

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

**КОМП'ЮТЕРНІ МЕТОДИ ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМ  
АВТОМАТИЗАЦІЇ**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
до виконання контрольних і практичних робіт  
«Розрахунок дискретних систем керування»

для студентів спеціальності  
„Автоматизоване управління технологічними процесами”

*Рекомендовано Вченою радою інженерно-хімічного факультету*

Київ 2015

Комп'ютерні методи проектування систем автоматизації: Методичні вказівки до виконання контрольних і практичних робіт «Розрахунок дискретних систем керування» для студентів спеціальності «Автоматизоване управління технологічними процесами». / Уклад.: М. З. Кваско, Я. Ю. Жураковський. К.: НТУУ «КПІ», 2015 – 96 с.

*Гриф надано Вченою радою ІХФ  
(Протокол № 2 від 23.02.2015 р.)*

Навчальне видання  
КОМП'ЮТЕРНІ МЕТОДИ ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМ  
АВТОМАТИЗАЦІЇ

Методичні вказівки до виконання контрольних і практичних робіт  
«Розрахунок дискретних систем керування»  
для студентів напряму підготовки „Автоматизація та комп'ютерно-  
інтегровані технології”

Укладачі: Кваско Михайло Зиновійович, к.т.н., проф.  
Жураковський Ярослав Юрійович, ст.викл.

Відповідальний редактор Жученко А.І., д.т.н., проф.

Рецензент: Ладієва Л.Р., к.т.н., доц.

Авторська редакція

## З М І С Т

<b>1 ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА .....</b>	<b>5</b>
1.1 Теоретичні положення.....	5
1.2 Приклади розв'язання задач .....	9
<b>2 ПЕРЕДАВАЛЬНІ ФУНКЦІЇ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ .....</b>	<b>15</b>
2.1 Теоретичні положення.....	15
2.2 Приклади розв'язання задач .....	20
<b>3 ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ .....</b>	<b>22</b>
3.1 Теоретичні положення.....	22
3.2 Приклади розв'язання задач .....	26
<b>4. СИНТЕЗ ЦИФРОВИХ РЕГУЛЯТОРІВ .....</b>	<b>30</b>
4.1. Синтез цифрових регуляторів за методом Даліна.....	30
4.2. Умови забезпечення якості регулювання в системах з використанням регулятора Даліна .....	36
4.3. Перетворення імпульсних передавальних функцій в програмні.....	42
4.4 Синтез цифрових регуляторів за методом Калмана.....	44
4.5. Приклади розрахунку регуляторів Даліна та Калмана .....	53
4.5.1. Об'єкт заданий аперіодичною ланкою 1-го порядку.....	53
4.5.2. Об'єкт заданий аперіодичною ланкою 2-го порядку.....	75
<b>5 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ .....</b>	<b>91</b>
<b>ДОДАТОК.....</b>	<b>93</b>
Критерій Гурвіца для рівняння $n$ - ого порядку.....	93
<b>СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....</b>	<b>95</b>

## ВСТУП

Методичні вказівки містять основні теоретичні положення, приклади розв'язання типових задач та необхідні рекомендації до виконання розділу курсового проекту, контрольних та практичних робіт за темою «Розрахунок дискретних систем керування» з курсу «Комп'ютерні методи проектування систем автоматизації».

Термінологія, основні питання та завдання відповідають матеріалу, викладеному в літературних джерелах, список яких подано в кінці методичних вказівок.

# 1 ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

## 1.1 Теоретичні положення

Розрахунок імпульсних та цифрових систем керування базується на застосуванні  $z$ -перетворення, що здійснюється підстановкою

$$z = e^{pT}, \quad (1.1)$$

де  $p$  – оператор Лапласа,  $T$  – період дискретизації.

$Z$ -перетворенням гратчастої функції  $f(nT)$  називається функція комплексного аргументу  $z$ , яка згідно з визначенням  $z$ -перетворення має вигляд:

$$F(z) = Z[f(nT)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} \quad (1.2)$$

Якщо нескінченний ряд в правій частині виразу сходиться, функцію  $f(nT)$  називають *оригіналом*, а  $F(z)$  – *зображенням функції  $f(nT)$* .  $z$  – перетворення є аналогом перетворення Лапласа неперервної функції  $f(t)$  при  $z=e^{pT}$ .

