигналу**

Для одержання значень експериментальної імпульсної перехідної функції ОК, що ідентифікується, можна застосувати ПВДП, яка буде генеруватися за допомогою  $M$ -послідовності максимального періоду (довжини) [1]. Така послідовність, як і  $L$ -послідовність максимальної довжини, генерується регістрами зсуву із зворотним зв'язком (рис.2.17).

Як видно з рис.2.17, регістр зсуву складається з  $m$  елементів  $D^1, D^2, \dots, D^m$ . Сигнал зворотного зв'язку подається на перший елемент  $D^1$  і формується за модулем 2 з вихідних сигналів останнього елемента  $D^m$  і елемента  $D^r$ , де  $2 \leq r \leq m-1$ . Вибір  $r$  значно впливає на період послідовності. Оскільки розрахунки виконуватимемо у дискретному часі, нехай період квантування (період дискретності)  $T=dt=1c$ .

Задачею ідентифікації ОК на даному етапі **цифрового моделювання процесу ідентифікації** є задача пошуку значень експериментальної імпульсної перехідної функції для 20 інтервалів ( $m=2l$ ).

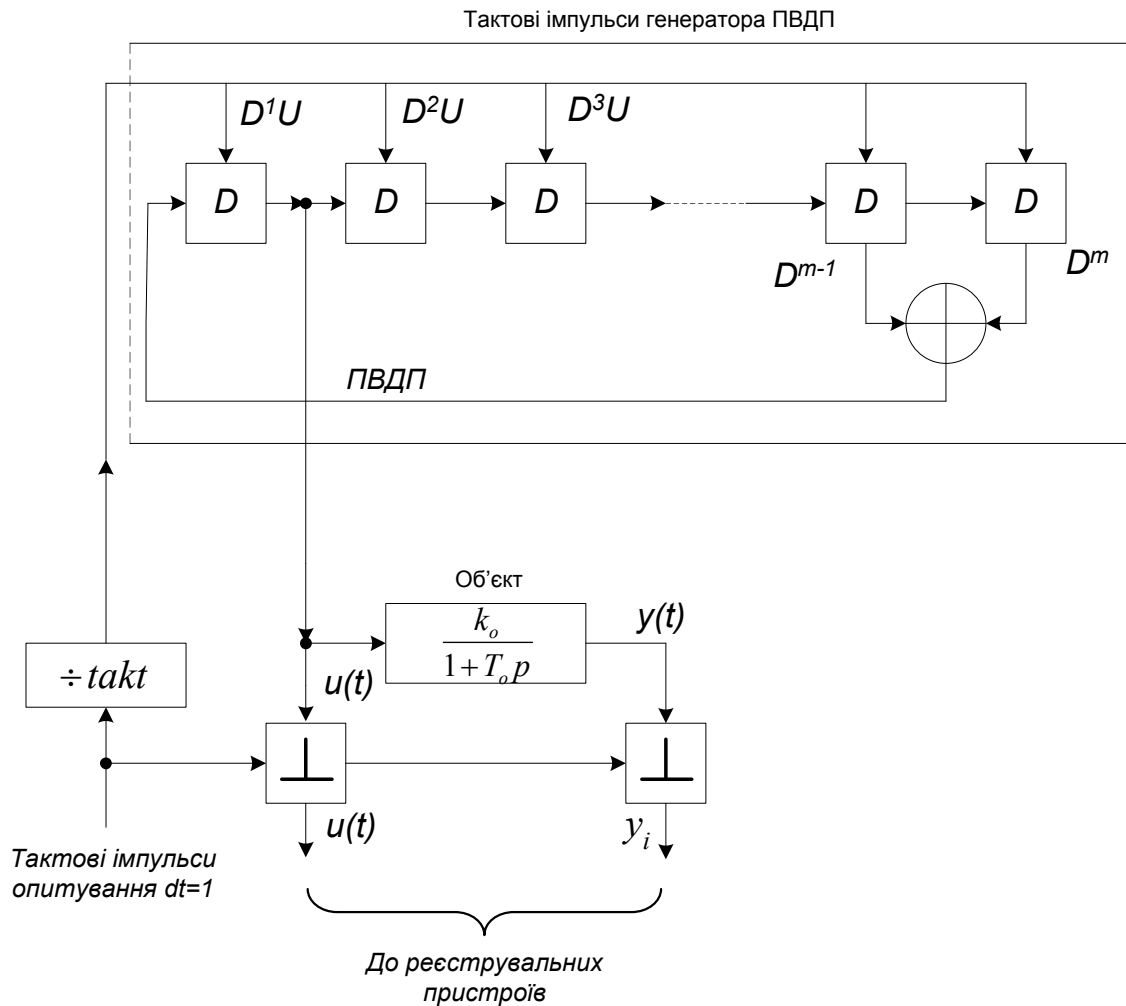


Рис.2.17. Структурна схема системи ідентифікації об'єкта керування із застосуванням ПВДП

Оскільки тривалість пам'яті для розглядуваного ОК дорівнює трьом сталим часу, тобто

$$T_n = 3T_o = 3 \cdot 5 = 15$$

то обране  $m=2l$  при  $T=1c$  задовольнить нерівність:

$$Tm \geq T_n \quad (2.162)$$

де  $m$  - кількість ординат експериментальної імпульсної перехідної функції.

Максимальний період  $M = 2^m - 1$  забезпечується при  $r=m=1$ , якщо  $M \leq 12$ . У даній задачі реалізується послідовність при  $m=5$ , тобто  $M=31$ .

Тривалість такту звернення до генератора прийнята  $3T$ , тобто  $takt=3$ .

Значення вихідного сигналу  $y_i$  у точках квантування розраховувались при двійковому вхідному сигналі  $u_i$  за формулою:

$$y_i = q_1 y_{i-1} + q_2 u_i \quad (2.163)$$

де

$$q_1 = \exp\left(-\frac{T}{T_o}\right) = \exp\left(-\frac{1}{5}\right); \quad q_2 = k_o(1 - q_1) = 2 \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{5}\right)\right].$$

Числові дані для контрольної задачі цифрового моделювання процесу ідентифікації наведені у табл.2.3. За даними табл.2.3 на рис.2.18 побудовані графіки вхідної змінної (графік 1) і вихідної змінної (графік 2) у моделі об'єкта керування.

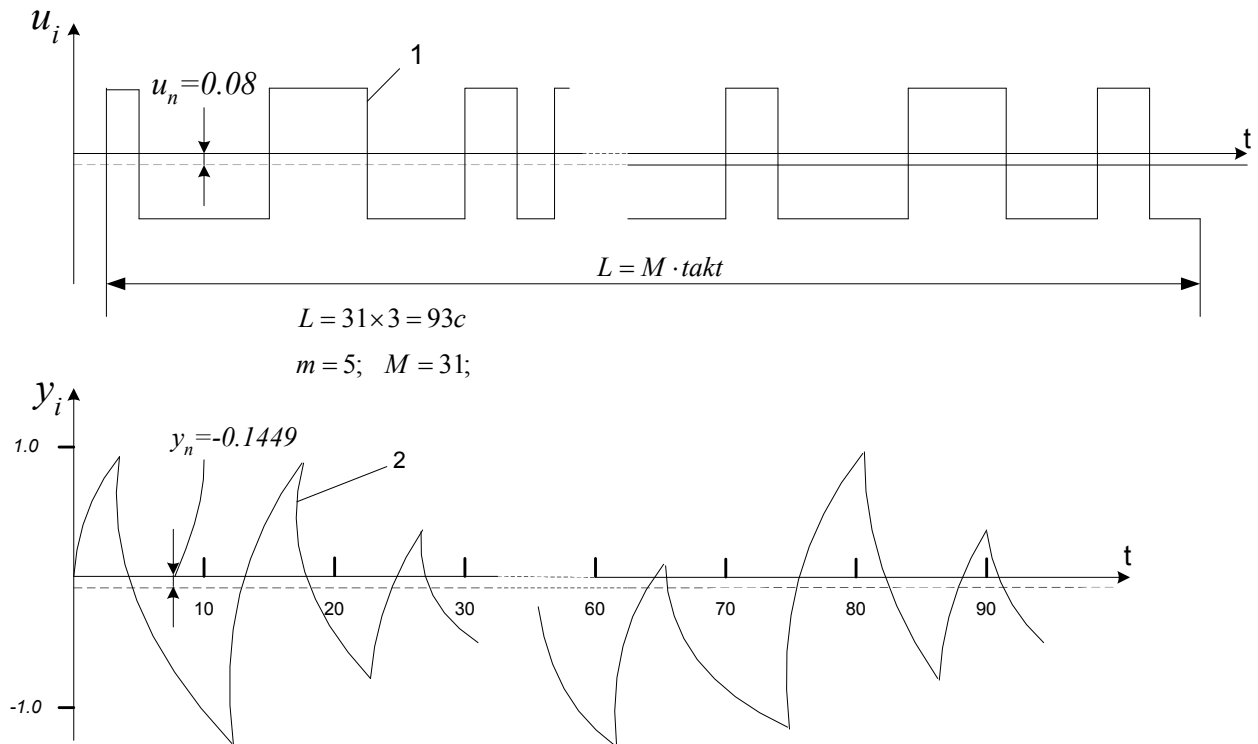


Рис.2.18. Реакція вихідної змінної (графік 2) на вхідну змінну (графік 1) у моделі об'єкта керування

### 2.2.2.2. Визначення значень експериментальної імпульсної перехідної функції за взаємною кореляційною функцією

Згідно з виразом (2.30) експериментальна імпульсна перехідна функція  $w(k)$  зв'язана із взаємною кореляційною функцією  $R_{yu}(k)$  так:

$$w(k) = \frac{L}{a^2(L+1)} R_{yu}(k) \quad (2.164)$$

де  $a$  - амплітуда вхідного сигналу;  $L$  - максимальна довжина періоду ПВДП.

## Числові дані для контрольної задачі цифрового моделювання

$u_i$	$y_i$	$u_i$	$y_i$	$u_i$	$y_i$	$u_i$	$y_i$
1.0	0.36	1.0	-0.09	1.0	1.87	1.0	-1.00
1.0	0.66	1.0	0.29	-1.0	1.17	1.0	-0.46
1.0	0.90	-1.0	-0.12	-1.0	0.59	1.0	-0.01
-1.0	0.38	-1.0	-0.46	-1.0	0.12	1.0	0.35
-1.0	-0.05	-1.0	-0.74	-1.0	-0.26	1.0	0.65
-1.0	-0.41	1.0	-0.25	-1.0	-0.58	1.0	0.89
-1.0	-0.70	1.0	0.16	-1.0	-0.83	-1.0	0.37
-1.0	-0.93	1.0	0.49	-1.0	-1.05	-1.0	-0.06
-1.0	-1.13	-1.0	0.04	-1.0	-1.22	-1.0	-0.41
-1.0	-1.28	-1.0	-0.33	-1.0	-1.36	-1.0	-0.70
-1.0	-1.41	-1.0	-0.63	-1.0	-1.48	-1.0	-0.94
-1.0	-1.52	1.0	-0.15	-1.0	-1.57	-1.0	-1.13
1.0	-0.88	1.0	0.24	-1.0	-1.65	1.0	-0.56
1.0	-0.36	1.0	0.56	1.0	-0.99	1.0	-0.10
1.0	0.07	1.0	0.82	1.0	-0.45	1.0	0.28
1.0	0.421	1.0	1.03	1.0	-0.00	-1.0	-0.13
1.0	0.70	1.0	1.21	-1.0	-0.36	-1.0	-0.47
1.0	0.94	1.0	1.35	-1.0	-0.66	-1.0	-0.75
-1.0	-0.41	1.0	1.47	-1.0	-0.90	-1.0	-0.95
-1.0	-0.03	1.0	1.57	-1.0	-1.10	1.0	0.16
-1.0	-0.39	1.0	1.64	-1.0	-1.27	1.0	0.49
-1.0	-0.68	1.0	1.71	-1.0	-1.40	-1.0	0.04
-1.0	-0.92	1.0	1.76	-1.0	-1.51	-1.0	-0.33
-1.0	-1.11	1.0	1.80	-1.0	-1.60	-1.0	-0.63
1.0	-0.55	1.0	1.84	-1.0	-1.67	1.0	-0.85

Оскільки у розглядуваному прикладі

$$L = M \cdot takt = 31 \cdot 3 = 93 \text{ с}, \quad |a| = 1$$

і то згідно з (2.164)

$$w(k) = \frac{93}{94} R_{yu}(k) \approx R_{yu}(k) \quad (2.165)$$

Отже, експериментальна ІПФ при заданій ПВДП максимальної довжини практично дорівнює взаємній кореляційній функції ОК. Визначення взаємної кореляційної функції моделі ОК типу V ( $\tau = 0$ ) можна виконати відповідно до блок-схеми алгоритму, наведеного у додатку (рис.Д.3) або за формулою:

$$R_{yu}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=0}^{N-k} y_i \cdot u(i-k) \quad (2.166)$$

де  $N$  - кількість експериментальних точок (у даному прикладі  $N=93$ );  $k$  - кількість точок, для яких визначається взаємна кореляційна функція ( $k=21$ ).

За формулою (2.166) було розраховано 18 її значень і результати обчислень зведені до табл.2.4, а за даними таблиці на рис.2.19 побудований графік взаємної кореляційної функції об'єкта керування (графік 1).

Таблиця 2.4

Значення взаємної кореляційної функції  $R_{yu}(k)$ , експериментальних

$w_1^*(k)$ ,  $w_2^*(k)$  і істинної  $w(k)$  перехідних функцій

$k$	1	2	3	4	5	6
$R_{yu}(k)$	0,719	0,719	0,588	0,469	0,384	0,281
$w_1^*(k)$	0,242	0,239	0,196	0,163	0,128	0,093
$w_2^*(k)$	0,313	0,262	0,220	0,185	0,155	0,130
$w(k)$	0,361	0,296	0,240	0,198	0,162	0,130
$k$	7	8	9	10	11	12
$R_{yu}(k)$	0,210	0,100	0,022	-0,009	0,005	0,028
$w_1^*(k)$	0,072	0,033	0,007	-0,003	0,002	0,009
$w_2^*(k)$	0,109	0,091	0,077	0,064	0,054	0,045
$w(k)$	0,108	0,088	0,072	0,058	0,046	0,045
$k$	13	14	15	16	17	18
$R_{yu}(k)$	0,067	0,095	0,114	0,108	0,078	0,030
$w_1^*(k)$	0,022	0,031	0,038	0,036	0,026	0,010
$w_2^*(k)$	0,038	0,032	0,027	0,022	0,019	0,016
$w(k)$	0,030	0,023	0,026	0,014	0,011	0,005

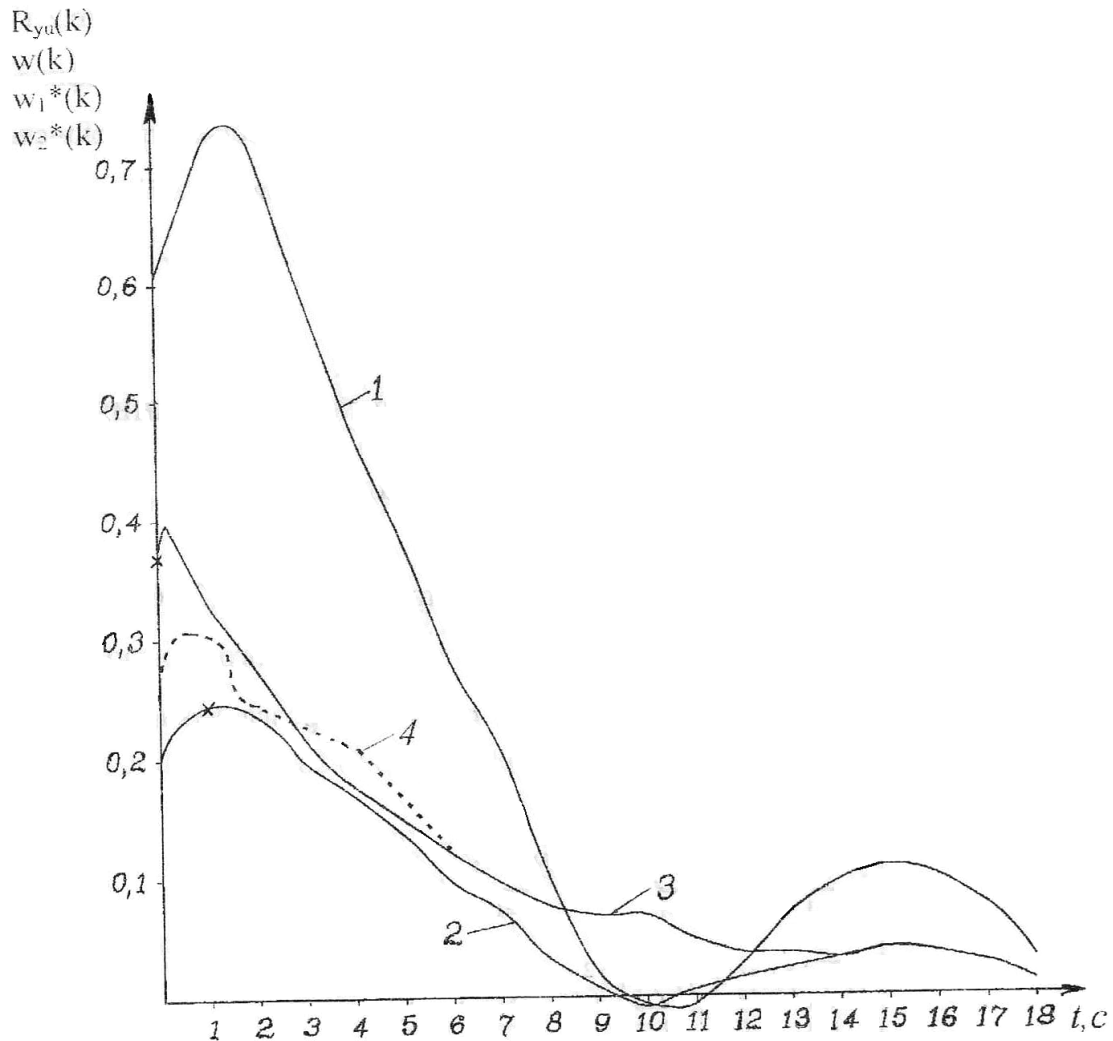


Рис.2.19. Взаємна кореляційна функція  $R_{yu}(k)$ , (графік 1), експериментальні  $w_1^*(k)$ ,  $w_2^*(k)$  (графіки 2 і 4) і істинна  $w(k)$  (графік 3) імпульсні перехідні функції

Експериментальна імпульсна перехідна функція, розраховується так:

$$w_1^*(k) = \frac{R_{yu}(k)}{\text{takt}} \quad (2.167)$$

Розраховані значення цієї функції зведені до табл.2.4 і на рис.2.19 побудований її графік (графік 2), який збігається з істинною ПФ  $w(k)$  (графік 3) у середній її частині і недостатньо точно - на початку і кінці.



Збільшити точність збігу істинної  $w(k)$  і експериментальної  $w_1^*(k)$  ПФ можна, збільшивши довжину послідовності  $M$ .

### 2.2.3. Оцінювання параметрів моделі каналу керування

#### 2.2.3.1. Метод найменших квадратів

Для оцінювання параметрів моделі об'єкта керування (2.160) можна застосувати метод найменших квадратів, точніше, його різновид – диференціальний метод. Тоді з урахуванням структури розглядуваної моделі система рівнянь (2.94) матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} A \sum_{i=1}^n Y_i^2 + B \sum_{i=1}^n U_i Y_i + B \sum_{i=1}^n Y_i Y_i' = 0 \\ A \sum_{i=1}^n U_i Y_i + B \sum_{i=1}^n U_i^2 + B \sum_{i=1}^n Y_i' U_i = 0 \end{cases} \quad (2.168)$$

де

$$U_i = u_{i-1} - u_{\Pi} \quad Y_i' = y_i - y_{i-1}$$

$$Y_i = y_{i-1} - y_{\Pi} \quad y_{\Pi} = -0.1449$$

$$u_{\Pi} = -0.08$$

Для того, щоб визначити коефіцієнти  $A$  і  $B$ , треба знати числові значення

$$\sum_{i=1}^n Y_i^2, \sum_{i=1}^n U_i Y_i + \sum_{i=1}^n Y_i Y_i', \sum_{i=1}^n U_i^2 \quad \text{і} \quad \sum_{i=1}^n Y_i' U_i$$

Для обчислення цих сум потрібно скласти таблицю послідовності їх обчислення. Частина такої таблиці для розглядуваного прикладу наведена

в табл. 2.5. Вона складена на основі табл. 2.4. Підрахунки вказаних сум показали, що

$$\sum_{i=1}^{100} Y_i^2 = 82.436; \quad \sum_{i=1}^{100} U_i Y_i = 22.217; \quad \sum_{i=1}^{100} Y_i Y_i' = -6.104;$$

$$\sum_{i=1}^{100} U_i^2 = 94.45; \quad \sum_{i=1}^{100} Y_i' U_i = 31.526$$

Отже, систему рівнянь (2.168) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases} 82.436 A + 22.217 B - 6104 = 0 \\ 22.217 A + 94.45 B + 31.526 = 0 \end{cases} \quad (2.169)$$

звідки  $B=0.175$ ,  $A=-0,374$ .

Із співвідношень (2.89) і (2.90) випливає, що стала часу моделі

$$T_o = \frac{T}{B} = \frac{1}{0.175} = 5.74c$$

а коефіцієнт підсилення

$$k_o = -\frac{A}{B} = \frac{0.374}{0.175} = 2.137$$

Отже, передаточна функція моделі об'єкта керування

$$W_M(p) = \frac{2.137}{5.714p + 1} \quad (2.170)$$

Відповідна їй експериментальна імпульсна перехідна функція

$$w_2^*(k) = 0.374 \exp(-0.175t) \quad (2.171)$$

Таблиця 2.5

Послідовність обчислення сум, що входять до системи рівнянь (2.168)

$$u_{\Pi} = -0.08; y_{\Pi} = -0.1449$$

i	$U_i$	$y_i$	$U_i = u_i - u_{\Pi}$	$U_i^2$	$Y_i = y_{i-1} - y_{\Pi}$	$Y^2$	$Y_i = y_i - y_{i-1}$	$U_i Y_i$	$U_i Y_i'$	$Y_i Y_i'$
1	1.0	0.36	1.08	1.166	0.000	0.000	0.50	0.000	0.540	0.000
2	1.0	0.36	1.08	1.166	0.504	0.254	0.80	0.544	0.324	0.151
3	1.0	0.90	1.08	1.166	0.804	0.647	0.24	0.868	0.259	0.192
4	-1.0	0.38	-0.92	0.846	1.044	1.091	-0.52	-0.960	0.478	-0.542
5	-1.0	-0.05	-0.92	0.846	0.524	0.275	-0.43	-0.482	0.395	-0.225
6	-1.0	-0.41	-0.92	0.846	0.194	0.037	-0.36	-0.178	0.331	-0.069
7	-1.0	-0.70	-0.92	0.846	-0.265	0.070	-0.29	0.243	0.266	0.076
8	-1.0	-0.93	-0.92	0.846	-0.555	0.170	-0.23	0.510	0.211	0.127
9	-1.0	-1.13	-0.92	0.846	-0.785	0.616	-0.20	0.722	0.184	0.157
10	-1.0	-1.28	-0.92	0.846	-0.985	0.970	-0.15	0.906	0.138	0.147
11	-1.0	-1.41	-0.92	0.846	-1.135	1.288	-0.13	1.044	0.119	0.147
12	-1.0	-1.52	-0.92	0.846	-1.265	1.600	-0.11	1.163	0.101	0.139
13	1.0	-0.88	1.08	1.166	-1.375	1.890	0.64	-1.485	0.691	-0.880
14	1.0	-0.36	1.08	1.166	-0.735	0.540	0.52	-0.793	0.561	-0.382
15	1.0	0.07	1.08	1.166	-0.215	0.046	0.43	-0.282	0.464	-0.092
16	1.0	0.42	1.08	1.166	0.214	0.046	0.35	0.231	0.370	0.074
17	1.0	0.70	1.08	1.166	0.564	0.319	0.28	0.609	0.302	0.157
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
100	1.0	-0.85	1.08	1.166	-0.485	0.235	-0.221	-0.523	-0.237	0.106

За виразом (2.171) було розраховано 18 значень  $w_2^*(t)$  і занесено до табл. 2.4, а на рис.2.19 побудований її графік (графік. 4).

Порівняння істинної і експериментальної імпульсних перехідних функцій показує їх збіг, що свідчить про правильність розробки алгоритму ідентифікації.

Перевагою методу найменших квадратів є простота розв'язку задачі. Особливо ефективним є цей метод, коли вихідна змінна мало зашумлена. У протилежному випадку треба застосовувати узагальнений метод найменших квадратів.

### 2.2.3.2. Покращений градієнтний метод

Припустимо, що у процесі ідентифікації об'єкта керування (2.160) одержані значення експериментальної імпульсної перехідної функції  $w(k)$ : 0.327; 0.268; 0.219; 0.179; ... 0.094 і т.д., які занесено до табл. 2.6. У даному випадку вони одержані, виходячи з виразу

$$w(k) = 0.4 \exp(-0.2k) \quad (2.172)$$

Припустимо також, що була прийнята структура моделі об'єкта у вигляді аперіодичної ланки першого порядку. Якщо установити початкові значення параметрів обраної моделі  $k_M = 3$ ,  $T_M = 6$  с, то передбачена імпульсна перехідна функція для цієї моделі:

$$w_M^*(k) = 0.5 \exp\left(-\frac{1}{6}k\right) \quad (2.173)$$

Визначені згідно з (2.173) значення ПФ  $w_M^*(k)$  занесені до табл.2.6, що ілюструє послідовність обчислення сталої часу і коефіцієнта

підсилення моделі об'єкта керування для коефіцієнта ітерації  $k=T$ .

Середньоквадратичний критерій відхилення  $\varepsilon(k) = w_M^*(k) - w(k)$ :

$$C_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [w_M^*(k) - w(k)]^2 \quad (2.174)$$

де  $n$  – кількість точок, обраних для дискретизації експериментальної імпульсної перехідної функції (у даному прикладі  $n=20$ ).

Тоді градієнти критерію (2.174) будуть такі:

$$\text{grad} \left( \frac{\partial C_2}{\partial T_M} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ [w_M^*(k) - w(k)] \frac{\partial w_M^*(k)}{\partial T_M} \right\} \quad (2.175)$$

$$\text{grad} \left( \frac{\partial C_2}{\partial k_M} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ [w_M^*(k) - w(k)] \frac{\partial w_M^*(k)}{\partial k_M} \right\} \quad (2.176)$$

Для вибраної моделі

$$\frac{\partial w_M^*(k)}{\partial T_M} = \frac{kMk}{T_M^2} \exp\left(\frac{-k}{TM}\right) \Big|_{\substack{k_M=3 \\ T_M=6}} = \frac{k}{12} \exp\left(-\frac{k}{6}\right) \quad (2.177)$$

а

$$\frac{\partial w_M^*(k)}{\partial k_M} = \exp\left(-\frac{k}{6}\right) \quad (2.178)$$

Тому згідно з алгоритмом (рис. Д4):

$$\frac{\partial C_2}{\partial T_M} = \sum_{k=1}^{20} \left\{ [w_M^*(k) - w(k)] \frac{k}{12} \exp\left(-\frac{k}{6}\right) \right\} \quad (2.179)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial k_M} = \sum_{k=1}^{20} \left\{ [w_M^*(k) - w(k)] \exp\left(-\frac{k}{6}\right) \right\} \quad (2.180)$$

Таблиця 2.6

Послідовність обчислення значення сталої часу  $T_{M1}$  і коефіцієнта підсилення  $k_{M1}$  моделі об'єкта керування для коефіцієнта ітерації  $k=1$

$k$	1	2	3	4	...	10
$w(k)$	0,327	0,268	0,219	0,179	...	0,094
$w_M^*(k)$	0,423	0,358	0,303	0,256	...	0,094
$\varepsilon(k) = w_M^*(k) - w(k)$	0,095	0,090	0,084	0,077	...	-0,040
$\varepsilon^2(k) \cdot 10^{-4}$	90,25	81,00	70,56	59,29	...	16,00
$C_2' = \sum \varepsilon^2(k) \cdot 10^4$	530,14 · 10 <sup>-4</sup>					
$C_2 = 1/2 C_2'$	256,07 · 10 <sup>-4</sup>					
$\left( \frac{\partial w_M^*(k)}{\partial T_M} \right) = A$	0,070	0,118	0,150	0,168	...	0,150
$\varepsilon(k) \left( \frac{\partial w_M^*(k)}{\partial T_M} \right) \cdot 10^{-3}$	6,65	10,62	12,60	12,90	...	6,00
$\frac{\partial C_2}{\partial T_M} = \sum \varepsilon(k) \cdot A$	107,25 · 10 <sup>-3</sup> = 0,1					
$T_{M1} = T_M - k \left( \frac{\partial C_2}{\partial T_M} \right)$	$T_{M1} = 6 - 1 \cdot 0,1 = 5,96 c$					
$\left( \frac{\partial w_M^*(k)}{\partial k_M} \right) = B$	0,846	0,716	0,606	0,513	...	0,188
$\varepsilon(k) \left( \frac{\partial w_M^*(k)}{\partial k_M} \right) \cdot 10^{-3}$	80,37	64,40	50,90	39,50	...	7,52
$\frac{\partial C_2}{\partial k_M} = \sum \varepsilon(k) \cdot B$	0,357					
$k_{M1} = k_M - k \left( \frac{\partial C_2}{\partial k_M} \right)$	$k_{M1} = 3 - 1 \cdot 0,357 = 2,643 c$					

Отже, розрахункові формули для визначення сталої часу і коефіцієнта підсилення моделі об'єкта керування матимуть такий вигляд:

$$T_{M1} = T_M - k \left( \frac{\partial C_2}{\partial T_M} \right) \quad (2.181)$$

$$k_{M1} = k_M - k \left( \frac{\partial C_2}{\partial k_M} \right) \quad (2.182)$$

Результати розрахунків за формулами (2.181) і (2.182) наведеш у табл.2.6. При обраному коефіцієнті ітерації  $k=1$  були одержані: стала часу моделі об'єкта керування, що ідентифікується,  $T_{M1} = 5,96$  і коефіцієнт підсилення  $k_{M1} = 2,643$ . Отже передбачена імпульсна перехідна функція

$$w_{M1}^*(k) = \frac{2.643}{5.96} \exp\left(-\frac{1}{5.96} k\right) \quad (2.183)$$

За виразом (2.183) можна визначити відповідні значення цієї функції, а при новому значенні коефіцієнта ітерації  $k$ , наприклад  $k_2=1.5$ , обчислити нові значення параметрів моделі об'єкта керування і т.д.

### 3. Аналітичне конструювання і дослідження динамічних властивостей дискретних регуляторів

#### 3.1. Розрахункова схема

Розрахункова структурна схема одноконтурної дискретної системи керування з аналоговим виконавчим механізмом наведена на рис.3.1.

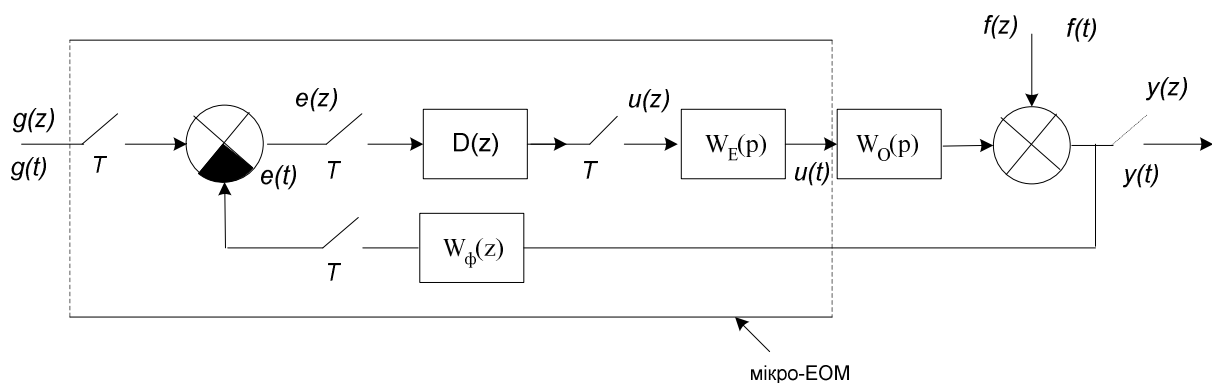


Рис. 3.1. Розрахункова структурна схема одноконтурної дискретної системи керування з аналоговим виконавчим механізмом

Система має такі особливості:

1) на мікро-ЕОМ реалізується дискретний регулятор, передаточна функція якого  $D(z)$ , і дискретний фільтр, передаточна функція якого  $W_\Phi(z)$ ; дискретні виходи регулятора запам'ятовуються протягом періоду дискретності системи  $T$  екстраполятором нульового порядку, передаточна функція якого  $W_E(z)$ ;

2) керована змінна  $y(t)$  подається у мікро-ЕОМ, де порівнюється з заданим значення  $g(t)$ ; отже, сигнал розузгодження  $e(t)$  теж обчислюється у мікро-ЕОМ;



3) вихідний сигнал з мікро-ЕОМ (керуючий вплив  $u(t)$ ) через пристрій зв'язку з об'єктом (ПЗО) у вигляді безперервного сигналу подається на аналоговий виконавчий механізм; отже, розглядувана система є системою **прямого цифрового керування**;

4) збурюючий вплив  $f(t)$  прикладений до виходу об'єкта керування (ОК).

Під терміном "регулятор" розуміють алгоритм цифрового керування, що реалізує мікро-ЕОМ на основі поточних і попередніх значень керуючого впливу регулятора. Цей алгоритм може бути поданий у вигляді рекурентного різницевого рівняння або дискретної передаточної функції  $D(z)$ . Розрахунок дискретних систем зводиться до вибору передаточної функції  $D(z)$  відповідно до обраного критерію оцінки якості замкненої системи.

### **3.2. Вимоги, що висуваються до дискретної системи керування**

1. Для одноконтурних дискретних систем керування, що здійснюють стабілізацію технологічних параметрів, найважливішими вимогами є стійкість і астатизм системи.

2. Вимоги до якості перехідних процесів керованої змінної визначаються залежно від вимог технології і не є одними й тими самими для усіх систем керування. Однак для усіх систем бажаними є аперіодичні процеси, по можливості, мінімальні за тривалістю.

3. Характерною особливістю усіх систем стабілізації є мінливість динамічних властивостей ОК при зміні їх продуктивності. У зв'язку з цим

алгоритми цифрового керування повинні бути, по можливості, малочутливими до зміни параметрів ОК або мати властивості адаптації.

4. Для мікро-ЕОМ, обчислювальні можливості яких обмежені, актуальною є компактність алгоритмів з точки зору мінімізації ємності потрібної пам'яті і забезпечення найбільшої швидкодії при визначенні керуючих впливів.

Усі перелічені вимоги повинні бути взяті до уваги при виборі дискретного регулятора.

### 3.3. Дискретний ІІ-регулятор

Передаточна функція аналогового ІІ-регулятора:

$$W_p(p) = \frac{u(p)}{e(p)} = k_1 + \frac{1}{T_1 p} = k_1 + \frac{k_2}{p} \quad (3.1)$$

де  $k_1 = k_p$ ;  $k_2 = 1/T_1$  причому  $k_p$  - коефіцієнт підсилення регулятора, а  $T_1$  - стала часу інтегральної складової (І).

У дискретній формі передаточна функція (3.1) матиме такий вигляд:

$$D(z) = \frac{k_1 + (k_2 T + k_1) z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (3.2)$$

де  $T$ - період дискретності.

Тоді різницеве рівняння або алгоритм ІІ-регулятора запишеться так:

$$u(n) = u(n-1) + k_1 e(n) - (k_1 - k_2 T) e(n-1) \quad (3.3)$$

Фундаментальні дослідження систем керування з цифровими ПІ-регуляторами і зіставлення їх з аналоговими ПІ-регуляторами зараз добре відомі

[3]. Тут подано лише головні висновки, що стосуються ОК, моделлю якого є аперіодична ланка першого порядку із запізнюванням, тобто

$$W_o(p) = \frac{k_o \exp(-p\tau)}{T_o p + 1} \quad (3.4)$$

де  $k_o$ ,  $T_o$ ,  $\tau$  - коефіцієнт підсилення, стала часу і запізнювання відповідно.

1. При  $T < 0.1 < \tau$  межі області стійкості дискретних систем майже збігаються з межами області стійкості безперервних систем, що дозволяє при виконанні наведеної умови аналіз дискретних систем виконувати методами аналізу безперервних систем.

2. Збільшення періоду дискретності  $T$  призводить, як правило, до звуження меж стійкості дискретної системи порівняно з безперервною. Тільки у випадках, коли  $3 < \tau / T_o < 5$  і  $0.5 < \tau / T < 1$ , область стійкості дискретної системи дещо перевищує область стійкості безперервної системи з ПІ-регулятором.

3. Збільшення періоду дискретності  $T$  призводить до погіршення якості керування.

4. При  $\tau / T_o > 1$  застосування ПІД-регулятора недоцільне, оскільки показники якості керування мало відрізняються від таких з ПІ-регулятором.

5. Для ОК, що поданий моделлю чистого запізнювання, при  $\tau / T_o > 5$ , доцільно застосовувати дискретний І-регулятор ( $k_1 = 0$ ), для якого повинні

виконуватися умови:  $T=1.2\tau$ ,  $k_0k_2T=1$ . Вибір інших співвідношень між вказаними параметрами призводить до погіршення якості роботи системи.

6. Для забезпечення найкращої якості перехідних процесів за інших рівних умов треба, щоб запас стійкості керуючого впливу у 1.5-2 рази перевищував значення, потрібне для компенсації збурення.

З різницевого рівняння (3.3), тобто алгоритму дискретного ПІ-регулятора, випливає, що на відміну від аналогового ПІ-регулятора, дискретний регулятор має три параметри настроювання, причому два з них ( $k_1$  і  $k_2$ ) аналогічні за змістом параметрам настроювання аналогового ПІ-регулятора, а третій ( $T$ ) з'являється внаслідок дискретного характеру роботи замкненої системи.

Обмежена швидкодія мікро-ЕОМ і ПЗО обумовлюють необхідність вибору періоду дискретності системи  $T$  близьким до "максимального"  $T_{max}$ .

У праці [2] критерієм вибору граничного періоду дискретності системи взято умову, згідно з якою у похибці керування повинні бути відсутніми пульсації, обумовлені квантуванням її за часом. Тоді, згідно з теоремою Котельнікова

$$T_{max} \leq \frac{\pi}{\omega_3} \quad (3.5)$$

де  $\omega_3$  - частота зрізання розімкненої системи, при якій модуль частотної характеристики замкненої системи дорівнюватиме деякому значенню  $\Delta \ll 1$ .

Для дискретної системи з ОК, поданим моделлю (3.4), і дискретним ПІ-регулятором при  $\Delta = 0.5$

$$T_{\max} \leq \frac{0.157T_o}{k_o k_1} \quad (3.6)$$

Якщо  $T_{\max}$  обраний раніше з інших міркувань, наприклад, граничної можливості засобів обчислювальної техніки, то вираз (3.6) застосовується для визначення обмежень на параметри настроювання дискретних регуляторів з тим, щоб не допустити виникнення пульсацій при квантуванні сигналу розузгодження.

### 3.4. Дискретний ПІД-регулятор

Передаточна функція аналогового ПІД-регулятора з низькочастотним фільтром у каналі диференціювання [1] має вигляд:

$$W_p(p) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_1 p} + \frac{T_D p}{T_\phi p + 1} \right) \quad (3.7)$$

де  $T_D$  - стала часу диференціальної складової (Д);  $T_\phi$  - стала часу низькочастотного фільтра.

Застосовуючи до рівняння (3.7) дискретне перетворення Лапласа, дістанемо дискретну передаточну функцію ПІД-регулятора

$$D(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (3.8)$$

де

$$b_0 = k_p \left[ 1 + \frac{T}{2T_1} + \frac{T_D}{T} \left( 1 - \exp\left(-\frac{T}{T_\phi}\right) \right) \right]$$

$$b_1 = k_p \left[ -1 + \frac{T}{2T_1} - 2\frac{T_D}{T} + \exp\left(-\frac{T}{T_\phi}\right) \left( 1 - \frac{T}{2T_1} + \frac{2T_D}{T} \right) \right]$$

$$b_2 = k_p \left[ \frac{T_D}{T} + \exp\left(-\frac{T}{T_\phi}\right) \left( 1 - \frac{T}{2T_1} + \frac{T_D}{T} \right) \right]$$

$$a_1 = -\left( 1 + \exp\left(-\frac{T}{T_\phi}\right) \right); \quad a_2 = \exp\left(-\frac{T}{T_\phi}\right); \quad z = \exp(pT);$$

Для того, щоб дискретна система мала властивості, близькі, до властивостей аналогової системи, її період дискретності обирають досить малим, але таким, що відповідає теоремі Котельнікова. Тоді частота переривання сигналу матиме вигляд:

$$f = 1/T \geq \omega_s / \pi \quad (3.9)$$

На практиці згідно з умовою одержання квазібезперервної системи, а також забезпечення її стійкості, рекомендують жорсткіші обмеження вибору величини періоду дискретності. Враховуючи, що смуга пропускання частот замкненої системи керування приблизно у 2...3 рази перевищує частоту зрізання, при виборі  $T$  доцільно виходити з умови:

$$T \approx 1 / (2...3)\omega_s \quad (3.10)$$

якій відповідає частота пропускання

$$f = (2...3)\omega_s \quad (3.11)$$

У [12] пропонуються ще жорсткіші умови вибору величини  $T$ :

$$T / T_{\max} \cong 0.02 \quad (3.12)$$

де  $T_{\max}$  - найбільша стала часу керованого об'єкта.

Треба, однак, врахувати, що при подальшому зменшенні періоду дискретності системи диференціальна складова цифрового регулятора (Д)

починає негативно впливати на стрибки квантування при аналогово-дискретному перетворенні сигналів. Застосувавши до рівняння (3.8) зворотне перетворення Лапласа і узявши  $T_\phi=0$ , дістанемо:

$$u(t) = k_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_1} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (3.13)$$

або наближено у дискретній формі

$$u(n) = k_p \left\{ e(n) + \frac{1}{T_1} \left[ \frac{e(0)+e(1)}{2} \right] + \dots + \frac{e(n-1)+e(n)}{2} + T_D \left[ \frac{e(n)-e(n-1)}{T} \right] \right\} \quad (3.14)$$

або у вигляді П-, І-, Д-складових

$$u(n) = u_{\text{П}}(n) + u_{\text{І}}(n) + u_{\text{Д}}(n) \quad (3.15)$$

де  $n=1,2,3,\dots$

Останній доданок у рівнянні (3.14), що має  $T$  у знаменнику, при стрибкуватих приростах  $e(n)$  і малій величині  $T$  може наближатися до нескінченності, особливо при різких змінах керуючого впливу на вході системи.

### 3.5. Позиційні та швидкісні алгоритми

Відомі дві форми запису різницевого рівняння керування:

- для позиційного керування повинен виконуватися розрахунок повної вихідної величини регулятора, тобто його керуючого впливу

$$u(n) = \varphi(e(n)) \quad (3.16)$$

- для керування швидкістю розраховується його приріст

$$\Delta u(n) = \varphi(e(n)) \quad (3.17)$$

Для визначення повного керуючого впливу регулятора (3.16) і приросту швидкості керування (3.17) запропоновано цілу низку алгоритмів. Дослідимо спочатку алгоритм ПІД-регулятора (3.14), розглянувши кожен з його складових (3.15) окремо.

**Пропорційна** складова  $u_{II}(n)$  може безпосередньо застосовуватися в алгоритмі пропорційного керування. Для цього треба лише підставити у рівняння

$$u_{II}(n) = k_p e(n) \quad (3.18)$$

значення розузгодження  $e(n)$  у моменти часу  $nT$  опитування датчиків положення виконавчих механізмів.

У швидкісному алгоритмі повинні застосовуватися попередньо визначені прирости керуючого впливу:

$$\Delta u_{II}(n) - u_{II}(n) - u_{II}(n-1) = k_p [e(n) - e(n-1)] \quad (3.19)$$

**Інтегральна** складова для пропорційного керування може бути подана у вигляді:

$$u_I(n) = k_p \frac{T}{T_I} \sum_{r=0}^n \frac{e(r-1) + e(r)}{2} \quad (3.20)$$

або

$$u_I(n) = u_I(n-1) + k_I e(n) \quad (3.21)$$

де

$$k_I = k_2 T / T_I = k_1 k_2 T$$



З рівняння (3.21) одержимо вираз для швидкісного алгоритму:

$$\Delta u_I(n) = \frac{u_I(n) + u_I(n-1)}{2} = k_I e(n) \quad (3.22)$$

Сигнал на виході диференціальної ланки для позиційного алгоритму матиме вигляд:

$$u_D(n) - k_D [e(n) - e(n-1)], \quad (3.23)$$

а для швидкісного алгоритму:

$$\Delta u_D(n) = u_D(n) - u_D(n-1) - k_D [e(n) - 2e(n-1) + e(n-2)], \quad (3.24)$$

де  $k_D = k_p T_D T = k_I T_D T$ .