Деякі властивості  $z$ -перетворення [2,3,4,5,6]:

## I. Алгебраїчне додавання

$$Z [f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(z) \pm F_2(z) \quad (1.3)$$

## II. Множення на константу

$$Z [af(t)] = aZ [f(t)] = aF(z), \quad (1.4)$$

де  $a$  - константа.

## III. Зсув в часовій області

$$Z [f(t-nT)] = z^{-n} F(z), \quad (1.5)$$

$$Z [f(t+nT)] = z^n \left[ F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} \right],$$

де  $n$  – додатне число.

## IV. Зсув в області зображень (множення оригіналу на експоненту)

$$Z [e^{\mp at} f(t)] = F(ze^{\pm aT}), \quad (1.6)$$

де  $a$  – константа.

Для спрощення процедури знаходження  $z$ -перетворення були складені таблиці  $z$ -перетворень простих функцій (див. табл. 1.1). Отже, для пошуку  $z$ -перетворення будь-якої функції її необхідно звести до табличного вигляду. Оскільки зображення сигналу або передавальну функцію можна подати у вигляді дробово-раціональної функції, для

зведення функції до табличного вигляду можна застосувати розкладання на прості дроби.

Таблиця 1.1 – Неперервні та дискретні перетворення Лапласа

№ з/п	Оригінал $f(t)$ неперервної функції	Зображення за Лапласом $F(p)$	Дискретна функція $f(nT)$	Дискретне зображення за Лапласом $F(z)$ при $t = nT$
1	$\delta(t)$	1	$\delta(nT)$	1
2	$\delta(t-kT)$	$e^{-kTp}$	$\delta(nT-kT)$	$z^{-k}$
3	$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$1(nT)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$t$	$\frac{1}{p^2}$	$nT$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{nT^2}{2}$	$\frac{Tz(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha nT}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
7	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$e^{\alpha nT}$	$\frac{z}{z-e^{\alpha T}}$
8	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$1 - e^{-\alpha nT}$	$\frac{(1 - e^{-\alpha T})z}{(z-1)(z - e^{-\alpha T})}$

### Обернене $z$ -перетворення.

Для  $z$ -перетворення обернене  $z$ -перетворення  $Z^{-1}[F(z)]$  не є однозначним, тобто  $z$ -перетворення  $f(t)$  визначається функцією  $F(z)$ , а обернене  $z$ -перетворення не обов'язково дорівнює  $f(t)$ . Коректним результатом оберненого  $z$ -перетворення функції  $F(z)$  буде  $f(nT)$ , що дорівнює  $f(t)$  тільки в моменти квантування  $t = nT$ .

Розглянемо два метода отримання оберненого  $z$ -перетворення, які є еквівалентними [4,7].

#### *Метод розкладання на прості дроби.*

Відомо, що при розкладанні на прості дроби ми отримуємо вирази вигляду  $A/(z + a)$ , які відсутні у таблиці  $z$ -перетворень. Але в таблиці присутній вираз  $Az/(z - e^{-aT})$ , обернене  $z$ -перетворення якого дорівнює  $Ae^{-anT}$ . Виходячи з цього зручніше буде розкласти на прості дроби функцію  $F(z)/z$ , після чого обидві частини виразу для  $F(z)/z$  помножити на  $z$  щоб отримати  $F(z)$ .

Для функції, що не містить нулів ( $z = 0$ ), відповідна послідовність імпульсів має зсув у часі. Розкладання функції  $F(z)$  на прості дроби представляють у звичному вигляді:

$$F(z) = \frac{A}{z+a} + \frac{B}{z+b} + \dots$$

після чого знаходимо

$$F_1(z) = zF(z) = \frac{Az}{z+a} + \frac{Bz}{z+b} + \dots \quad (1.7)$$



Якщо знайдене обернене  $z$ -перетворення функції  $F_1(z)$ ,  $f_1(nT)$ , то обернене  $z$ -перетворення функції  $F(z)$  визначається так:

$$f(nT) = Z^{-1}[F(z)] = Z^{-1}[z^{-1} F_1(z)] = f_1[(n-1)T]. \quad (1.8)$$

*Метод розкладання у степеневий ряд.*

Обернене  $z$ -перетворення функції  $F(z)$  може бути визначене розкладанням її у безкінечний ряд за степенями  $z^{-1}$ . Тобто

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots + f(nT)z^{-n} + \dots, \quad (1.9)$$

де  $B(z)$ ,  $A(z)$  – поліноми від  $z$ .