На практиці для фільтрації високочастотних шумів застосовується **реальна диференціальна ланка** зі сталою часу  $T_\phi$ . Сигнал на її виході при позиційному алгоритмі в аналоговій формі описується рівнянням:

$$V_D(n) = \frac{de(t)}{dt} - T_\phi \frac{dV_D}{dt},$$

у дискретній формі він матиме вигляд:

$$V_D(n) = \frac{e(n) - e(n-1)}{T} - \frac{T_\phi}{T} [V_D(n) - V_D(n-1)]$$

або після z-перетворень:

$$V_D(n) = \frac{T_\phi}{T_\phi + T} + u_D(n-1) + \frac{k_p T_D}{T_\phi + T} [e(n) - e(n-1)].$$

Для швидкісного алгоритму дістанемо:

$$\Delta u_D(n) = \frac{T_\phi}{T_\phi + T} + u_D(n-1) + \frac{k_p T_D}{T_\phi + T} [e(n) - 2e(n-1) + e(n-2)]. \quad (3.25)$$

На основі одержаних залежностей для конкретних умов роботи даного контуру керуюча обчислювальна машина розраховує складові рівняння (3.15), додає їх, а потім перевіряє на обмеження по максимуму одержану величину керуючого впливу, тобто  $u(n) \leq u_{\max}$ . Якщо ця умова виконується, сигнал видається до виконання. При цьому дія кожної зі

складових програмним шляхом може бути підсилена, послаблена або взагалі вилучена, тобто можлива реалізація цифрової системи керування зі змінною структурою і динамічним вибором як типів регуляторів (П, ПІ, ПІД), так і їх параметрів.

Так, наприклад, усі аналогові регулятори мають обмежений діапазон керування. Таке обмеження треба передбачувати і в алгоритмі дискретних регуляторів, тобто обмеження на діапазон зміни керуючого впливу  $u(n)$ . Часто це забезпечує поліпшення якості керування нарівні зі стабілізуючим ефектом. Структурно обмеження величини  $u_1(n)$  виявляється як вимкнення інтегральної складової  $u_1(n)$  ШД-регулятора і є структурною зміною з переходом від ПІД-регулятора до ПД-регулятора.

Вибір оптимальних значень параметрів  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $T$  розглянутих вище дискретних регуляторів є непростим завданням, оскільки динамічні властивості об'єкта керування часто-густо не залишаються постійними і змінюються при зміні роботи технологічного обладнання. Це призводить до того, що регулятор, настроєний оптимально на певний режим, неефективно працює при зміні розрахункового режиму. Тому подальше вдосконалення дискретних регуляторів здійснювалося шляхом пошуку таких алгоритмів, які мали б мінімум параметрів настроювання і, по можливості, мали найменшу чутливість до змін параметрів об'єкта керування.

Нижче розглядаються деякі з цих алгоритмів.

## 3.6. Дискретний регулятор Даліна

### 3.6.1. Загальна передаточна функція дискретного регулятора Даліна

Регулятор Даліна належить до класу лінійних регуляторів [5, 6, 8]. Його застосування можливе у випадках, коли передаточна функція об'єкта керування або його каналу подана аперіодичною ланкою першого порядку з запізнюванням, тобто

$$W_o(p) = \frac{k_o \exp(-p\tau)}{T_o p + 1}, \tau > T_o, (3.26)$$

де  $k_o$ ,  $T_o$ ,  $\tau$  - коефіцієнт підсилення, стала часу і запізнювання відповідно, або аперіодичною ланкою другого порядку з запізнюванням

$$W_o(p) = \frac{k_o \exp(-p\tau)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \tau > T_1 > T_2, (3.27)$$

де  $T_1$ ,  $T_2$  - сталі часу.

В основу аналітичного конструювання дискретного регулятора Даліна, тобто одержання аналітичним шляхом дискретної передаточної функції регулятора, покладені такі припущення:

- 1) алгоритм керування повинен забезпечувати аперіодичний процес зміни керованої змінної та її астатизм при зміні задавального впливу оператором-технологом;
- 2) кількість параметрів настроювання регулятора повинна бути мінімальною;
- 3) регулятор має застосовуватися в одноконтурних автоматичних системах керування (АСК) з аналоговими виконавчими механізмами.

У цьому випадку розрахункова структурна схема (рис. 3.1) може бути спрощена і подана так, як показано на рис.3.2, де  $W_O(p)$  - передаточна функція об'єкта керування (або його каналу),  $W_E(p)$  - передаточна функція екстраполятора нульового порядку,  $W_\Phi(z)$  - передаточна функція фільтра,  $D_d(z)$  - шукана передаточна функція дискретного регулятора Даліна;  $y(z)$ ,  $g(z)$ ,  $e(z)$  - відповідно зображення вихідної змінної, сигналу завдання і розузгодження між ними;  $T$  - період дискретності системи,  $T_\Phi$  - стала часу фільтра, причому  $T_\Phi > T$ .

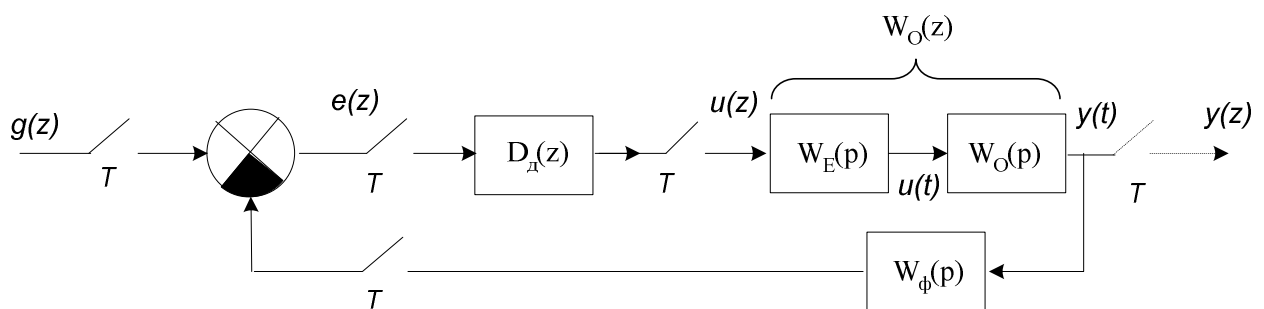


Рис. 3.2. Спрощена структурна схема одновимірної дискретної автоматичної системи керування з регулятором Даліна

Виходячи зі структурної схеми (рис.3.2), можна записати:

$$y(z) = W_o(z)D_d(z)[g(z) - y(z)], \quad (3.28)$$

причому

$$W_o(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_o(p)W_\phi(p)}{p} \right\}. \quad (3.29)$$

Отже, дискретна передаточна функція регулятора Даліна

$$D_d(z) = \frac{1}{W_o(z)} \frac{y(z)/g(z)}{1 - y(z)/g(z)}. \quad (3.30)$$

Відповідно до вимог, що висунуті до розробки регулятора Даліна, передаточна функція замкненої системи повинна бути записана так:

$$\Phi(p) = \frac{\exp(-p\tau)}{T_3 p + 1}, \quad (3.31)$$

де  $\tau$  - запізнювання у системі, що дорівнює запізнюванню в каналі керування;

$T_3$  - стала часу замкненої системи.

У z-формі передаточна функція (3.31) запишеться так:

$$\Phi(z) = \frac{y(z)}{g(z)} \frac{1 - a_3}{1 - a_3 z^{-1}} z^{-(k+1)}, \quad (3.32)$$

де  $a_3 = \exp(-T/T_3)$ ;  $k = \tau/T$ .

Підставивши вираз (3.32) у рівняння (3.30), одержимо у загальному вигляді передаточну функцію дискретного регулятора Даліна:

$$D_d(z) = \frac{1}{W_o(z)} \frac{(1 - a_3) z^{-(k+1)}}{1 - a_3 z^{-1} - (1 - a_3) z^{-(k+1)}}. \quad (3.33)$$

### 3.6.2. Типи дискретного регулятора Даліна

#### 3.6.2.1. Дискретний регулятор Даліна типу I

Запишемо у z-формі передаточну функцію (3.26) за умови, що  $k$  - ціле число, у вигляді:

$$W_o(z) = \frac{k_o(c_1 + c_2 z^{-1})}{1 - a_p z^{-1}} z^{-(k+1)}, \quad (3.34)$$

де  $a_p = \exp(-T/T_o)$ ;  $k = \tau/T$ ;  $a = -(\tau - kT)/T$ ;

$c_1 = 1 - \exp(-aT/T_o)$ ;  $c_2 = \exp(-aT/T_o) - \exp(-T/T_o)$ .

Підставивши вираз (3.34) у загальну передаточну функцію дискретного регулятора Даліна, одержимо передаточну функцію дискретного регулятора Даліна типу I у вигляді:

$$D_D(z) = \frac{(1-a_3)(1-a_p z^{-1})}{\left[1-a_3 z^{-1} - (1-a_3)z^{-(k+1)}(c_1 + c_2 z^{-1})\right] k_o} \cdot (3.35)$$

### 3.6.2.2. Дискретний регулятор Даліна типу II

Якщо ОК або один з його каналів керування поданий передаточною функцією (3.27), то у z-формі вона виглядатиме так:

$$W_o(z) = \frac{k_o(c_3 + c_4 z^{-1})}{(1-a_{p1} z^{-1})(1-a_{p2} z^{-1})} z^{-(k+1)}, (3.36)$$

де  $a_{p1} = \exp(-T/T_1)$ ;  $a_{p2} = \exp(-T/T_2)$ ;  $c_3 = 1 + (a_{p1}T_1 - a_{p2}T_2)/(T_2 - T_1)$ ;

$c_4 = \exp(-T/T_1 - T/T_2) + (a_{p1}T_1 - a_{p2}T_2)/(T_2 - T_1)$ .

Підставивши вираз (3.36) у загальну передаточну функцію дискретного регулятора Даліна, дістанемо передаточну функцію дискретного регулятора Даліна типу II у вигляді:

$$D_D(z) = \frac{(1-a_3)(1-a_{p1} z^{-1})(1-a_{p2} z^{-1})}{k_o \left[1-a_3 z^{-1} - (1-a_3)z^{-(k+1)}\right] (c_3 + c_4 z^{-1})} \cdot (3.37)$$

### 3.6.2.3. Дискретний регулятор Даліна типу III

Якщо у передаточній функції (3.34)  $a=0$ , тоді

$$W_o(z) = k_o \frac{1-a_p}{1-a_p z^{-1}} z^{-(k+1)}. (3.38)$$

Підставивши дискретну передаточну функцію (3.38) у загальну передаточну функцію цифрового регулятора Даліна (3.33), дістанемо найпростішу і компактну передаточну функцію дискретного регулятора Даліна типу III у вигляді:

$$D_D(z) = \frac{(1-a_3)(1-a_p z^{-1})}{k_o(1-a_p)[1-a_3 z^{-1} - (1-a_3)z^{-(k+1)}]}. \quad (3.39)$$

Для вирішення питання щодо вибору параметрів фільтра, розглянемо його особливості.

#### 3.6.2.4. Залежність сталої часу дискретного фільтра від періоду дискретності системи

Класична схема каналу для вимірювання вихідної змінної  $y(t)$  за допомогою аналогових засобів автоматизації наведена на рис. 3.3.

Вихідна змінна  $y_1$  об'єкта керування (ОК) вимірюється за допомогою вимірювального пристрою (ВП), в результаті чого формується вихідний сигнал  $y_2$ , на який накладається високочастотний шум  $b(t)$ . Одержаний таким чином "зашумлений" вихідний сигнал  $y_3$  надходить до аналогового фільтра (АФ) для фільтрації цього шуму і одержання власне значення вихідної змінної  $y(t)$ .

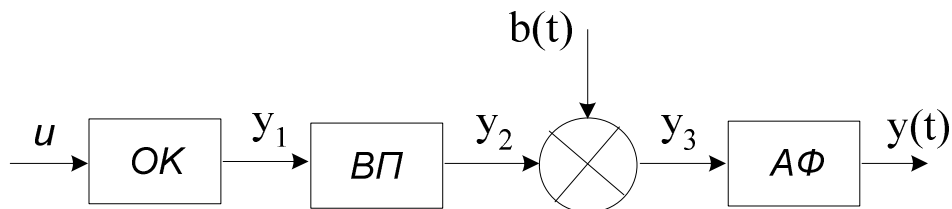


Рис. 3.3. Схема вимірювання вихідної змінної за допомогою аналогових засобів автоматизації

Схема каналу вимірювання вихідної змінної за допомогою дискретних засобів автоматизації має ту ж структуру (рис. 3.4).

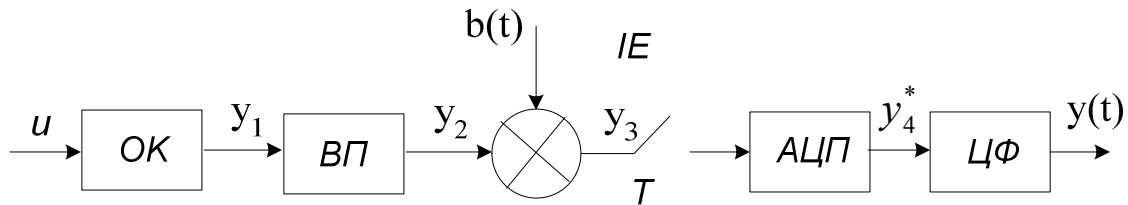


Рис. 3.4. Схема вимірювання вихідної змінної за допомогою дискретних засобів автоматизації

Тут, як і в попередній схемі, "зашумлена" вихідна змінна  $y_1$  після імпульсного елемента (ІЕ) надходить до аналогово-цифрового перетворювача (АЦП), вихідний сигнал якого  $y_4^*$  подається на цифровий фільтр (ЦФ).

Треба зазначити, що ЦФ має ті ж властивості, ще і АФ (смуга пропускання, частота зрізання і т.ін.), однак схеми, подані на рис. 3.3 і 3.4, не еквівалентні.

Дійсно, якщо припустити, що  $f_3$  - частота зрізу фільтра ЦФ, а  $f_b$  - частота шуму, спектр якого має максимальне значення на частоті  $f_b$ , то АФ відфільтрує весь шум від вимірюваної змінної (рис. 3.5).



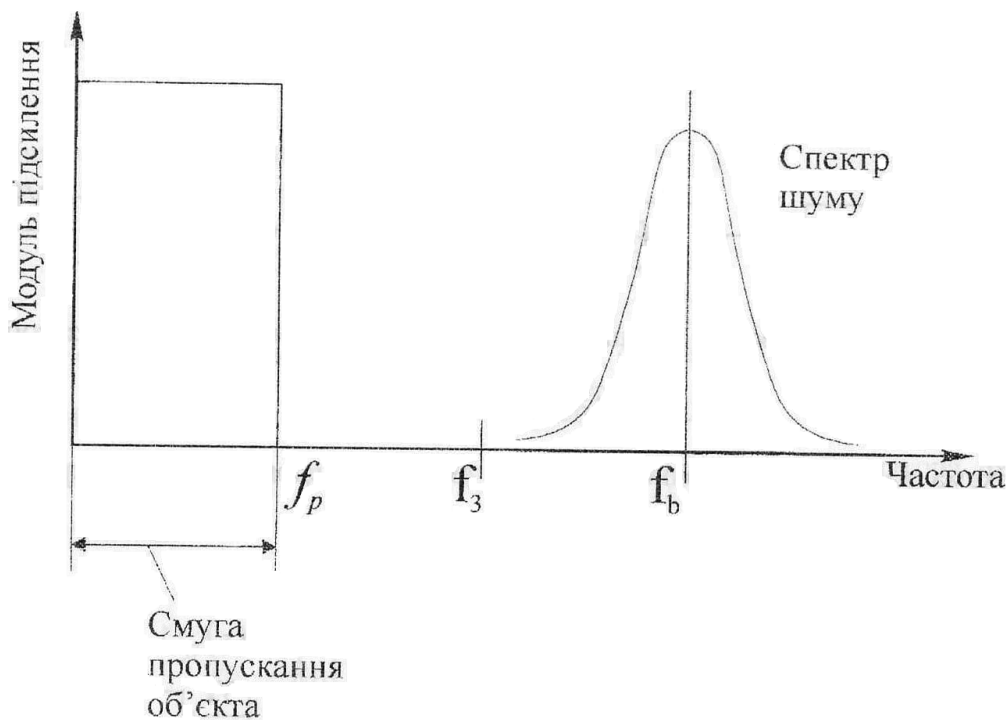


Рис. 3.5. Амплітудний спектр шуму

У ЦФ операція квантування сигналу спричиняє те, що називають "дією ковзання частот". Таке явище виникає тому, що дискретний сигнал є сумою окремих дискрет, і тому ковзання частот зміщує спектр шуму до області низьких частот (рис. 3.6).

Як відомо [11], ЦФ не впливає на шум низьких частот і тому після цифрової фільтрації зашумленої змінної треба здійснювати аналогічну фільтрацію у мікро-ЕОМ.

Пропускна здатність ЦФ залежить, головним чином, від частоти переривання безперервного сигналу, що характеризує виміряну вихідну змінну, яка, у свою чергу, залежить від застосованого фільтра. Для визначення сталої часу фільтра припустимо, що  $f_p$  — частота зрізання об'єкта керування, де спектр практично дорівнює нулю. Тоді, згідно з імпульсною теоремою Котельнікова, частота переривання сигналу,  $f_e \geq 2f_p$ .

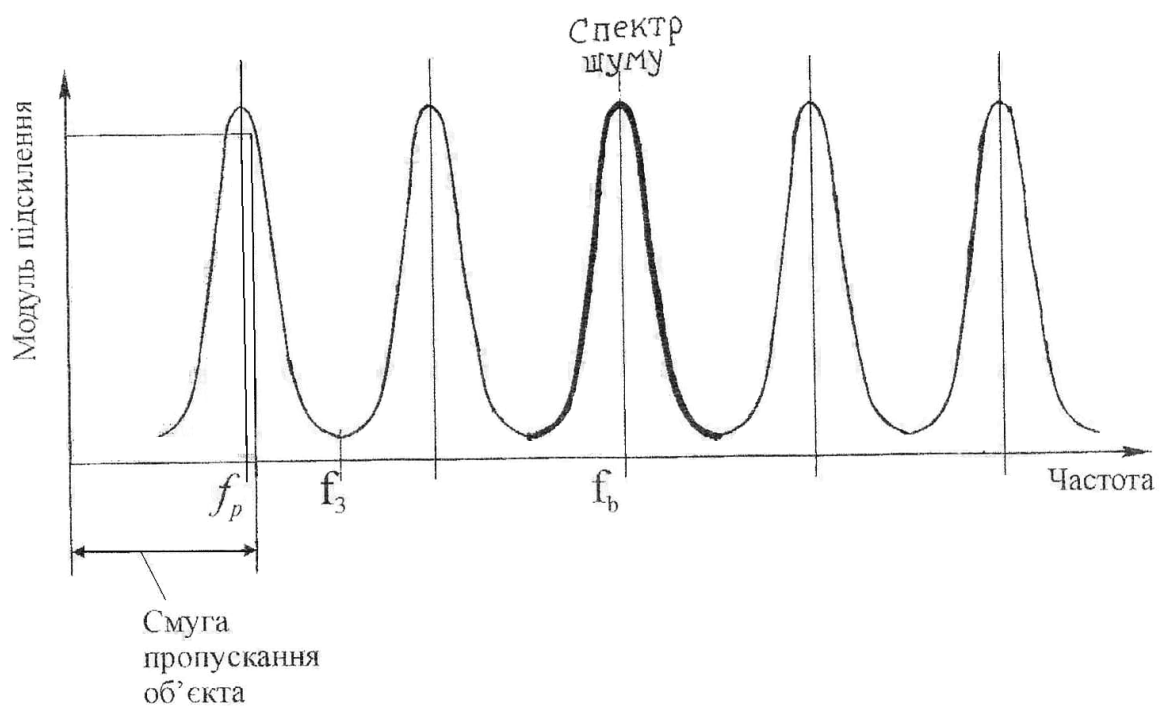


Рис. 3.6. Зсув спектру шуму до області низьких частот під час роботи кантувача

З іншого боку, для частоти переривання  $f_e$ , можна взяти до уваги і частоту переривання  $f_e/2$ . Так можна зменшити дію "ковзання частот", а смугу пропускання АФ визначити, виходячи з частоти переривання. Якщо  $f_\phi$  – гранична частота фільтра з заданими характеристиками (6 ДБ на октаву і т.ін.), то вказану частоту можна визначити за формулою:

$$f_\phi = kf_e,$$

де  $k$  - коефіцієнт пропорційності, що залежить від характеристик фільтра.

Якщо припустити, що фільтр згладжує до 90% шуму на частоті переривання  $\omega_e$ , і, якщо фільтром є аперіодична ланка першого порядку, то значення амплітудно-частотної характеристики такого фільтра

$$A(\omega_e) = \frac{1}{\sqrt{1+T_\phi^2\omega_e^2}} \leq \frac{1}{10},$$

де  $T_\phi$  - стала фільтра.

$$\text{Отже } 100 \leq 1+T_\phi^2\omega_e^2 \Rightarrow 10 \leq T_\phi\omega_e$$

Оскільки  $\omega_e = 2\pi \cdot f_e$ , то

$$T_\phi \geq \frac{10}{2\pi \cdot f_e}. \quad (3.40)$$

З іншого боку,  $1/f_e = T$  - період дискретності системи, тому стала часу фільтра

$$T_\phi \geq \frac{10}{2\pi} T. \quad (3.41)$$

Якщо, наприклад, період дискретності системи  $T=5$  с, то стала часу АФ згідно (3.41) повинна бути більше 8 с.

З аналізу формули (3.41) випливає дуже важливий висновок: стала часу фільтра повинна бути приблизно у **1.5 рази більше ніж період дискретності системи.**

Місце ввімкнення фільтра показано на рис. 3.2. Тоді передаточна функція ОК подається у такому вигляді:

$$W_o(p) = \frac{1 - \exp(-pT)}{p} \frac{k_o \exp(-p\tau)}{T_o p + 1} \frac{1}{T_\phi p + 1}. \quad (3.42)$$

У z-формі передаточна функція (3.42) матиме вигляд

$$W_o(z) = k_o \frac{\alpha + \beta \cdot z^{-1}}{(1 - a_p z^{-1})(1 - a_\phi z^{-1})} z^{-(k+1)}, \quad (3.43)$$

де  $a_\phi = \exp(-T/T_\phi)$ ;  $a_p = \exp(-T/T_o)$ ;  $k = \tau/T$ ;

$$\alpha = 1 - \frac{a_\phi T_\phi - a_p T_o}{T_\phi - T_o}; \quad \beta = \alpha_\phi \alpha_p - \frac{\alpha_p T_\phi - \alpha_\phi T_o}{T_\phi - T_o}.$$

### 3.6.2.5. Дискретний регулятор Даліна типу IV

Підставивши передаточну функцію (3.43) у вираз (3.33), дістанемо передаточну функцію дискретного регулятора Даліна типу IV, що здійснює також фільтрацію вихідної змінної перед її поданням у дискретний регулятор, у такому вигляді:

$$D_D(z) = \frac{(1-a_3)(1-a_\phi z^{-1})(1-a_p z^{-1})}{k_O(1-a_p) \left[ (1-a_\phi z^{-1})(1-a_3 z^{-1}) - \frac{1-a_3}{1-a_p} (\alpha + \beta \cdot z^{-1}) z^{-(k+1)} \right]}. \quad (3.44)$$

Якщо  $T_\phi \rightarrow 0$ , то  $a_\phi = \exp(-T/T_\phi) \rightarrow 0$ , і, отже,  $\alpha \rightarrow 1-a_p$ ,  $\beta \rightarrow 0$ . Тоді передаточна функція дискретного регулятора Даліна типу IV перетворюється на передаточну функцію дискретного регулятора типу III.

### 3.6.2.6. Дискретний регулятор Даліна типу V

Як довели результати роботи дискретних регуляторів Даліна типів I і II у промислових умовах, в їх керуючих впливах можуть виявлятися значні коливання, які називають "рябизною". Ця особливість вказаних регуляторів, що називається "**коливністю**", залежить від близькості розташування полюсів передаточних функцій (3.35) і (3.37) у колі з радіусом  $|z|=1$  до  $z=-1$ .

В автоматичних системах керування, де застосовується дискретний регулятор Даліна типу I, на коливність може впливати будь-який з коренів знаменника передаточної функції (3.35). Тому при аналітичному конструюванні регулятора Даліна треба ретельно проаналізувати знаменник передаточної функції (3.35). Множник  $(c_1 + c_2 z^{-1})$  має полюс

$z = -c_2/c_1$ . Множник  $(1 - a_3 z^{-1} - (1 - a_3)z^{-(k+1)})$ , наприклад при  $k=2$ , матиме вигляд  $(1 - a_3 z^{-1}) - (1 - a_3)z^{-3}$  або

$$1 - a_3 z^{-1} - (1 - a_3)z^{-3} = (1 - z^{-1})(1 + (1 - a_3)z^{-1} + (1 - a_3)z^{-2}). \quad (3.45)$$

Тут корінь  $z_1 = 1$ , а корені

$$z_{2,3} = \frac{(1 - a_3)}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 - a_3)^2}{2} - (1 - a_3)},$$

причому

$$|z_{2,3}| = \sqrt{1 - a_3} = \sqrt{1 - \exp\left(\frac{-T}{T_3}\right)}.$$

Для забезпечення стійкості системи з дискретним регулятором Даліна типу I треба, щоб при  $t \rightarrow \infty \exp(-T/T_3) \rightarrow 0$ . У цьому випадку, згідно з рівнянням (3.45)  $z \rightarrow -1$ , і отже система наближається до коливного режиму.

Коливності у дискретній системі можна позбутися, якщо її загрубити шляхом підстановки кореня  $z=1$  у ті множники знаменників передаточних функцій, які викликають цю коливність. Наприклад, якщо підставити  $z=1$  у правий множник рівняння (3.45), дістанемо передаточну функцію дискретного регулятора Даліна типу V, який не спричиняє коливності керуючого впливу. Передаточна функція такого регулятора матиме вигляд:

$$D_D(z) = \frac{(1 - a_3)(1 - a_p z^{-1})}{k_o(c_1 + c_2)(3 - 2a_3)(1 - z^{-1})}, \quad T = \frac{\tau}{2}. \quad (3.46)$$

Як видно з (3.46) - це передаточна функція дискретного аналога ПІ-регулятора.

### 3.6.2.7. Дискретний регулятор Даліна типу VI

В автоматичних системах керування, де застосовується дискретний регулятор Даліна типу II, коливність керуючого впливу може викликати будь-який множник знаменника передаточної функції (3.37). Множник  $(c_3 + c_4 z^{-1})$  має полюс  $z_1 = -c_4/c_3$ . Множник  $1 - a_3 z^{-1} - (1 - a_3)z^{-(k+1)}$ , наприклад при  $k=1$ , можна розкласти так:

$$1 - a_3 z^{-1} - (1 - a_3)z^{-2} = (1 - z^{-1})(1 + (1 - a_3)z^{-2}).$$

Отже,  $z_2=1$ , а

$$z_3 = -(1 - a_3) = -(1 - \exp(-T/T_3)). \quad (3.47)$$

Для збільшення стійкості дискретної системи з розглядуваним регулятором треба, щоб при  $t \rightarrow \infty \exp(-T/T_3) \rightarrow 0$ . Однак, як видно з (3.47) це приводить до того, що  $z_3 \rightarrow -1$ , тобто до появи коливності у системі. Щоб запобігти цьому, підставимо у (3.47)  $z=1$ . Тоді при  $k = \tau/T = 1$  дістанемо передаточну функцію дискретного регулятора Даліна типу VI, який не спричиняє коливності керуючого впливу. У цьому випадку дискретна передаточна функція регулятора, Даліна типу VI матиме вигляд :

$$D_D(z) = \frac{(1 - a_3)(1 - a_{p1}z^{-1})(1 - a_{p2}z^{-1})}{k_o(c_3 + c_4)(2 - 3a_3)(1 - z^{-1})}, \quad T = \tau. \quad (3.48)$$

Очевидно, що (3.48) - це передаточна функція дискретного аналога ПД-регулятора.

### 3.6.3. Чутливість дискретного регулятора Даліна типу IV до оцінки його параметрів

У процесі проектування дискретної системи керування на базі регулятора Даліна виникає питання: наскільки неточність оцінки параметрів моделі об'єкта керування, сталої часу замкненої системи і періоду дискретності системи впливає на якість процесу керування? Вирішити поставлене питання можна або шляхом дослідження логарифмічної амплітудно-частотної і фазочастотної характеристик (ЛАЧХ і ФЧХ) цього регулятора, або шляхом цифрового моделювання роботи системи керування на ЦОМ.

Об'єктом дослідження оберемо дискретний регулятор Даліна типу IV з передаточною функцією (3.44) і такими технічними даними [5]:

- 1) стала часу об'єкта керування  $T_O = 50\text{с}$ ;
- 2) коефіцієнт підсилення об'єкта керування  $k_O = 1$ ;
- 3) запізнювання в об'єкті керування  $\tau = 90\text{с}$ ;
- 4) стала часу замкненої системи  $T_3 = 60\text{с}$ ;
- 5) стала часу фільтра  $T_\Phi = 45\text{с}$ ;
- 6) цілочислова змінна  $k = \tau/T = 3$ .

Після підстановки у вираз (3.44)  $z^{-1} = \exp(-j\omega T)$  можна визначити амплітудно-частотну  $A(\omega)$  і фазочастотну  $\varphi(\omega)$  характеристики, а з них – відповідну ЛАЧХ.

На рис. 3.7 наведена залежність ЛАЧХ і ФЧХ дискретного регулятора Даліна типу IV від сталої часу об'єкта керування  $T_O$  і частоти  $\omega$ .

На рис. 3.8. наведена залежність ЛАЧХ і ФЧХ регулятора Даліна типу IV від частоти  $\omega$  і цілочислової змінної  $k$ .

На рис. 3.9 наведена залежність ЛАЧХ і ФЧХ регулятора Даліна типу IV від частоти  $\omega$  і сталої часу замкненої системи ТЗ.

На рис. 3.10 наведена залежність ЛАЧХ і ФЧХ регулятора Даліна типу IV залежно від частоти  $\omega$  і періоду дискретності системи Т.

Аналіз ЛАЧХ і ФЧХ дискретного регулятора типу IV дозволяє зробити такі висновки:

1. Оскільки ЛАЧХ дискретного регулятора Даліна типу IV має нахил 6 дБ на октаву, то в усталеному режимі система керування з таким регулятором має нульову усталену похибку.

2. Із збільшенням частоти збурюючого впливу ФЧХ розглядуваного регулятора збільшується. Отже, такий регулятор дозволяє компенсувати транспортне запізнювання, що існує в каналі керування даного об'єкта, оскільки при цьому зменшується зсув фази.

3. Зміна сталої часу об'єкта керування на інтервалі [10, 50] с практично не впливає на зміну ЛАЧХ і ФЧХ дискретного регулятора Даліна типу IV при зміні частоти збурюючого впливу  $\omega$  від  $10^{-5}$  до  $10^{-3}$  Гц (частота переривання системи складає  $3.3 \cdot 10^{-2}$  Гц). Тому, якщо  $\omega < 10^{-3}$  Гц, можливий вибір будь-якого значення сталої часу ТО з інтервалу [10, 50] с. Отже, **дискретний регулятор Даліна типу IV нечутливий до неточності оцінки сталої часу об'єкта керування.**

4. Зміна цілочислової змінної  $k = \tau/T$  мало впливає на зміну ЛАЧХ і ФЧХ дискретного регулятора Даліна типу IV при зміні частоти збурюючого впливу  $\omega$  від  $10^{-5}$  до  $10^{-3}$  Гц. Дійсно, при зміні k від 3 до 10 ЛАЧХ і ФЧХ даного регулятора практично не змінюються. Моделювання на ЦОМ довело, що оптимальне значення  $k = 3$ .



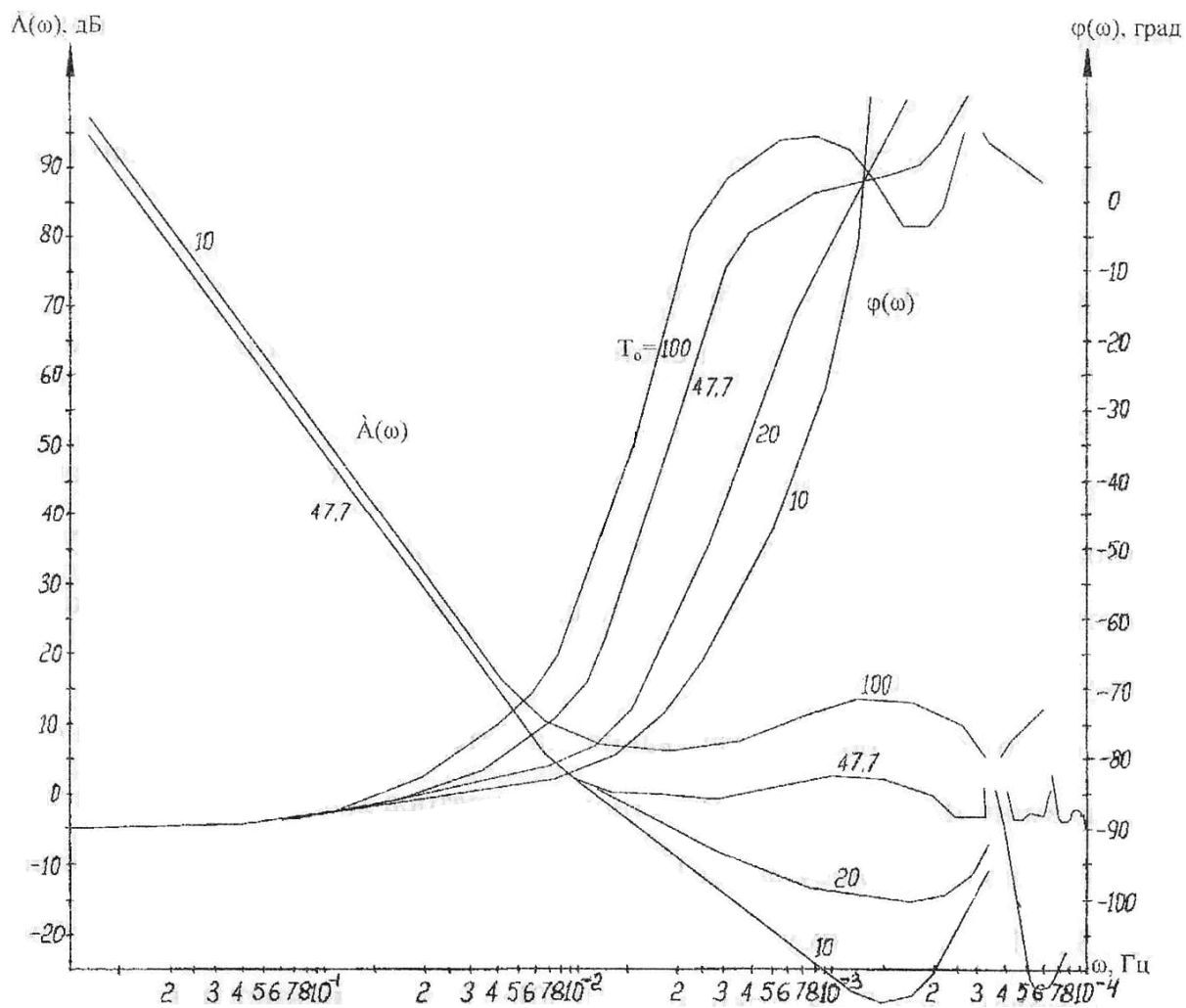


Рис. 3.7. Залежність логарифмічної амплітудно-частотної  $A(\omega)$  і фазочастотної  $\phi(\omega)$  характеристик дискретного регулятора Даліна типу IV від сталої часу об'єкта керування  $T_o$  та частоти  $\omega$

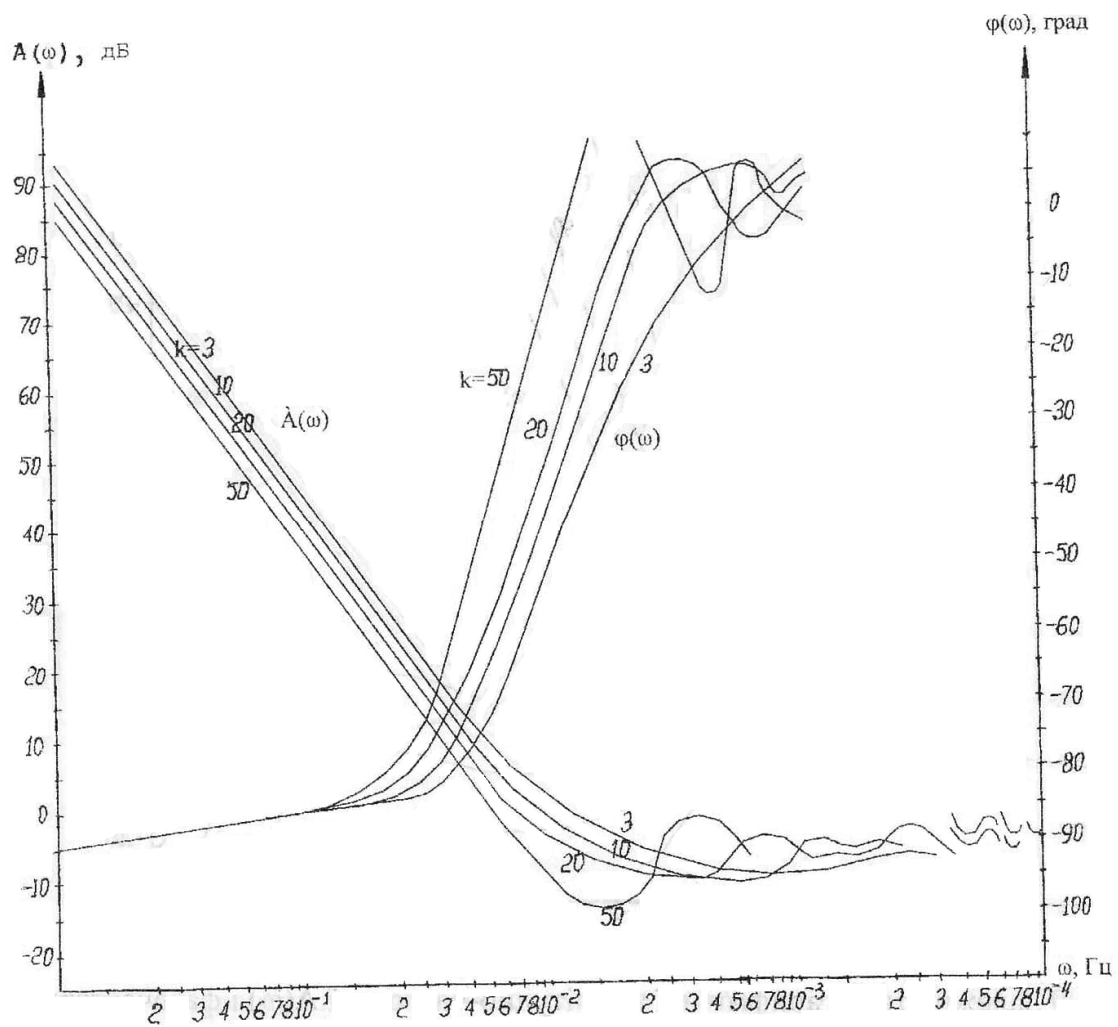


Рис. 3.8. Залежність логарифмічної амплітудно-частотної  $A(\omega)$  і фазочастотної  $\varphi(\omega)$  характеристик дискретного регулятора Даліна типу IV від цілочислової змінної  $k$  та частоти  $\omega$

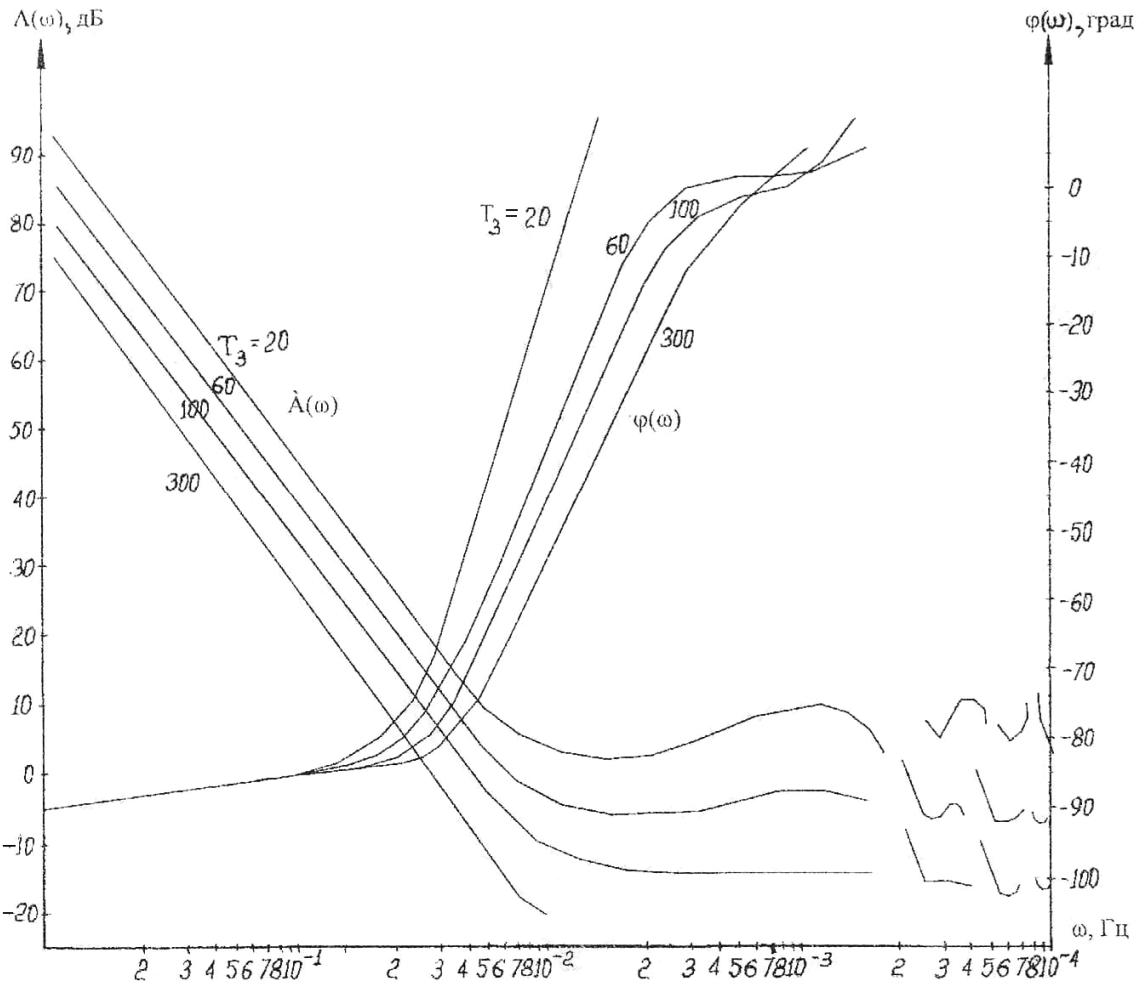


Рис.3.9 Залежність логарифмічної амплітудно-частотної  $A(\omega)$  і фазочастотної  $\varphi(\omega)$  характеристик дискретного регулятора Даліна типу IV від сталої часу  $T$  та частоти  $\omega$

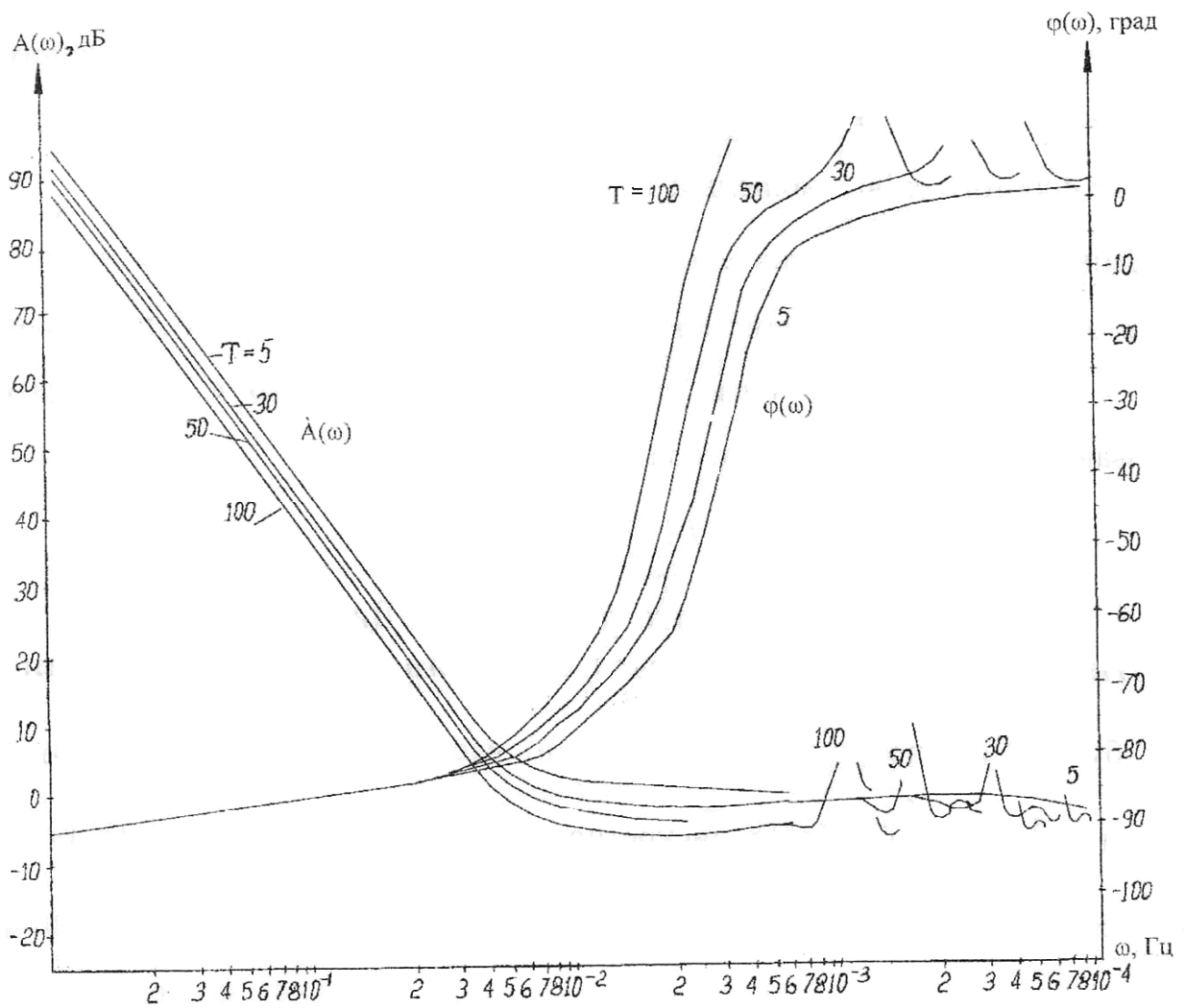


Рис.3.10 Залежність логарифмічної амплітудно-частотної  $A(\omega)$  і фазочастотної  $\phi(\omega)$  характеристик дискретного регулятора Даліна типу IV від періоду дискретності системи  $T$  та частоти  $\omega$

5. Зміна періоду дискретності системи  $T$  виявляє малий вплив на ЛАЧХ і ФЧХ дискретного регулятора Даліна типу IV при зміні частоти збурюючого впливу  $\Omega$  від  $10^{-5}$  до  $10^{-3}$  Гц. Тому період дискретності системи можна обирати, виходячи з простого співвідношення:  $T = \tau / 3$ .