Тоді, порівнюючи (1.9) з (1.2) можна зробити висновок, що коефіцієнти ряду (1.9) є значеннями  $f(t)$  у моменти квантування. Такий безкінечний ряд можна отримати послідовним діленням полінома чисельника  $B(z)$  на поліном знаменника  $A(z)$  функції  $F(z)$ .

## 1.2 Приклади розв'язання задач

**Приклад 1.2.1** Знайти  $z$ -перетворення функції, якщо її зображення за Лапласом

$$F(p) = \frac{k_1 e^{-p\tau}}{p^2(T_1 p + 1)}, \quad \text{де } k_1 = 5; T = 0,3; T_1 = 0,5; \tau = 0,3.$$

**Розв'язання.**

Згідно (1.5):

$$F(z) = Z \left[ \frac{k_1}{p^2(T_1 p + 1)} \right] z^{-k}, \quad \text{де } k = \tau / T = 0,3 / 0,3 = 1.$$

Розкладемо вираз у фігурних дужках на прості дроби:

$$\frac{k_1}{p^2(T_1 p + 1)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{T_1 p + 1}.$$

Помножимо обидві частини виразу на  $p^2(T_1 p + 1)$  та отримаємо:

$$k_1 = A(T_1 p + 1) + Bp(T_1 p + 1) + Cp^2.$$

Порівнявши коефіцієнти при однакових степенях  $p$  в лівій та правій частинах рівняння, дістанемо невідомі коефіцієнти  $A$ ,  $B$ ,  $C$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} p^0: \quad k_1 = A; \\ p^1: \quad 0 = AT_1 + B; \\ p^2: \quad 0 = BT_1 + C; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = k_1; \\ B = -k_1 T_1; \\ C = k_1 T_1^2. \end{array} \right.$$

Отже:

$$\frac{k_1}{p^2(T_1 p + 1)} = k_1 \left( \frac{1}{p^2} - \frac{T_1}{p} + \frac{T_1^2}{T_1 p + 1} \right) = k_1 \left( \frac{1}{p^2} - \frac{T_1}{p} + \frac{T_1}{p + 1/T_1} \right).$$

Після застосування  $z$ -перетворення до кожного доданку окремо, згідно табл. 1.1 матимемо:

$$F(z) = k_1 \left( \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{T_1 z}{z-1} + \frac{T_1 z}{z-d} \right) z^{-k} = k_1 z \frac{(T + T_1(d-1))z - Td + T_1(1-d)}{(z-1)^2(z-d)} z^{-k},$$

де  $d = e^{-T/T_1}$ .

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$F(z) = \frac{0,377z + 0,297}{(z-1)^2(z-0,551)}.$$

**Приклад 1.2.2** Знайти  $z$ -перетворення функції, якщо її зображення за Лапласом

$$F(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \frac{k_1}{(T_1 p + 1)}, \quad \text{де } k_1 = 5; \quad T = 0,4; \quad T_1 = 0,2.$$

**Розв'язання.**

Позначимо  $W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}$ . Тоді:

$$\begin{aligned} F(z) &= Z \left[ \frac{1 - e^{-pT}}{p} W_1(p) \right] = Z \left[ \frac{W_1(p)}{p} - e^{-pT} \frac{W_1(p)}{p} \right] = \\ &= Z \left[ \frac{W_1(p)}{p} \right] - Z \left[ e^{-pT} \frac{W_1(p)}{p} \right] = Z \left[ \frac{W_1(p)}{p} \right] - z^{-1} Z \left[ \frac{W_1(p)}{p} \right]. \end{aligned}$$

Були використані властивості  $z$ -перетворень (1.3) та (1.5).