6. Зміна сталої часу замкненої системи  $T_3$  найбільш впливає на числові значення ЛАЧХ і ФЧХ дискретного регулятора Даліна типу IV при зміні частоти  $\Omega$ . Так і повинно бути, оскільки даний параметр є параметром настроювання дискретного регулятора Даліна.

#### **3.6.4. Чутливість дискретного регулятора Даліна типу IV до частоти збурюючого впливу і запізнювання в каналі керування**

Як було показано вище, при зростанні частоти збурюючого впливу в межах від  $10^{-3}$  до  $10^{-2}$  Гц ЛАЧХ дискретного регулятора Даліна типу IV різко змінюється. Більше того, при певній "резонансній" частоті збурюючого впливу спостерігаються "биття" і навіть резонансні явища.

Щоб дослідити ці явища більш детально, визначимо передаточну функцію регулятора Даліна у площині  $p$ . Для цього складемо відповідну структурну схему автоматичної системи керування з аналоговим регулятором Даліна (рис. 3.11).

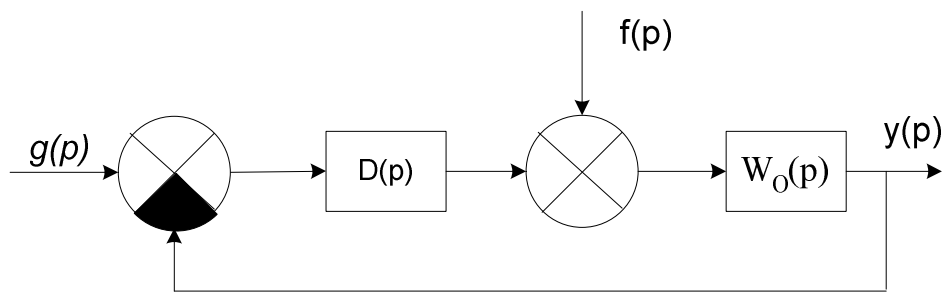


Рис. 3.11. Структурна схема автоматичної системи керування з аналоговим регулятором Даліна

Тоді передаточна функція замкненої системи

$$\Phi(p) = \frac{D(p)W_o(p)}{1 + D(p)W_o(p)} \quad (3.49)$$

Звідси передаточна функція аналогового регулятора Даліна

$$D_d(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - \Phi(p)W_o(p)} \quad (3.50)$$

Якщо

$$\Phi(p) = \frac{\exp(-p\tau)}{T_s p + 1} \quad (3.51)$$

де  $T_s$  - стала часу замкненої системи, а

$$W_o(p) = \frac{k_o \exp(-p\tau)}{T_o p + 1} \quad (3.52)$$

де  $k_o$ ,  $T_o$ ,  $\tau$  - коефіцієнт підсилення, стала часу і запізнювання моделі ОК, тоді передаточна функція

$$D_d(p) = \frac{T_o p + 1}{k_o (T_s p + 1 - \exp(-p\tau))} \quad (3.53)$$

Передаточна функція замкненої системи по збуренню

$$W_f(p) = \frac{y(p)}{f(p)} = \frac{W_o(p)}{1 + D_d(p)W_o(p)} = \frac{\Phi(p)}{D_d(p)} \quad (3.54)$$

Отже,

$$W_f(p) = \frac{1}{T_3 p + 1} \frac{k_o (T_3 p + 1 - \exp(-p\tau)) \exp(-p\tau)}{T_o p + 1} \quad (3.55)$$

Якщо підставити у (3.55)  $p = j\omega$ , то для одиничного збурюючого впливу одержимо амплітудно-частотну характеристику (АЧХ):

$$A(\omega) = k_o \sqrt{\frac{2 - 2 \cos \omega \tau + \omega^2 T_3^2 + 2 \omega T_3 \sin \omega \tau}{1 + T_3^2 T_o^2 \omega^4 + \omega^2 (T_3^2 + T_o^2)}} \quad (3.56)$$

Дослідження АЧХ (3.56) на екстремум доводить [10], що максимум має місце при  $\omega = 3\pi\tau / 4$ . Отже можна зробити такі висновки:

- 1) якщо  $\tau = 2T_o$  і  $T_3 = T_o$ , то  $|y(t)| = 1.06k_o I(t)$ ;
- 2) якщо  $\tau = 3T_o$  і  $T_3 = T_o$  то  $|y(t)| = 1.4k_o I(t)$ .

Аналіз одержаних виразів доводить, що при поєднанні таких динамічних характеристик у системі керування з регулятором Даліна відбувається підсилення дії збурюючого впливу. Отже, у процесі аналітичного конструювання регулятора Даліна треба врахувати дію збурюючих впливів, що мають частоти, близькі до  $\omega \cong \tau / 2$ . Тому в більшості випадків доводиться жертвувати швидкістю системи при відпрацюванні її задавального впливу з метою одержання задовільної якості процесу керування при пригніченні збурюючого впливу. У цьому випадку треба обирати  $T_3 > T_o$ , а не  $T_3 = T_o$

### 3.7. Дискретний регулятор Калмана

#### 3.7.1. Загальна передаточна функція дискретного регулятора Калмана

Аналітичне конструювання регулятора Калмана [7] базується на мінімізації часу виходу керованої змінної  $y(t)$  на задане значення за певну кількість періодів дискретності  $T$  системи або  $n$  кроків без перерегулювання. Тому такий регулятор іноді називають "кроковим". При застосуванні цього методу аналітичного конструювання регулятора накладаються певні обмеження як на керовану змінну, так і на керуючий вплив. Наприклад, при стрибкуватій зміні задавального впливу керована змінна повинна досягти заданого значення, припустимо, за два кроки, тобто за два періоди дискретності системи. При цьому керуючий вплив повинен мати тільки два проміжних значення, перш ніж вихідна змінна досягне свого заданого значення (рис. 3.12)

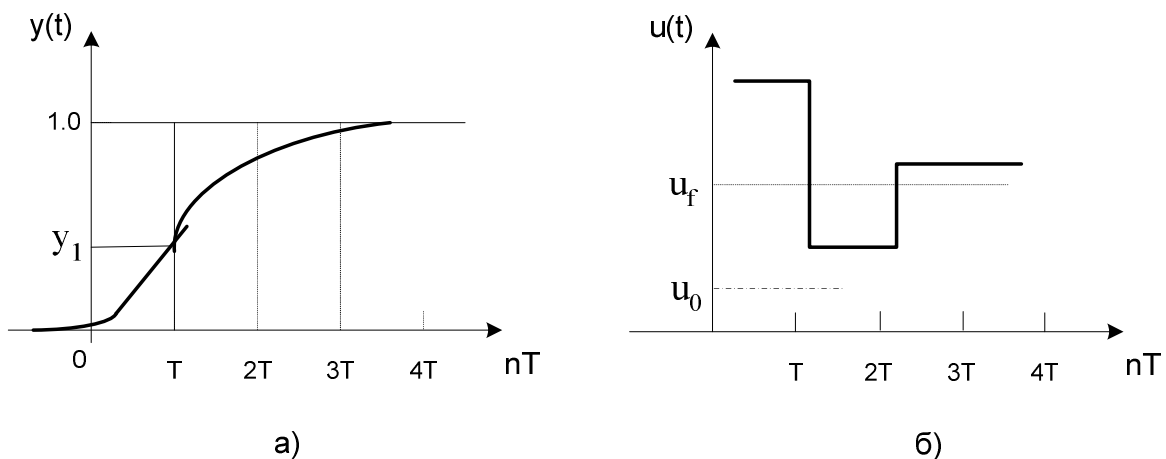


Рис. 3.12. Бажана зміна вихідної змінної  $y(t)$  (а) і керуючого впливу  $u(t)$  (б) для визначення алгоритму регулятора Калмана



Виходячи з цих передумов, можна знайти вираз для визначення як керуючого впливу, так і керованої змінної. Тут задавальним впливом є одиничний ступінчастий вплив. Отже, можна записати такі вирази:

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} \quad (3.57)$$

для керуючого впливу:

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{-n} \quad (3.58)$$

і для задавального впливу:

$$g(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (3.59)$$

де  $y_n$ ,  $u_n$  - відповідно поточні значення керованої змінної і керуючого впливу в моменти часу  $n=0, 1, 2, \dots$

Співвідношення (3.57) - (3.59) застосовуються для визначення передаточних функцій каналів: "завдання - керована змінна" і "завдання - керуючий вплив". Вказані передаточні функції запишемо так:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{y(z)}{g(z)} = (1 - z^{-1})(y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + y_3 z^{-3} + \dots) = \\ &= y_0 z^{-1} + (1 - y_0) z^{-2} = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} \quad (3.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{u(z)}{g(z)} = (1 - z^{-1})(u_0 + u_1 z^{-1} + u_2 z^{-2} + u_3 z^{-3} + \dots) = \\ &= u_0 + (u_1 - u_0) z^{-1} + (u_2 - u_1) z^{-2} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} \quad (3.61) \end{aligned}$$

де  $p_1 = y_1$ ;  $p_2 = 1 - y_1$ ;  $q_0 = u_0$ ;  $q_1 = u_1 - u_0$ ;  $q_2 = u_2 - u_1$ ,

причому  $y_1$  - значення керованої змінної при  $t=T$ , а при  $t=2T$   $y=1$ ;  $u_0, u_f, u_1$  - відповідно мінімальне, середнє (усталене) та максимальне значення керуючого впливу.

Вирази (3.60) і (3.61) дозволяють визначити передаточну функцію об'єкта керування формальним шляхом, поділивши вираз (3.60) на (3.61). Тоді

$$W_o(z) = \frac{\Phi(z)}{Q(z)} = \frac{y(z)/g(z)}{u(z)/g(z)} = \frac{y(z)}{u(z)} \quad (3.62)$$

В загальному випадку передаточна функція регулятора

$$D(z) = \frac{1}{W_o(z)} = \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)}$$

а оскільки  $W_o(z)=y(z)/u(z)$  і  $\Phi(z)=y(z)/g(z)$ , то з урахуванням виразів (3.60) і (3.61) загальна передаточна функція дискретного регулятора Калмана матиме такий вигляд:

$$D_K(z) = \frac{Q(z)}{1 - \Phi(z)} \quad (3.63)$$

### 3.7.2. Типи дискретного регулятора Калмана

#### 3.7.2.1. Дискретний регулятор Калмана типу I

Нехай передаточна функція об'єкта керування (3.26) у z-формі має вигляд:

$$W_O(z) = k_O \frac{c_1 + c_2 z^{-1}}{1 - a_p z^{-1}} z^{-(k+1)} \quad (3.64)$$

де  $a_p = \exp(-T/T_0)$ ;  $c_1 = 1 - \exp(-aT/T_0)$ ;  $c_2 = \exp(-aT/T_0) - \exp(-T/T_0)$ ;  $\kappa = m/T$ ;  $a = -(\tau - \kappa T)/T$ .

Згідно з рівнянням (3.60) треба, щоб сума коефіцієнтів чисельника у передаточній функції (3.62) дорівнювала одиниці, чого можна досягти, розділивши чисельник і знаменник (3.64) на  $k_O(c_1 + c_2)$ . Тоді

$$W_O(z) = \frac{\frac{c_1}{c_1 + c_2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2} z^{-1}}{1 - a_p z^{-1}} z^{-(k+1)} \quad (3.65)$$
$$\frac{1}{k_O(c_1 + c_2)}$$

Отже,

$$\Phi(z) = \frac{c_1}{c_1 + c_2} z^{-(k+1)} + \frac{c_2}{c_1 + c_2} z^{-(k+2)} \quad (3.66)$$

а

$$Q(z) = \frac{1}{k_O(c_1 + c_2)} - \frac{a_p}{k_O(c_1 + c_2)} z^{-1} \quad (3.67)$$

Підставивши вирази (3.66) і (3.67) у загальну передаточну функцію дискретного регулятора Калмана (3.63), дістанемо передаточну функцію дискретного регулятора Калмана типу I у вигляді

$$D_K(z) = \frac{1 - a_p z^{-1}}{k_o(c_1 + c_2) \left[ 1 - \frac{c_1}{c_1 + c_2} z^{-(k+1)} - \frac{c_2}{c_1 + c_2} z^{-(k+2)} \right]} \quad (3.68)$$

### 3.7.2.2. Дискретний регулятор Калмана типу II

Якщо передаточна функція об'єкта керування має вигляд:

$$W_o(z) = k_o \frac{c_3 + c_4 z^{-1}}{(1 - a_{p1} z^{-1})(1 - a_{p2} z^{-1})} z^{-(k+1)} \quad (3.69)$$

то, розділивши її чисельник і знаменник на  $k_o(c_3 + c_4)$ , дістанемо передаточну функцію дискретного регулятора Калмана типу II у вигляді

$$D_K(z) = \frac{1}{k_o(c_3 + c_4)} \frac{(1 - a_{p1} z^{-1})(1 - a_{p2} z^{-1})}{\left[ 1 - \frac{c_3}{c_3 + c_4} z^{-(k+1)} - \frac{c_4}{c_3 + c_4} z^{-(k+2)} \right]} \quad (3.70)$$

### 3.7.2.3. Дискретний регулятор Калмана типу III

Якщо дискретний регулятор Калмана типу I застосувати в системі, призначеній для регулювання, наприклад, температури продукту в теплообмінному апараті, то, хоча температура у ньому при відпрацюванні збурюючого впливу змінюватиметься аперіодично, регулюючий орган

заснаватиме значних коливань, що призведе до його зношування. Ці коливання спричинятимуться наявністю полюсів передаточної функції (3.68) в околі точки  $z=-1$ . Щоб позбавитися цих полюсів, другий множник у знаменнику передаточної функції (3.68) може бути поданий, наприклад при  $k=2$  і  $x=c_1/(c_1+c_2)$  так:

$$1 - xz^{-3} - (1-x)z^{-4} = (1-z^{-1})(1+z^{-1}+z^{-2}+(1-x)z^{-3})$$

Підставивши у другому множнику знаменника (3.68)  $z=1$ , дістанемо передаточну функцію дискретного регулятора Калмана типу III у вигляді:

$$D_K(z) = \frac{1 - a_p z^{-1}}{k_o(c_1 + c_2)(1 - z^{-1})(4 - x)}, \quad T = \tau/2 \quad (3.71)$$

Як видно з виразу (3.71), це передаточна функція ПІ-регулятора

#### 3.7.2.4. Дискретний регулятор Калмана типу IV

В автоматичній системі з дискретним регулятором Калмана типу II коливність може викликатися будь-яким з множників, що входять у знаменник передаточної функції (3.70). Усунути небажану "коливність" можна шляхом пересування полюсів з інтервалу  $[-1,0]$  дійсної осі до інтервалу  $[0,1]$ . Цього можна досягти за допомогою множника, що входить до знаменника передаточної функції (3.70). Дійсно, якщо взяти, наприклад  $k=1$  і покласти  $y=c_4/(c_3+c_4)$ , то знаменник передаточної функції (3.70) можна подати так:

$$1 - (1-y)z^{-2} - yz^{-3} = (1-z^{-1})(1+z^{-1}+yz^{-2})$$

Отже, корені другого множника

$$z_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{y - 1/4}$$

розташовуються ближче до полюса, що спричиняє коливність регулюючого органу при  $y \leq 1$ . Загрубивши систему введенням  $z=1$  у другий множник виразу, поданого вище, дістанемо передаточну функцію дискретного регулятора Калмана типу IV у вигляді:

$$D_K(z) = \frac{(1 - a_{p1}z^{-1})(1 - a_{p2}z^{-1})}{k_o(c_3 + c_4)(2 + y)(1 - z^{-1})}, \quad T = \tau \quad (3.72)$$

Як видно з виразу (3.72), одержано передаточну функцію дискретного аналога ПД-регулятора.

### 3.7.3. Недоліки дискретних регуляторів Калмана

Вище було розглянуто аналітичне конструювання дискретних регуляторів Калмана для випадків, коли об'єкт керування є аперіодичною ланкою першого або другого порядку з запізнюванням. Для об'єкта, що описується рівнянням  $n$ -го порядку, цей регулятор дозволяє визначити керуючий вплив  $u(n)$  так, щоб перехідна функція за керуючим виливом  $g(t)$  досягла свого кінцевого значення за  $n$  кроків без перерегулювання. Так, наприклад, для об'єкта керування, що описується аперіодичною ланкою другого порядку зі сталими часу  $T_1$  і  $T_2$ , керуючий вплив розраховується згідно з різницеvim рівнянням

$$u(n) = a_0e(n) + a_1e(n-1) + a_2e(n-2) + b_1u(n-1) + (1-b_1)u(n-2) \quad (3.73)$$

у якому коефіцієнт  $b_1$  відповідає керованій змінній першого опитування  $y(T)$ , віднесеної до задавального впливу, тобто

$$b_1 = y(T) / g_0$$

а для визначення коефіцієнтів  $a_i$  треба розв'язати таку систему рівнянь

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1/k_0 \\ a_0 + a_1 a_{p1} + a_2 a'_{p1} = 0 \\ a_1 + a_1 a_{p2} + a_2 a'_{p2} = 0 \end{cases} \quad (3.74)$$

де  $a_{p1} = \exp(-T/T_1)$ ;  $a'_{p1} = \exp(-2T/T_1)$ ;  $a_{p2} = \exp(-T/T_2)$ ;  
 $a'_{p2} = \exp(-2T/T_2)$ .

З аналізу алгоритму (3.73) видно, що вибір періоду дискретності системи  $T$  тут залежить від кількості кроків  $n$  і, як правило, має велике значення, що значно обмежує область його застосування [12].

Треба зазначити, що дискретна система керування з регулятором Калмана має астатизм. Коефіцієнти ж, що входять до передаточної функції регулятора Калмана, зв'язані з параметрами об'єкта керування і періодом дискретності системи однозначними залежностями. Це робить регулятор Калмана більш чутливим до зміни параметрів об'єкта керування порівняно, наприклад, з регулятором Даліна. Отже, регулятор Калмана вимагає більш точної оцінки параметрів об'єкта керування. Внаслідок цього не рекомендується застосовувати його у дискретних системах керування хіміко-технологічних виробництв.

### 3.8. Дискретний регулятор Хігема

Регулятор Хігема [9] належить до класу лінійних алгоритмів і за основними передумовами близький до алгоритму Даліна. Для його застосування не треба надто точно оцінювати параметри об'єкта керування. Навіть апріорної інформації про них іноді достатньо для настроювання регулятора, який має лише один параметр настроювання.

При аналітичному конструюванні регулятора Хігема треба дотримуватися таких умов: якщо динаміка об'єкта керування подається аперіодичною ланкою першого або другого порядку з запізнюванням, то в замкненій системі керування керована змінна повинна виходити на нове задане значення зі сталою часу, що дорівнює транспортному запізнюванню, по аперіодичному процесу без перерегулювання.

#### 3.8.1. Загальна передаточна функція дискретного регулятора Хігема

Для забезпечення аперіодичного процесу зміни керованої змінної треба, щоб дискретна передаточна функція замкненої системи мала такий вигляд:

$$\Phi(z) = \frac{1 - a_3}{1 - a_3 z^{-1}} z^{-(k+1)} \quad (3.75)$$

де  $a_3 = \exp(-T/T_3)$ . Причому  $T_3$  - стала часу замкненої системи,  $k = \tau / T$ , де  $\tau$  - запізнювання в каналі керування ;  $T$  - період дискретності системи.



Оскільки дискретна передаточна функція замкненої системи

$$\Phi(z) = \frac{W_o(z)D(z)}{1 + D(z)W_o(z)} \quad (3.76)$$

де  $W_o(z)$  - дискретна передаточна функція об'єкта керування, то загальна передаточна функція дискретного регулятора Хігема

$$D_X(z) = \frac{1}{W_o(z)} \frac{(1 - a_3)z^{-(k+1)}}{(1 - a_3z^{-1} - (1 - a_3)z^{-(k+1)})} \quad (3.77)$$

де  $a_3 = \exp(-T/\tau)$ .

Як впливає з виразу (3.77), структура загальної передаточної функції дискретного регулятора Хігема аналогічна структурі загальної передаточної функції дискретного регулятора Даліна (3.33). Однак аналогія на цьому і закінчується. Справа в тому, що регулятор Хігема визначає закон зміни **не повної величини** керуючого впливу  $u(n)$ , а її **приросту**  $\Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$  між двома сусідніми періодами дискретності системи. У цьому його основна відмінність від розглянутих вище регуляторів Даліна й Калмана. Розглянемо тепер подальший процес аналітичного конструювання дискретного регулятора Хігема. Оскільки передаточна функція дискретного регулятора Хігема  $D_X(z) = u(z)/e(z)$ , то у приростах її можна записати так:  $\Delta D_X(z) = \Delta u(z)/e(z)$ . Отже, формально можна записати, що

$$\Delta D_X(z) = (1 - z^{-1})D_D(z) \quad (3.78)$$

Підставивши вираз (3.33) в рівняння (3.78) одержимо загальну передаточну функцію дискретного регулятора Хігема в такому вигляді:

$$\Delta D_X(z) = \frac{(1 - z^{-1})}{W_o(z)} \frac{1 - a_3}{1 - a_3z^{-1} - (1 - a_3)z^{-(k+1)}} z^{-(k+1)} \quad (3.79)$$

де  $a_3 = \exp(-T/\tau)$ .

### 3.8.2. Типи дискретного регулятора Хігема

#### 3.8.2.1. Дискретний регулятор Хігема типу I

Підставивши дискретну передаточну функцію (3.35) у вираз (3.79), дістанемо передаточну функцію дискретного регулятора Хігема типу I:

$$\Delta D_X(z) = \frac{(1 - a_3)(1 - z^{-1})(1 - a_p z^{-1})}{k_o(1 - a_3 z^{-1} - (1 - a_3)z^{-(k+1)})(c_1 + c_2 z^{-1})} \quad (3.80)$$

де  $a_3 = \exp(-T/\tau)$ ;  $a_p = \exp(-T/T_o)$ ;  $k = \tau / T$ ;  $a = -(\tau - kT)T$ ;

$c_1 = 1 - \exp(-aT/T_o)$ ;  $c_2 = \exp(-aT/T_o) - \exp(-T/T_o)$ ,

#### 3.8.2.2. Дискретний регулятор Хігема типу II

Підставивши дискретну передаточну функцію (3.37) у вираз (3.78) дістанемо передаточну функцію дискретного регулятора Хігема типу II:

$$\Delta D_X(z) = \frac{(1 - a_3)(1 - z^{-1})(1 - a_{p1} z^{-1})(1 - a_{p2} z^{-1})}{k_o(1 - a_3 z^{-1} - (1 - a_3)z^{-(k+1)})(c_3 + c_4 z^{-1})} \quad (3.81)$$

де  $a_3 = \exp(-T/\tau)$ ;  $a_{p1} = \exp(-T/T_1)$ ;  $a_{p2} = \exp(-T/T_2)$ ;  $c_3 = 1 + (a_{p1}T_1 - a_{p2}T_2)/(T_2 - T_1)$ ;

$c_4 = \exp(-T/T_1 - T/T_2) + (a_{p1}T_1 - a_{p2}T_2)/(T_2 - T_1)$ .

### 3.8.2.3. Дискретний регулятор Хігема типу III

Підставивши у вираз (3.78) передаточну функцію цифрового регулятора Даліна типу III (3.39), дістанемо передаточну функцію дискретного регулятора Хігема типу III :

$$\Delta D_X(z) = \frac{(1-a_0)(1-z^{-1})(1-a_p z^{-1})}{k_O(1-a_p)(1-a_0 z^{-1} - (1-a_0)z^{-(k+1)})} \quad (3.82)$$

де  $a_3 = \exp(-T/\tau)$ ;  $a_p = \exp(-T/T_0)$ ;  $k = \tau / T$

### 3.8.2.4. Дискретний регулятор Хігема типу IV

Підставивши у вираз (3.78) передаточну функцію дискретного регулятора Даліна типу IV (3.44), дістанемо передаточну функцію дискретного регулятора Хігема типу IV у вигляді:

$$\Delta D_X(z) = \frac{(1-z^{-1})(1-a_\phi z^{-1})(1-a_p z^{-1})(1-a_3)}{k_O(1-a_p) \left[ (1-a_3 z^{-1})(1-a_\phi z^{-1}) - \frac{1-a_3}{1-a_p} (\alpha + \beta z^{-1}) z^{-(k+1)} \right]} \quad (3.83)$$

$a_3 = \exp(-T/\tau)$ ;  $a_p = \exp(-T/T_0)$ ;  $k = \tau / T$ ;  $a_\phi = \exp(-T/T_\phi)$ ;  $\alpha = 1 - (a_\phi T_\phi - a_p T_0) / (T_\phi - T_0)$ ;  $\beta = a_\phi a_p - (a_p T_\phi - a_\phi T_0) / (T_\phi - T_0)$ .

### 3.8.2.5. Дискретний регулятор Хігема типу V

Підставивши у вираз (3.78) передаточну функцію дискретного регулятора Даліна типу V (3.46), дістанемо передаточну функцію дискретного регулятора Хігема типу V у вигляді:

$$\Delta D_X(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 - a_p z^{-1})(1 - a_3)}{k_O(c_1 + c_2)(3 - 2a_3)(1 - z^{-1})}, T = \tau / 2$$

де  $a_3 = \exp(-T/\tau)$ ;  $a_p = \exp(-T/T_0)$ ;  $c_1 = 1 - \exp(-aT/T_0)$ ;  $c_2 = \exp(-aT/T_0) - \exp(-T/T_0)$   $k = \tau T$ ;  $a = -(\tau - kT) T$

### 3.8.2.6. Дискретний регулятор Хігема типу VI

Підставивши у вираз (3.78) передаточну функцію дискретного регулятора Даліна типу VI (3.48), дістанемо передаточну функцію дискретного регулятора Хігема типу VI у такому вигляді:

$$\Delta D_X(z) = \frac{(1 - a_{p1} z^{-1})(1 - a_3)(1 - a_{p2} z^{-1})}{k_O(c_3 + c_4)(2 - a_3)}, T = \tau \quad (3.85)$$

де  $a_3 = \exp(-T/\tau)$ ;  $a_{p1} = \exp(-T/T_1)$ ;  $a_{p2} = \exp(-T/T_2)$ ;

$c_3 = 1 + (a_{p1} T_1 - a_{p2} T_2)/(T_2 - T_1)$ ;

$c_4 = \exp(-T/T_1 - T/T_2) + (a_{p1} T_1 - a_{p2} T_2)/(T_2 - T_1)$ .

### 3.8.3. Особливості дискретного регулятора Хігема

Розглянемо, наприклад, передаточну функцію дискретного Хігема типу V:

$$\Delta D_X(z) = \frac{\Delta u(z)}{\Delta e(z)} = \frac{(1 - a_p z^{-1})(1 - a_3)}{k_o(c_1 + c_2)(3 - 2a_3)}, \quad T = \tau/2$$

Введемо позначення:  $A = (1 - a_3) / [k_o(c_1 + c_2)(3 - 2a_3)]$ . Тоді

$$\Delta D_X(z) = \frac{\Delta u(z)}{\Delta e(z)} = A(1 - a_p z^{-1})$$

Отже,

$$\Delta u(z) = A(1 - a_p z^{-1})e(z) = Ae(z) + Bz^{-1}e(z),$$

де  $B = -Aa_p$ .

Виходячи з цього виразу, різницеве рівняння дискретного регулятора Хігема

типу V матиме вигляд:

$$\Delta u(n) = Ae(n) + Be(n-1)$$

Очевидно, що коефіцієнти A і B залежать від  $a_3$ ,  $a_p$ , і  $c_2$ . А оскільки  $a_3 = \exp(-T/\tau)$ ;  $a_p = \exp(-T/T_0)$ ;  $c_1 = 1 - a_p$ ;  $c_2 = \exp(-aT/T_0) - a_p$

то  $A = f(k_o, \tau, T_o, T)$ ;  $B = f(k_o, \tau, T_o, T)$

Аналіз передаточних функцій (3.80)-(3.85) різницевого рівняння дискретного регулятора Хігема дозволяє зробити такі висновки.

1. Регулятор Хігема враховує передісторію формування керуючого впливу, довжина якої залежить від часу транспортного запізнювання, що існує в каналі керування. Довжина передісторії визначається членом  $z^{-(k+1)}$  вказаних передаточних функцій. Ця важлива властивість дискретного регулятора Хігема дозволяє вести керування за допомогою автоматичної системи зі змінною структурою, оскільки у випадку зміни режиму роботи технологічного обладнання, яка приводить до зміни величин  $k_o, \tau, T_o$ , з'являється можливість адаптації алгоритму керування до нових значень  $k_o, \tau, T_o$ . Тому можна стверджувати, що дискретний алгоритм Хігема має властивість автопідстроювання.

2. Так само, як і в дискретному регуляторі Даліна, в дискретному регуляторі Хігема основним параметром настроювання регулятора є стала часу замкненої системи  $T_s = \tau$ .

### 3.9. Дискретний регулятор Острьома

#### 3.9.1. Загальна передаточна функція дискретного регулятора Острьома

Нехай об'єкт керування (ОК) описується дискретним рівнянням вигляду:

$$y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-(k+1)} u(z) + \frac{C(z)}{A(z)} e(z), \quad (3.86)$$

де  $y(z)$ ,  $u(z)$ ,  $e(z)$  - відповідно дискретне зображення керованої змінної, керуючого впливу і збурюючого впливу, а  $A(z)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z)$  - многочлени відносно оператора зсуву  $z^{-1}$ .

Структурна схема такого ОК наведена на рис.3.13.

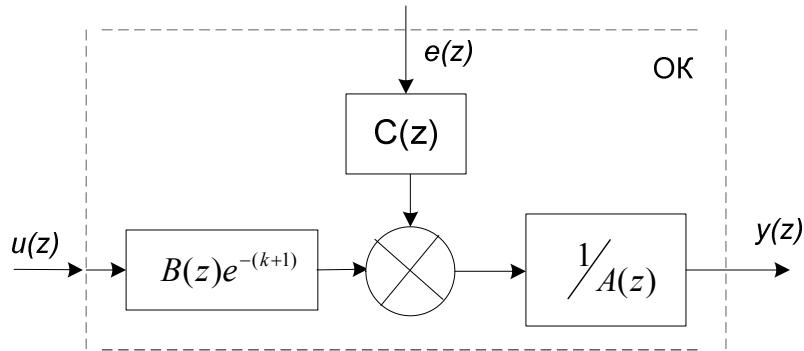


Рис. 3.13. Структурна схема об'єкта керування

Передаточна функція дискретного регулятора Острьома, що забезпечує мінімум дисперсії вихідної змінної, в загальному вигляді може бути подана так [4]:

$$D_o(z) = \frac{F(z)}{E(z)B(z)} \quad (3.87)$$

причому  $F(z)$  і  $E(z)$  повинні задовольняти діофантове рівняння:

$$E(z)A(z) + F(z)z^{-(k+1)} = C(z) \quad (3.88)$$

де  $E(z) = 1 + e_1z^{-1} + \dots + e_kz^{-k}$ ;  $F(z) = f_0 + f_1z^{-1} + \dots + f_{n'-1}z^{-(n'-1)}$ ;

$n'$ - певна степінь многочлена  $A(z-1)$ .

### 3.9.2. Принципи аналітичного конструювання дискретного регулятора Острьома

Визначимо з рівняння (3.88) многочлен  $F(z)$  і підставимо його у вираз (3.87). Тоді загальна передаточна функція дискретного регулятора Острьома

$$D_o(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \frac{F(z)}{C(z) - F(z)z^{-(k+1)}} \quad (3.89)$$

Оскільки дискретна передаточна функція замкненої системи

$$\Phi(z) = \frac{D_o(z)W_o(z)}{1 + D_o(z)W_o(z)}$$

то передаточна функція об'єкта керування (рис.3.13)

$$W_o(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-(k+1)}$$

Підставивши у  $\Phi(z)$  вирази для  $D_o(z)$  і  $W_o(z)$ , дістанемо:

$$\Phi(z) = \frac{\frac{F(z)A(z)}{[C(z) - F(z)z^{-(k+1)}]} \frac{B(z)}{A(z)} z^{-(k+1)}}{1 + \frac{F(z)A(z)}{[C(z) - F(z)z^{-(k+1)}]} \frac{B(z)}{A(z)} z^{-(k+1)}}$$

Або, нарешті

$$\Phi(z) = \frac{F(z)}{C(z)} z^{-(k+1)} \quad (3.90)$$

Отже, аналітичне конструювання дискретного регулятора Острьома зводиться до формування такої дискретної передаточної функції замкненої системи, полюси якої однозначно визначаються з многочлена  $C(z)$ , що характеризує збурюючі впливи. Треба зазначити, що



на етапі попередньої оцінки вважають, що многочлен  $C(z)$  має невисокий порядок. Так, наприклад, на цьому етапі можна прийняти, що

$$C(z) = 1 - c_1 z^{-1}, \quad c_1 < 1 \quad (3.91)$$

а

$$F(z) = f_0 \quad (3.92)$$

У цьому випадку дискретна передаточна функція замкненої системи

$$\Phi(z) = \frac{f_0}{1 - c z^{-1}} z^{-(k+1)} \quad (3.93)$$

У процесі аналітичного конструювання дискретного регулятора Острьома уточнюються і параметри дискретної передаточної функції замкненої системи, виходячи із **заданої тим чи іншим способом** передаточної функції об'єкта керування. Так, наприклад, якщо ОК поданий передаточною функцією, то

$$W_o(z) = k_0 \frac{1 - a_p}{1 - a_p z^{-1}} z^{-(k+1)} \quad (3.94)$$

або

$$W_o(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-(k+1)} \quad (3.95)$$

де  $A(z) = 1 - a_p z^{-1}$ ;  $B(z) = k_0(1 - a_p)$ ;  $k = \tau / T$ ;  $a_p = \exp(-T/T_0)$ , причому, наприклад,  $k = 2$ .

Нехай  $C(z) = 1 - c_1 z^{-1}$ . Тоді діофантове рівняння (3.88) запишеться так:

$$\begin{aligned} 1 - c_1 z^{-1} &= (1 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2}) (1 - a_p z^{-1}) + f_0 z^{-3} \\ &= 1 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2} + f_0 z^{-3} - a_p z^{-1} - e_1 a_p z^{-2} - e_2 a_p z^{-3} \\ \text{або } 1 - c_1 z^{-1} &= 1 + (e_1 - e_p) z^{-1} + (e_2 - e_1 a_p) z^{-2} + (f_0 - e_2 a_p) z^{-3} \quad (3.96) \end{aligned}$$

Розв'язавши рівняння (3.96), наприклад, методом порівняння коефіцієнтів, дістанемо (при  $f_0 = e_3$ ):

$$-c_1 = c_1 - a_p, \Rightarrow e_1 = a_p - c_1,$$

$$0 = e_2 - e_1 a_p, \Rightarrow e_2 = a_p (a_p - c_1), \quad (3.97)$$

$$0 = e_3 - e_2 a_p \Rightarrow e_3 = a_p^2 (a_p - c_1).$$

Отже, дискретна передаточна функція замкненої системи з дискретним регулятором Острьома, що **забезпечує мінімальну дисперсію** керованої змінної, матиме остаточно такий вигляд:

$$\Phi(z) = \frac{a_p^2 (a_p - c_1) z^{-3}}{1 - c_1 z^{-1}}. \quad (3.98)$$

### **3.9.3. Усталена похибка в системі керування з дискретним регулятором Острьома**

Аналіз виразу (3.98) показує, що оскільки  $\Phi(z) \neq 1$ , то система керування, реалізована згідно з дискретною передаточною функцією замкненої системи (3.98), завжди буде мати усталену похибку. Отже, з цієї обставини випливає необхідність конструювати ще один регулятор, з'єднаний паралельно з дискретним регулятором Острьома, щоб упоратися з дрейфом або наслідками впливу ступінчастого одиничного впливу по завданню.

Цей висновок не є несподіваним, а цілком закономірним. Справа в тому, що дискретний регулятор Острьома є оптимальним лише для пригнічення певного виду збурюючих впливів, а саме послідовностей

паралельних або некорельованих випадкових змінних з нульовим середнім і середньоквадратичною похибкою СКП  $\sigma$ . Задавальний вплив до такого класу збурень не належить. В промислових умовах треба здійснювати керування, що забезпечує мінімальну дисперсію вихідної змінної і нульову похибку для задавального впливу.

### **3.9.4. Ефективність роботи системи керування з дискретним регулятором Острьома**

Розглянемо систему керування з вихідною змінною  $y(t)$  з дискретним регулятором Острьома (рис.3.14).

Як показано в [11], дисперсію вихідної змінної для такої системи можна визначити за формулою:

$$\sigma_y^2 = \lambda^2 (1 + e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_k^2), \quad (3.99)$$

де  $\lambda^2$  - дисперсія білого шуму.

В ході аналітичного конструювання цифрового регулятора Острьома треба виявити ті переваги, які дасть система керування порівняно з не автоматизованим об'єктом з точки зору пригнічення збурюючих впливів.

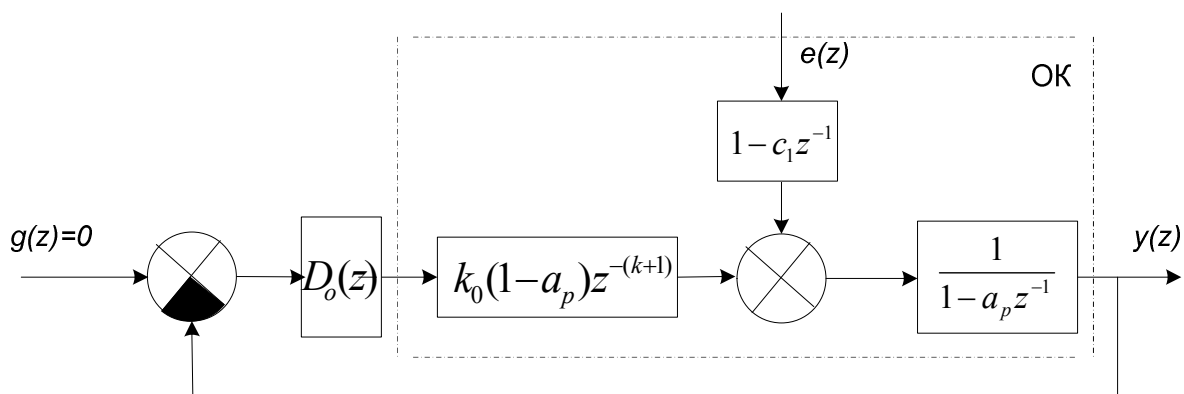


Рис. 3.14. Структурна схема системи керування вихідною змінною з регулятором Острьома

Якщо об'єкт керування неавтоматизований, то, виходячи з рис. 3.13,

$$y(z) = \frac{1 - c_1 z^{-1}}{1 - a_p z^{-1}} e(z). \quad (3.100)$$

Тоді з урахуванням виразу (3.96)

$$y(t) = \lambda [e(t) + (a_p - c_1)e(t-1) + a_p(a_p - c_1)e(t-2) + \dots] \quad (3.101)$$

Зважаючи на те, що  $e_i - e$  - послідовності незалежних або некорельованих випадкових змінних з нульовим середнім значенням, визначимо дисперсію вихідної змінної в неавтоматизованому об'єкті керування так:

$$\sigma_y^2 = E\{[y(t)]^2\} = \lambda^2 [1 + (a_p - c_1)^2 + a_p^2(a_p - c_1)^2 + \dots] \quad (3.102)$$

Тепер, досліджуючи автоматизований об'єкт керування, тобто ОК у складі системи з цифровим регулятором Острьома, і взявши величини  $e_i - e$  з рівняння (3.96), можна встановити, що мінімальна дисперсія керованої змінної

$$\sigma_{y \min}^2 = \lambda^2 (1 + e_1^2 + e_2^2) = \lambda^2 [1 + (a_p - c_1)^2 + a_p^2(a_p - c_1)^2] \quad (3.103)$$

Отже, відносно покращення процесу стабілізації вихідної змінної за допомогою дискретної системи керування, що складається з об'єкта керування (3.94) і цифрового регулятора Острьома, можна подати так [10]:

$$\frac{\sigma_y^2 - \sigma_{y \min}^2}{\sigma_y^2} = \lambda^2 a_p (a_p - c_1)^2 \frac{(1 + a_p^2 + \dots)}{\sigma_y^2} = \frac{a_p^4 (a_p - c_1)^2}{1 - a_p^2 + (a_p - c_1)^2}. \quad (3.104)$$

У загальному вигляді формулу для визначення відносного покращення процесу стабілізації вихідної змінної за допомогою дискретної системи керування, що складається з об'єкта керування (3.94) і цифрового регулятора Острьома, можна подати так:

$$\frac{\sigma_y^2 - \sigma_{y \min}^2}{\sigma_y^2} = \frac{a_p^{2k} (a_p - c_1)^2}{1 - a_p^2 + (a_p - c_1)^2}. \quad (3.105)$$

Як випливає з виразу (3.105), відносне покращення процесу стабілізації вихідної змінної прямо залежить від величини запізнювання  $\tau$  ( $k = \tau/T$ ) в каналі керування. Наприклад, якщо  $\tau = 2T$ ,  $T_O = 2T$ ,  $c_1 = 0.7$ , то

$$(\sigma_y^2 - \sigma_{y \min}^2) / \sigma_y^2 = 0.09$$

Звідси випливає, що при такому поєднанні динамічних характеристик в дискретній системі керування з регулятором Острьома спостерігається незначне відносне покращення процесу стабілізації вихідної змінної.

### **3.9.5. Порівняльний аналіз ефективності роботи дискретних систем керування з регуляторами Острьома і Даліна**

Розглянемо дискретну систему керування вихідною змінною (рис.3.15)  $y(t)$ , структурна схема якої наведена на рис. 3.15.

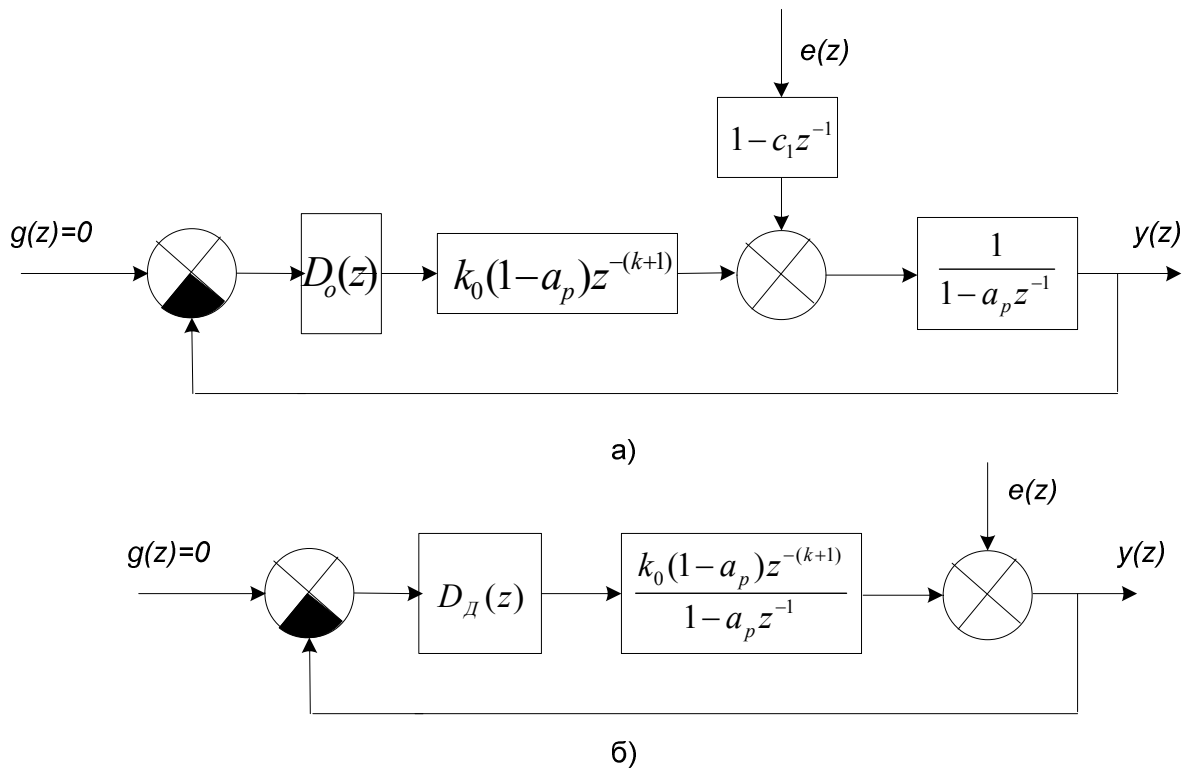


Рис. 3.15. Структурна схема дискретної системи керування вихідною змінною: а - з кольоровим шумом; б - з білим шумом

Нехай  $e(t)$  - білий шум з дисперсією  $\sigma_e^2 = \lambda^2$ , причому  $c_1 < 1$ .

Тоді дисперсія вихідної змінної при застосуванні оптимального дискретного регулятора Острьома, що здійснює керування з мінімальною дисперсією, визначається так:

$$\sigma_{y \min}^2 = \lambda^2 (1 + e_1^2 + e_2^2) \quad (3.106)$$

або з урахуванням виразу (3.96)

$$\sigma_{y \min}^2 = \lambda^2 [1 + (a_p + c_1)^2 + a_p^2 (a_p - c_1)^2]. \quad (3.107)$$

Для оцінки відносного покращення якості роботи дискретної системи керування з регулятором Острьома або Даліна порівняно з якістю стабілізації вихідної змінної неавтоматизованого об'єкта керування треба ввести відповідний критерій. Розглянемо спочатку деякі загальні теоретичні поняття, що стосуються порівняння оптимальної і

квазіоптимальної систем керування. Добре відомо, якщо  $u^*$  - є оптимальне керування (керуючий вплив), що сформоване оптимальним регулятором, то для квазіоптимального регулятора можна ввести так звану функцію втрат  $R$ . Вона визначатиметься через коефіцієнти законів керування так:

$$R(t_0, u) = |I(t_0, u) - I(t_0, u^*)|,$$

де  $I(t_0, u)$  і  $I(t_0, u^*)$  - відповідно значення критерію у квазіоптимальній і оптимальній системах керування.

Значення критерію в законі керування у початковий момент  $t_0$

$$I(t_0, u^*) = \inf_{u \in U} I(t_0, u)$$

Ступінь наближення квазіоптимального закону керування до оптимального можна визначити за допомогою критерію ефективності :

$$H(t_0, u^*) = \frac{\sup I(t_0, u^*)}{\sup I(t_0, u)}$$

або з урахуванням функції втрат

$$H(t_0, u^*) = 1 - \frac{\sup R(t_0, u)}{\sup I(t_0, u)}.$$

В розглядуваному випадку за критерії оцінки двох регуляторів можна взяти відповідні дисперсії. Застосуємо наведене вище поняття ефективності роботи дискретної системи керування з регулятором Острьома або Даліна і виконаємо порівняльний аналіз роботи цих систем, якщо шуми накладаються або на збурення  $e(t)$ , або на вихідну змінну  $y(t)$ . В першому випадку шум, що надходить каналом збурення, буде кольоровим (рис. 3.15, а), а у другому – псевдобілим (рис. 3.15, б). В першому випадку стабілізація вихідної змінної здійснюється дискретним регулятором Острьома, і тому за оцінку роботи такої системи візьмемо критерій

$$I_o = \sigma^2 [y_o(t)]. \quad (3.108)$$

В даному виразі літера "O" означає "Острьом", а не початкове значення вихідної змінної.

Дисперсія вихідної змінної, одержана в системі керування з регулятором Острьома, приймається як мінімальна.

У другому випадку значення критерію оцінки роботи дискретної системи з регулятором Даліна слід записати так:

$$I_D = \sigma^2[y_D(t)] \quad (3.109)$$

Якщо за критерій оцінки роботи неавтоматизованого об'єкта керування взяти критерій

$$I = \sigma^2[y(t)], \quad (3.110)$$

то для оцінки динамічних характеристик розглядуваних регуляторів можна застосувати коефіцієнти відносної варіації вихідної змінної.

Тоді для дискретної системи з регулятором Острьома коефіцієнт відносної варіації

$$\gamma_O = I_O/I, \quad (3.111)$$

а для дискретної системи з регулятором Даліна коефіцієнт відносної варіації

$$\gamma_D = I_D/I. \quad (3.112)$$

Розділивши вираз (3.111) на (3.112), дістанемо **коефіцієнт ефективності дискретного регулятора Даліна** порівняно з дискретним регулятором Острьома, прийнятим за оптимальний, в такому вигляді:

$$\rho = I_O/I_D = \gamma_O/\gamma_D. \quad (3.113)$$



### 3.9.5.1. Дослідження впливу кольорового шуму на динамічні характеристики дискретних регуляторів Острьома і Даліна (схема Острьома)

Для розв'язку поставленої задачі розглянемо дискретну систему керування вихідною змінною (рис.3,15,а). У випадку застосування дискретного регулятора Острьома вважатимемо, що  $D(z)=D_O(z)$ ,  $y(z)=y_O(z)$ . За критерій оцінки ефективності роботи системи з цим регулятором візьмемо критерій ІО. При застосуванні дискретного регулятора Даліна вважатимемо, що  $D(z)=D_D(z)$ ,  $y(z)=y_D(z)$ , а за критерій оцінки роботи дискретної системи візьмемо критерій ІД.

Вище було показано, що зображення вихідної змінної при дії збурення (кольорового шуму) можна визначити в розімкненій системі з регулятором Острьома так:

$$y_o(z) = (1 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2}) e(z),$$

де  $e_1 = a_p - c_1$ ;  $e_2 = a_p(a_p - c_1)$ .

Якщо прийняти в процесі аналітичного конструювання  $k=2$ , тобто  $T = \tau/2$ , то дістанемо дискретну передаточну функцію регулятора Даліна типу ІV. його передаточна функція

$$D_D(z) = \frac{1 - a_3}{k_o(1 - a_p)} \frac{1 - a_p z^{-1}}{[1 - a_3 z^{-1} - (1 - a_3) z^{-(k+1)}]}.$$

Отже, зображення вихідної змінної у z-формі при дії кольорового шуму визначатиметься так:

$$y_D(z) = \frac{(1 - c_1 z^{-1}) [1 - a_3 z^{-1} - (1 - a_3) z^{-(k+1)}]}{(1 - a_p z^{-1})(1 - a_3 z^{-1})} e(z). \quad (3.114)$$

В розімкненій системі зображення вихідної змінної (рис.3.15,а) визначатиметься так:

$$y(z) = \frac{1 - c_1 z^{-1}}{1 - a_p z^{-1}} e(z). \quad (3.115)$$

Для виконання подальших розрахунків визначимо відповідні дисперсії вихідної змінної. Дисперсію вихідної змінної в розімкненій системі легко обчислити за допомогою виразу:

$$\sigma_y^2 = \lambda^2 \left[ 1 + \frac{(a_p - c_1)^2}{(1 - a_p^2)} \right]. \quad (3.116)$$

Дисперсію вихідної змінної в дискретній системі з регулятором Острьома було визначено вище, і при  $k=2$

$$\sigma_{y_o}^2 = \lambda^2 \left[ 1 + (a_p - c_1)^2 + a_p^2 (a_p - c_1)^2 \right]. \quad (3.117)$$

Дисперсію вихідної змінної в дискретній системі з регулятором Даліна при  $k=2$  можна визначити методом Лефера [11]. У цьому випадку

$$\sigma_{y_d}^2 = \lambda^2 \frac{2(1 + c_1)^2 \left[ 1 + (1 - a_3^2)(a_p + a_p^2) \right]}{(1 + a_3)} \dots$$

$$\dots \frac{-c_1 \left[ (a_3 - a_3^2) + (2 + a_3 - a_3^2)a_p + (1 - a_3^2)(a_p^2 + a_p^3) \right]}{(1 + a_p)(1 - a_3 a_p)} \quad (3.118)$$

Розділимо вирази (3.117) і (3.118) на вираз (3.116). Тоді для дискретної системи з регулятором Острьома коефіцієнт відносної варіації вихідної змінної

$$\gamma_o = \frac{\sigma_o^2 [y_o(t)]}{\sigma^2 [y(t)]} = f(a_p, c_1). \quad (3.119)$$

Відповідно, для дискретної системи з регулятором, Даліна типу IV коефіцієнт відносної варіації вихідної змінної

$$\gamma_d = \frac{\sigma_d^2 [y_d(t)]}{\sigma^2 [y(t)]} = f(a_p, c_1, a_3). \quad (3.120)$$

Згідно з виразом (3.119) на рис. 3.16 побудована залежність коефіцієнта відносної варіації  $\gamma_o$  вихідної змінної від параметрів об'єкта керування  $a_p$  і  $c_1$ .

Згідно з виразом (3.120) на рис 3.17 побудована залежність коефіцієнта відносної варіації  $\gamma_d$  вихідної змінної від параметрів об'єкта керування ( $a_p$  і  $c_1$ ) і параметра настроювання  $a_3$  регулятора Даліна типу типу IV.

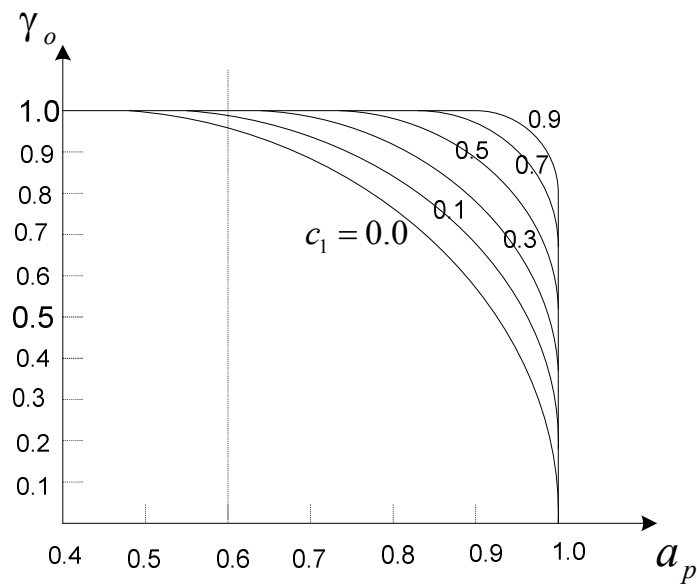


Рис. 3.16. Залежність коефіцієнта відносної варіації  $\gamma_o$  вихідної змінної від параметрів об'єкта керування  $a_p$  і  $c_1$

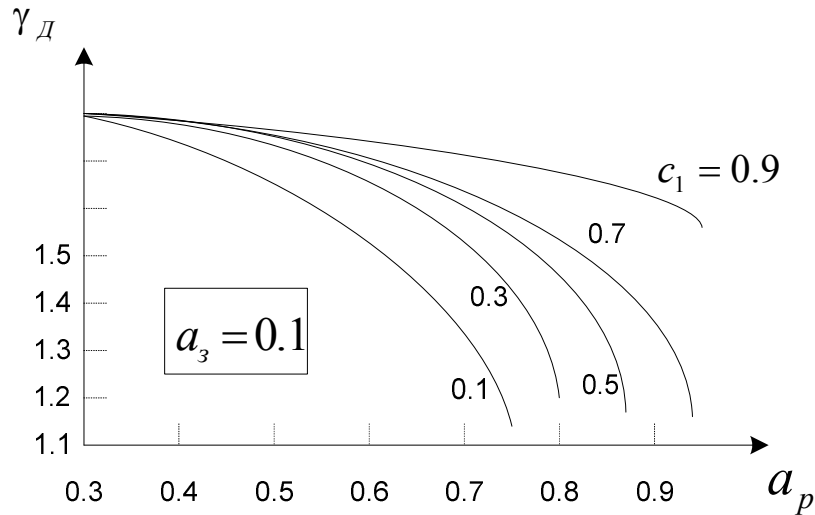


Рис. 3.17. Залежність коефіцієнта відносної варіації  $\gamma_D$  вихідної змінної від параметрів об'єкта керування ( $a_p$ ,  $c_1$ ) і параметра настроювання  $a_3$  регулятора Даліна типу IV

Аналіз одержаних залежностей дозволяє зробити такі висновки:

1. В дискретній системі з регулятором Острьома порівняно з дискретною системою з регулятором Даліна типу IV завжди досягається менша дисперсія вихідної змінної, оскільки завжди  $\gamma_o < 1$  (рис. 3.16). Крім того, при  $a_p < 0.6$   $\gamma_o$  змінюється в межах 5%.
2. В дискретній системі з регулятором Даліна типу IV при порівняно низьких значеннях  $a_3$  (наприклад, 0.1) спостерігається навіть збільшення дисперсії вихідної змінної, оскільки  $\gamma_D > 1$  (рис. 3.17).

3. Якщо в дискретній системі з регулятором Даліна типу IV взяти  $a_3=0.9$ , то збільшення дисперсії залишається в межах 5% (рис. 3.18) при  $a_p < 0.6$ .

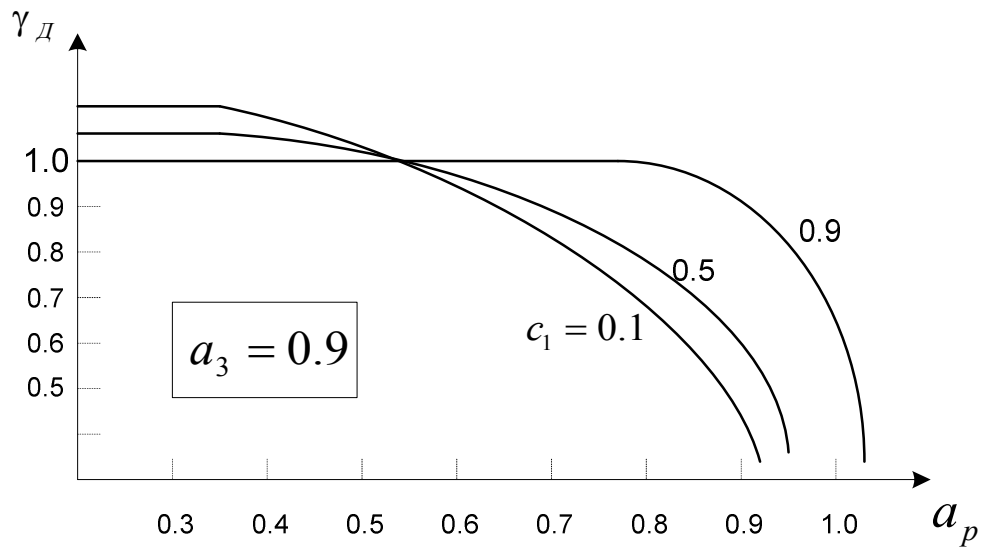


Рис. 3.18. Залежність коефіцієнта відносної варіації  $\gamma_D$  вихідної змінної від параметрів об'єкта керування ( $a_p, c_1$ ) і параметра настроювання  $a_3$  регулятора Даліна типу IV

4. В дискретній системі з регулятором Даліна типу IV при  $a_3=0.6$   $\gamma_D = 1.3$  для всіх значень  $c_1$  (рис. 3.19).

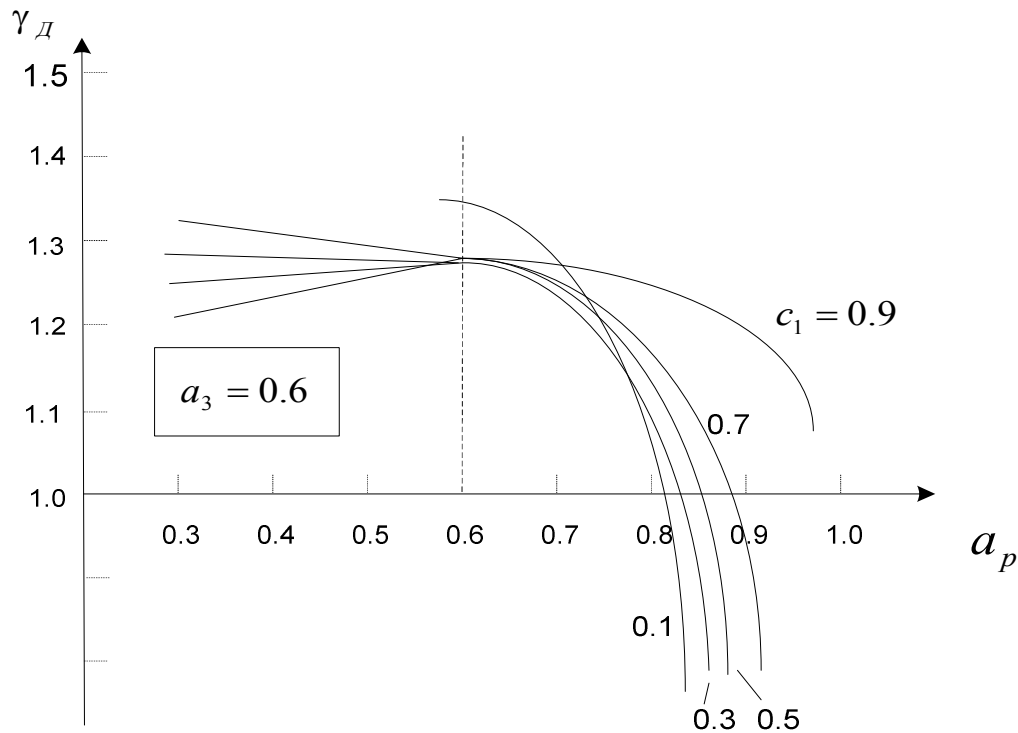


Рис. 3.19. Залежність коефіцієнта відносної варіації  $\gamma_D$  вихідної змінної від параметрів об'єкта керування ( $a_p$ ,  $c_1$ ), параметра настроювання регулятора Даліна  $a_3$

На рис. 3.20 - 3.23 наведені залежності **коефіцієнта ефективності  $\rho$  використання** дискретного регулятора Даліна типу IV порівняно з дискретним регулятором Острьома, побудовані згідно з виразом (3.113).

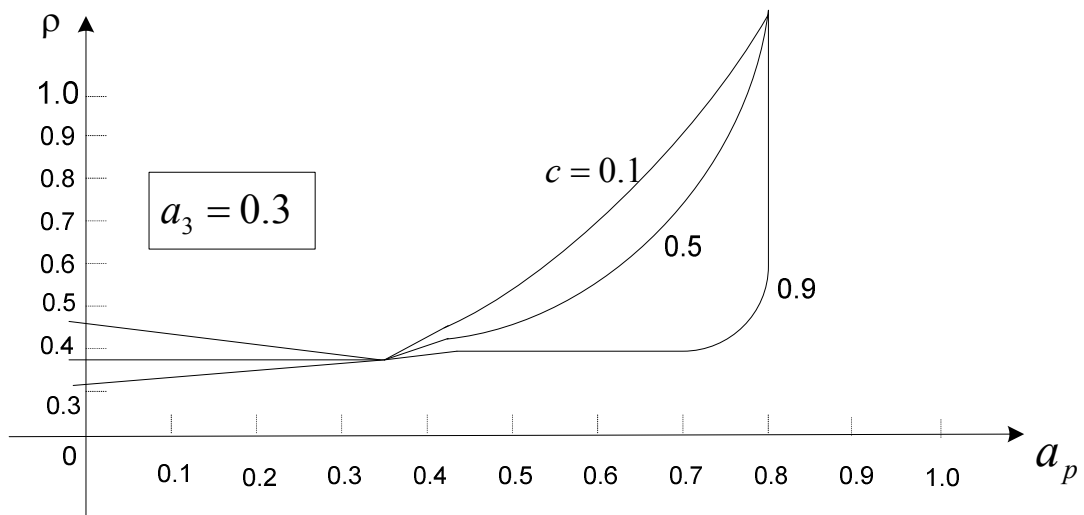


Рис. 3.20. Залежність коефіцієнта ефективності  $\rho$  від параметрів  $a_p$  і  $c_1$  при  $a_3=0.1$

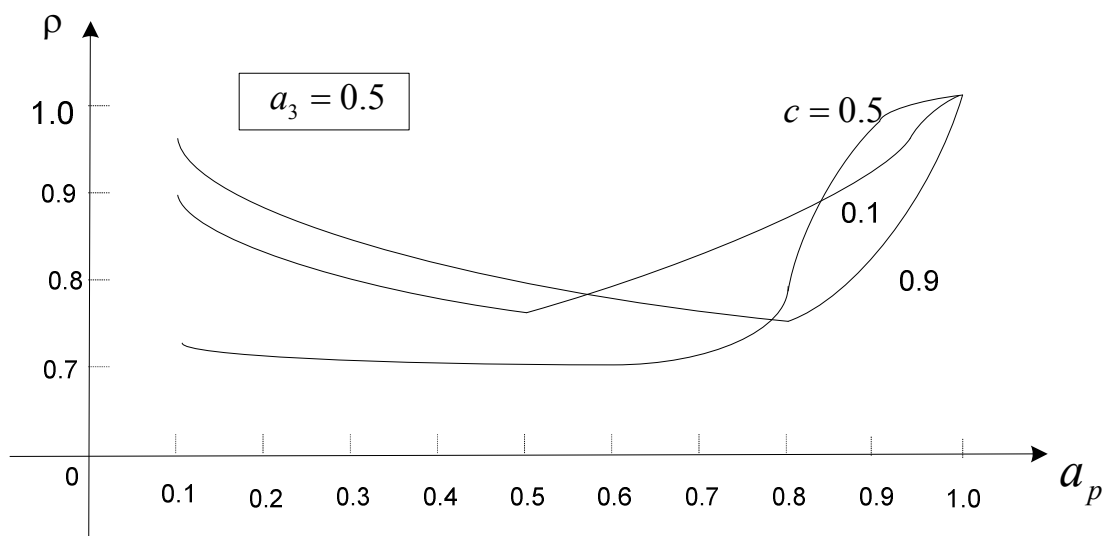


Рис. 3.21. Залежність коефіцієнта ефективності  $\rho$  від параметрів  $a_p$  і  $c_1$  при  $a_3=0.5$

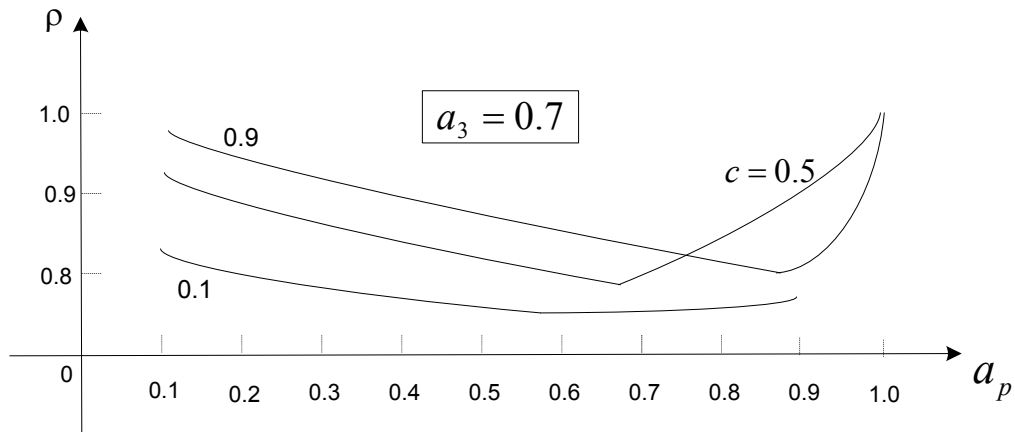


Рис. 3.22. Залежність коефіцієнта ефективності  $\rho$  від параметрів  $a_p$ , і  $c_1$  при  $a_3=0.7$

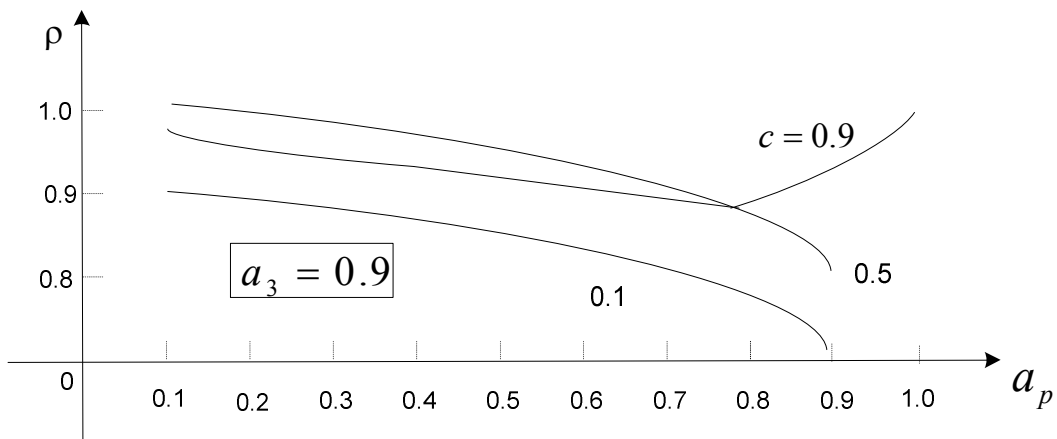


Рис. 3.23. Залежність коефіцієнта ефективності  $\rho$  від параметрів  $a_p$ , і  $c_1$  при  $a_3=0.9$

Аналіз одержаних залежностей показав, що квазіоптимальний регулятор, тобто дискретний регулятор Даліна типу IV, для  $a_3=0.9$  дає К.К.Д. майже 95%.



### 3.9.5.2. Дослідження впливу білого шуму на динамічні характеристики дискретних регуляторів Острьома і Даліна

В даному випадку розглядається дискретна система керування, у якої  $C(z)=A(z)$  (рис. 3.15, б). Отже, дисперсія вихідної змінної в дискретній системі з регулятором Острьома дорівнює дисперсії шуму, тобто

$$\sigma_o^2[y_o(t)] = \sigma^2[y(t)] = \sigma^2[e(t)] = \lambda^2. \quad (3.121)$$

Тому

$$I_o = \sigma_o^2[y_o(t)] = I = \sigma^2[y(t)] = \sigma^2[e(t)] = \lambda^2 \quad (3.122)$$

Дисперсія вихідної змінної в системі з регулятором Даліна типу IV

$$\sigma^2[y_d(t)] = \sigma_e^2 \frac{2}{1+a_3} \quad (3.123)$$

Вираз (3.123) одержаний з виразу (3.118) при  $c_1 = a_3$  оскільки  $C(z)=A(z)$ .

Одержана досить проста формула доводить, що **дисперсія вихідної змінної в дискретній системі з регулятором Даліна типу IV завжди вище дисперсії цієї змінної в розімкненому контурі**, тобто в неавтоматизованому об'єкті керування, оскільки  $0 \leq a_3 \leq 1$ . Для цього випадку можна записати;

$$\gamma_d = \frac{I_d}{I} = \frac{2}{1+a_3} \quad (3.124)$$

З метою уточнення динамічних властивостей дискретної системи з регулятором Даліна типу IV введемо до розгляду коефіцієнт, що характеризує відносне збільшення дисперсії вихідної змінної в цій системі. Запишемо названий коефіцієнт так:

$$R_d = \frac{I_d - I}{I} = \gamma_d - 1 \quad (3.125)$$

Отже, з урахуванням виразу (3.124):

$$R_D = \frac{1-a_3}{1+a_3}. \quad (3.126)$$

На рис. 3.24 наведена графічна залежність (3.126). З аналізу цієї залежності випливає, що відносне збільшення дисперсії вихідної змінної в дискретній системі з регулятором Даліна типу IV не перевищує 5% в тому випадку, коли  $a_3=0.9$ . Інакше кажучи,  $R_D \leq 5\% \Leftrightarrow a_3 \geq 0.9$ . Оскільки  $a_3 = \exp(-T/T_3)$ , то  $\exp(-T/T_3) \geq 0.9$ , якщо  $T_3 > 10T$ . Отже

$$R_D \leq 5\% \Leftrightarrow a_3 \geq 0.9 \Leftrightarrow T_3 \geq 10T \quad (3.127)$$

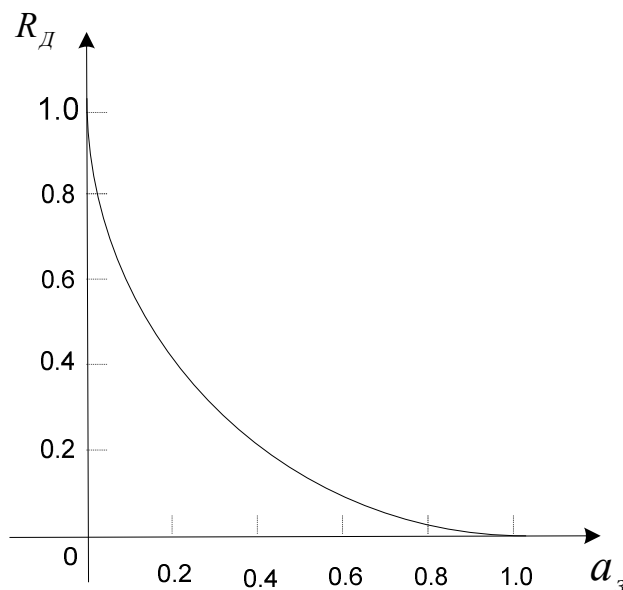


Рис. 3.24. Залежність коефіцієнта збільшення дисперсії  $R_D$  вихідної змінної від параметра налаштування  $a_3$  регулятора Даліна типу IV

### 3.9.5.3. Рекомендації щодо настроювання дискретних регуляторів Даліна

1. Проведений аналіз ефективності роботи дискретних систем керування з регуляторами Острьома і Даліна доводить, що дискретна система керування з регулятором Острьома буде оптимальною у випадку дії на неї послідовності незалежних або некорельованих випадкових змінних з нульовим середнім і стандартним середньоквадратичним відхиленням  $\sigma$ . Отже, для побудови такої системи треба знати не тільки характер таких збурень, а й місце їх дії. Однак усі хімічні об'єкти керування мають декілька точок дії збурень з різними амплітудами. У цьому випадку розроблений з такими труднощами закон керування буде оптимальним лише для одного виду збурень, і зовсім не оптимальним для іншого.

2. На основі сказаного вище для автоматизації хіміко-технологічних процесів пропонується застосовувати дискретний регулятор Даліна, що не розрізняє видів збурюючих впливів, і при бажаному значенні  $a_3$  дає підкоптимальний (квазіоптимальний) закон керування, який складає 95% від оптимального. Як довели дослідження, наведені, вище, дискретний регулятор Даліна досить нечутливий до оцінки параметрів об'єкта керування.

3. Виходячи з результатів дослідження динамічних властивостей дискретного регулятора Даліна типу IV, рекомендуються два методи його настроювання.

**Перший метод.** Фіксують певне значення загального коефіцієнта підсилення контуру керування  $k_C$ . У цьому випадку тривалість перехідного процесу залежатиме тільки від зміни сталої часу  $T_3$ . Тому

стійкість системи керування забезпечуватиметься за рахунок її динамічної точності.

**Другий метод.** Фіксують певне значення сталої часу замішеної системи  $T_3$ , обираючи його так, щоб  $T_3 \geq 10T$  ( $T$ - період дискретності системи), і збільшують загальний коефіцієнт підсилення контуру керування  $k_C$ . У цьому випадку запас стійкості системи зменшиться, але статична і динамічна точність системи керування збільшаться.

Для ілюстрації і підтвердження наведених вище висновків розглянемо дискретну автоматичну систему керування масою  $1\text{м}^2$  паперового полотна з регулятором Даліна типу IV (рис. 3.25).

Для папероробної машини що виробляє паперовий папір масою  $1\text{м}^2$   $51\text{г/м}^2$  маємо такі параметри[5]:

коефіцієнт підсилення каналу керування  $k_0=1$ , стала часу каналу керування  $k_0=60\text{с}$ , запізнювання в каналі керування  $\tau = 90\text{с}$ , період дискретності системи  $T=30\text{с}$ ,  $a_3=0.7$ .

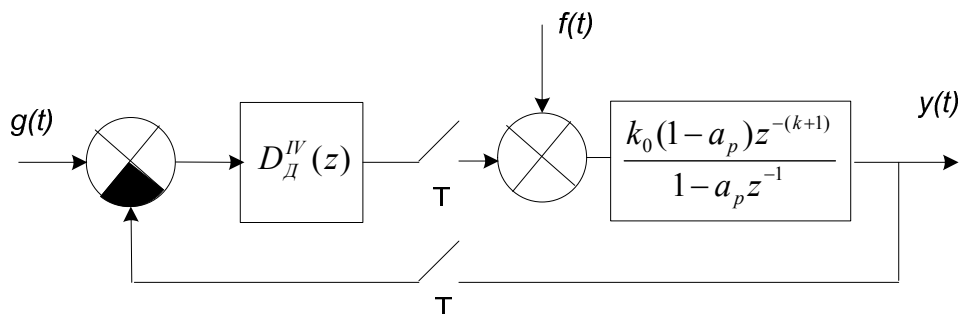


Рис. 3.25. Структурна схема дискретної автоматичної системи керування масою  $1\text{м}^2$  паперового полотна з регулятором Даліна типу IV

При поданні на вхід розімкненої системи стрибкоподібного збурюючого впливу  $f(t)$  (рис. 3.26), (графік б) відхилення вихідної змінної  $y(t)$  змінювалося так, як показано на рис. 3.26 (графік 1). При замкненні системи і поданні на її вхід такого ж збурення, і встановленні загального

коефіцієнта підсилення контуру  $k_C = k_O$ , вихідна змінна змінювалася так, як показано на рис. 3.26 (графік 2). Як видно з цього графіка, перехідний процес у системі має неколивний характер, а вихідна змінна наближається до свого заданого значення  $g_O(t) = 51 \text{ г/м}^2$ .

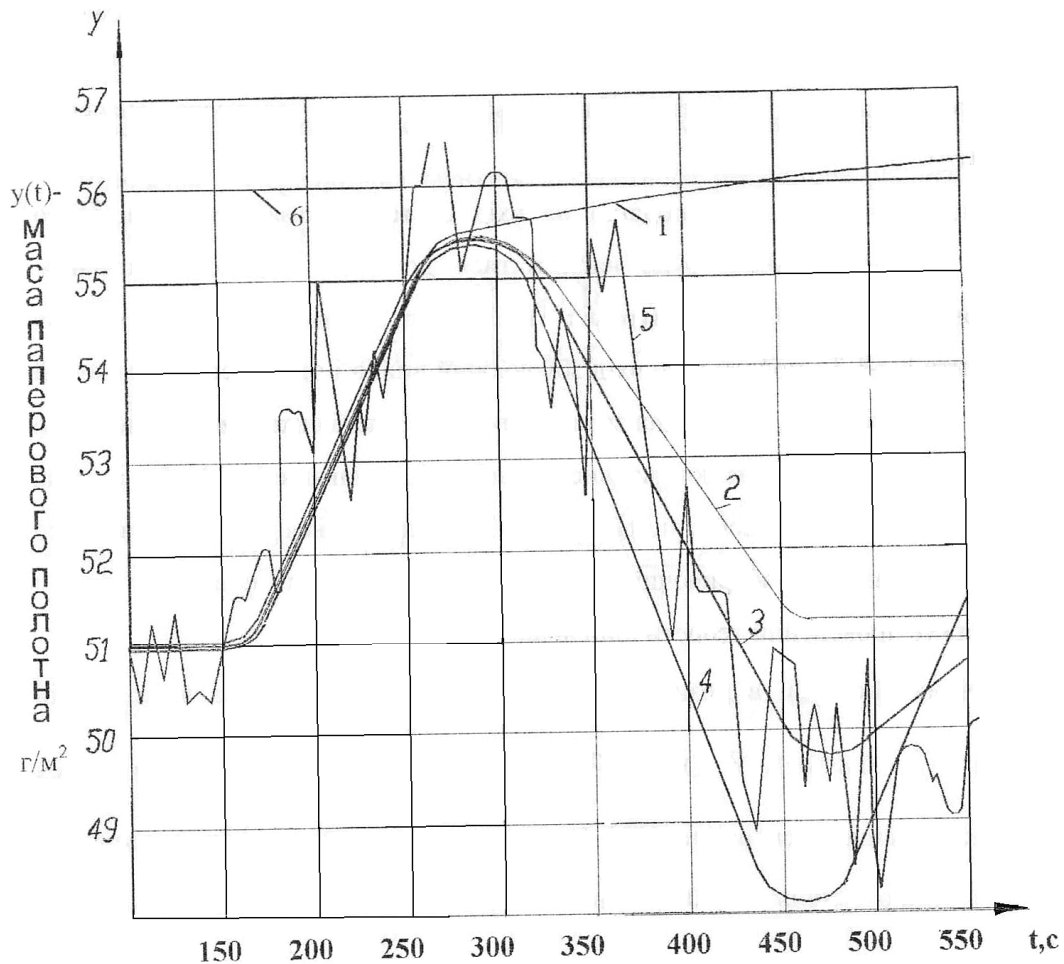


Рис. 3.26. Перехідні процеси у дискретній автоматичній системі керування масою  $1 \text{ м}^2$  паперового полотна з регулятором Даліна типу IV при стрибкоподібній зміні збурення :

1-без регулятора; 2-коефіцієнт підсилення контуру  $k_C = 1.0$ ; 3- середнє значення вихідної змінної; 4-коефіцієнт підсилення контуру  $k_C = 1.3$ ; 5- коефіцієнт підсилення контуру  $k_C = 1.3$  (на збурення накладається шум); 6-збурення

Якщо  $k_C=1.3$ , то, при поданні на вхід системи вказаного збурюючого впливу, вихідна змінна буде наближатися до свого заданого значення, здійснюючи коливний процес (графік 4). Нарешті, якщо в системі керування встановити  $k_C=1.3$  і подати на її вхід збурюючий вплив і одночасно збурюю - чий вплив у вигляді шуму, то вихідна змінна при  $k_O=1.3$  наближатиметься до свого заданого значення, здійснюючи високочастотні коливання (графік5) і, хоча середнє значення вихідної змінної (графік 3) наближається до свого заданого значення, вказаний збурюючий вплив не ліквідується повністю, що і підтверджує проведений теоретичний аналіз системи.

Величина дисперсії в розімкненій системі  $\sigma_y^2 = 0.766 (\varepsilon/m^2)^2$ , а в замкненій системі  $\sigma_{y_d}^2 = 0.895 (\varepsilon/m^2)^2$ . Отже,  $\sigma_{y_d}^2 / \sigma_y^2 = 1.17$ . Таким чином, здійснюється навіть збільшення дисперсії на 17%. Це означає, що прийнято мале значення  $a_3$  ( $a_3=0.7$ ). Якщо прийняти  $a_3 > 0.7$ , то якість стабілізації системи збільшиться.

### **3.10 Формування рекурентних співвідношень і структури алгоритмів дискретних регуляторів**

Для ілюстрації та конкретизації загальних методів формування рекурентних функцій з різницевих рівнянь та складання відповідних структур алгоритмів розглянемо два приклада.

**Приклад 3.1.** Розробити рекурентне співвідношення дискретного регулятора Даліна типу III для об'єкту керування [5], якщо відомі: стала часу  $T_O=20c$ ; коефіцієнт підсилення  $k_O=0.63$ ; запізнювання в каналі

керування  $\tau = 80\text{с}$ . Період дискретності системи  $T=20\text{с}$ , а стала залишеної системи  $TЗ=25\text{с}$ .

**Розв'язок.** Передаточна функція дискретного регулятора Даліна типу III (див. 3.39) має вигляд:

$$D_{\mathcal{D}}(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{(1-a_3)(1-a_p z^{-1})}{k_o(1-a_p)(1-a_3 z^{-1} - (1-a_3)z^{-(k+1)})}$$

Її можна записати і так:

$$D_{\mathcal{D}}(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{\frac{1-a_3}{k_o(1-a_p)} - a_p \frac{1-a_3}{k_o(1-a_p)} z^{-1}}{1-a_3 z^{-1} - (1-a_3)z^{-(k+1)}}$$

Нехай

$$a_o = \frac{1-a_3}{k_o(1-a_p)}; \quad a_1 = -a_p a_o; \quad b_1 = a_3, \quad b_2 = (1-a_3).$$

Тоді

$$D_{\mathcal{D}}(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{a_o + a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-(k+1)}}$$

звідки

$$(1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-(k+1)})u(z) = (a_o + a_1 z^{-1})e(z)$$

або

$$u(z) = a_o e(z) + a_1 e(z)z^{-1} + b_1 u(z)z^{-1} - b_2 u(z)z^{-(k+1)}$$

Отже, рекурентне співвідношення дискретного регулятора Даліна типу III матиме такий вигляд:

$$u[nT] = a_o e[nT] + a_1 e[(n-1)T] + b_1 u[(n-1)T] - b_2 u[(n-k-1)T]$$

Зробимо відповідні розрахунки:

$$1 - a_p = \exp(-T/T_o) = \exp(-20/20) = 0.368;$$

$$1 - a_p = 1 - 0.368 = 0.632; \quad k = \tau / T = 80 / 20 = 4;$$

$$k_O(1 - a_p) = 0.632 \times 0.63 = 0.398;$$

$$a_s = \exp(-T / T_s) = \exp(20 / 25) = 0.551; \quad 1 - a_s = 1 - 0.551 = 0.449;$$

$$a_0 = (1 - a_s) / k_O(1 - a_p) = 0.449 / 0.398 = 1.128;$$

$$a_1 = -a_p a_0 = 0.368 \times 1.128 = 0.415$$

$$\text{Отже } u[n] = 1.128e[n] - 0.415e[n-1] + 0.551u[n-1] + 0.449u[n-5]$$

**Приклад 3.2.** Розробити структуру дискретного регулятора Даліна типу III коли  $k = \tau / T = 1$ .

Розв'язок. Загальне рекурентне співвідношення дискретного регулятора Даліна типу III записується так:

$$u(n) = a_0 e(n) + a_1 e(n-1) + b_1 u(n-1) + b_2 u(n-2)$$

Згідно з табл. 1.2 складемо табл. 3.1

**Таблиця 3.1**

№ комірок	$v + 0$	$v + 1$	$v + 2$	$v + 3$
Змінні	$e(n)$	$e(n-1)$	$u(n-1)$	$u(n-2)$
№ комірок	$\eta + 0$	$\eta + 1$	$\eta + 2$	$\eta + 3$
Коефіцієнти	$a_0$	$a_1$	$b_1$	$b_2$

За результатами, наведеними у табл. 3.1, на рис 3.27 побудовано структуру алгоритму Даліна типу III ( $k=1$ ).





Рис. 3.27. Структура алгоритму регулятора Даліна типу III ( $k=1$ )

## Додаток 1. Z-перетворення функцій часу

Таблиця Д1

№ п/п	Оригінал $f(t)$	Перетворення Лапласа $F_L(p)$	Z-перетворення $F(z)$	Модифіковане z- перетворення $F(q,z)$
1	2	3	4	5
1	$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
2	$t$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{qTz}{z-1}$
3	$1/2t^2$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\frac{T^2z}{(z-1)^3} + \frac{(1+2q)T^2z}{2(z-1)^2} + \frac{(qT)^2z}{2(z-1)}$
4	$e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-d}, d = e^{-aT}$	$\frac{zd^q}{z-d}$
5	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}$ $d = \exp(-aT)$	$\frac{z}{z-1} - \frac{zd^q}{z-d}$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$\frac{z^2 \sin q\omega T + z \sin \delta\omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$ $\delta = 1 - q$
7	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$\frac{z^2 \sin q\omega T - z \cos \delta\omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

## Список рекомендованой літератури

1. Бессекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, Главн. ред. физ.-мат. лит., 1972. — 768с.
2. Бессекерский В.А., Израинцев В.В. Системы автоматического управления с микро-ЭВМ. — М.: Наука. Главн. ред. физ.- мат. лит., 1987.-320с.
3. Забашта Ю.П., Самотокин Б.Б. Микропроцессорные системы управления. — К.: УМК ВО, 1989.—83с.
4. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. — М.: Машиностроение, 1978.—735с.
5. Кваско М.З. Проектирование и расчет цифровых систем управления.— К.:УМК ВО, 1991.—220с.
6. Кваско М.З., Пиргач М.С., Аверіна Т.В. Проектування і розрахунк дискретних автоматичних систем керування технологічними процесами: Навч. посібник. — К.:НМЦ ВО, 2000.-248с.
7. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления: Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1986.—448с.
8. Микропроцессорные системы автоматического управления/ Под ред. В.А. Бессекерского. — М.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1988.— 365с.
9. Паскаль и числовые методы: Учеб. пособие / А.И.Кубрак, Т.В.Аверина. — К.: УМК ВО, 1992. —108с.
- 10.Пиргач Н.С., Пиргач В.С. Автоматическое регулирование и регуляторы в целлюлозно-бумажной, деревообрабатывающей и лесохимической промышленности —М.: Лесная промышленность, 1983.—262с.
- 11.Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под ред. В.А. Бесекерского. — М.: Наука, 1978.-512с.

- 12.Топчиев Ю.И., Цыпляков А.П. Задачник по теории автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1977. – 592с.
- 13.Ту Ю.Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1964. – 704с.