Таким чином:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{W_1(p)}{p}\right] = \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{k_1}{p(T_1 p + 1)}\right] = \\
 &= k_1 \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{1/T_1}{p(p+1/T_1)}\right] = k_1 \frac{z-1}{z} \frac{(1-e^{-T/T_1})z}{(z-1)(z-e^{-T/T_1})},
 \end{aligned}$$

або після спрощення та підстановки числових даних:

$$F(z) = k_1 \frac{1-e^{-T/T_1}}{z-e^{-T/T_1}} = \frac{5(1-e^{-2})}{z-e^{-2}}.$$

**Приклад 1.2.3** Знайти обернене  $z$ -перетворення функції

$$F(z) = \frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})},$$

якщо  $a$  - додатне число,  $T$  – період квантування.

**Розв'язання.**

*Спосіб 1.* Розкладемо на прості дроби функцію  $F(z)/z$  :

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{A}{z-1} - \frac{B}{z-e^{-aT}}, \quad \text{де } A = 1, \quad B = 1.$$

Помножимо обидві частини виразу на  $z$ :

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}}.$$

За таблицею  $z$ -перетворень (табл. 1.1) знайдемо оригінал:

$$f(nT) = 1(nT) - e^{-anT} = 1 - e^{-anT}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Спосіб 2. Розділимо поліном чисельника на поліном знаменника функції  $F(z)$ :

$$F(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})} = \frac{(1 - e^{-aT})z}{z^2 - (1 + e^{-aT})z + e^{-aT}}.$$

Виконаємо ділення в стовпчик:

$$\begin{array}{r} \frac{(1 - e^{-aT})z}{(1 - e^{-aT})z - (1 - e^{-2aT}) + e^{-aT}(1 - e^{-aT})z^{-1}} \left| \frac{z^2 - (1 + e^{-aT})z + e^{-aT}}{(1 - e^{-aT})z^{-1} + (1 - e^{-2aT})z^{-2} + \dots} \right. \\ \underline{-(1 - e^{-2aT}) - e^{-aT}(1 - e^{-aT})z^{-1}} \\ \frac{(1 - e^{-2aT}) - (1 + e^{-aT})(1 - e^{-2aT})z^{-1} + e^{-aT}(1 - e^{-aT})z^{-2}}{(1 - e^{-3aT})z^{-1} - e^{-aT}(1 - e^{-aT})z^{-2}} \end{array}$$

Отже:

$$F(z) = (1 - e^{-aT})z^{-1} + (1 - e^{-2aT})z^{-2} + \dots$$

Легко бачити, що  $f(nT) = 1 - e^{-anT}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Приклад 1.2.4** Знайти обернене  $z$ -перетворення функції

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 1,5z + 0,5}.$$

**Розв'язання.**

Знайдемо корені рівняння

$$z^2 - 1,5z + 0,5 = 0.$$

Значення коренів  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 0,5$ .

Розкладемо на прості дроби функцію  $F(z)/z$  :

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{2}{z-1} - \frac{2}{z-0,5}.$$

Помножимо обидві частини виразу на  $z$ . Дістанемо:

$$F(z) = 2 \left( \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,5} \right).$$

Перший доданок у дужках має оригінал  $1(nT)$ , другий доданок можна подати у вигляді  $z / (z - e^{-aT})$ , якому згідно з табл. 1.1 відповідає оригінал  $e^{-anT}$ , де  $a = \ln 0,5$ . Отже, шуканий оригінал має вигляд:

$$f(nT) = 2[1(nT) - e^{-anT}] = 2[1 - e^{-n \ln 0,5}] = 2[1 - 0,5^n],$$

де  $n = 0, 1, 2, \dots$

## 2 ПЕРЕДАВАЛЬНІ ФУНКЦІЇ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

### 2.1 Теоретичні положення

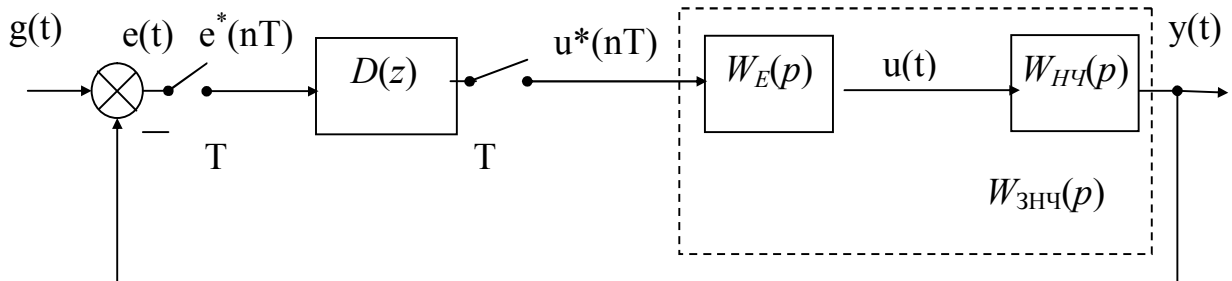


Рис. 2.1

На рис. 2.1 зображено цифрову систему автоматичного керування [6,10], що складається з ідеального імпульсного елемента (квантувача), зображеного у вигляді ключа, що замикається з періодом  $T$ ; цифрового регулятора з дискретною передавальною функцією  $D(z)$ ; формуючого фільтра (екстраполятора нульового порядку) з передавальною функцією  $W_E(p) = (1 - e^{-pT})/p$ ; неперервної частини системи, передавальна функція якої  $W_{HЧ}(p)$ . Перевальні функції екстраполятора та неперервної частини об'єднують у передавальну функцію зведеної неперервної частини  $W_{ЗНЧ}(p)$ .

$g(t)$  – сигнал завдання у неперервній формі;

$e(t) = g(t) - y(t)$  сигнал відхилення у аналоговій та  $e(nT)$  – у дискретній формі;

$u^*(nT)$ ,  $u(t)$  – сигнал керуючого впливу відповідно у дискретній та аналоговій формі.

За аналогією з лінійними неперервними системами дискретною передавальною функцією  $W(z)$  називається відношення  $z$ -перетворення вихідної величини  $y[nT]$  до  $z$ -перетворення вхідної величини  $x[nT]$  за нульових початкових умов [4,10].

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (2.1)$$

Дискретна передавальна функція може розглядатися також як  $z$ -перетворення функції ваги  $w(nT)$  зведеної неперервної частини системи, тобто

$$W_{зНЧ}(z) = Z [w(nT)]. \quad (2.2)$$

Оскільки за означенням зображення за Лапласом функції ваги зведеної неперервної частини системи дорівнює її передавальній функції, тобто

$$L[w(t)] = W_{зНЧ}(p),$$

то можна записати, що:

$$W_{зНЧ}(z) = Z [W_{зНЧ}(p)]. \quad (2.3)$$

Це співвідношення дозволяє знаходити  $z$ -перетворення функції  $f(t)$  на основі її зображення за Лапласом, використовуючи таблицю  $z$ -перетворень.

Передавальна функція зведеної неперервної частини системи дорівнює добуткам передавальних функцій екстраполятора та неперервної частини системи:



$$W_{3HЧ}(p) = W_E(p)W_{HЧ}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} W_{HЧ}(p).$$

Дискретна передавальна функція зведеної неперервної частини  $W_{3HЧ}(z)$  (див. приклад 1.2.2):

$$W_{3HЧ}(z) = \frac{z-1}{z} Z \left[ \frac{W_{HЧ}(p)}{p} \right]. \quad (2.4)$$

Дискретна передавальна функція розімкненої системи має вигляд:

$$W_P(z) = Y(z)/E(z) = D(z) W_{3HЧ}(z). \quad (2.5)$$

Дискретна передавальна функція замкненої системи для каналу «завдання-вихід»:

$$W_3(z) = \frac{W_P(z)}{1 + W_P(z)} = \frac{D(z)W_{3HЧ}(z)}{1 + D(z)W_{3HЧ}(z)}. \quad (2.6)$$

Отже, для визначення дискретної передавальної функції розімкненої  $W_P(z)$  та замкненої системи  $W_3(z)$  треба:

- знайти передавальну функцію неперервної частини  $W_{HЧ}(p)$ ;
- за формулою (2.4) знайти дискретну передавальну функцію зведеної неперервної частини системи  $W_{3HЧ}(z)$ ;
- за формулою (2.5) знайти дискретну передавальну функцію розімкненої системи  $W_P(z)$ ;
- за формулою (2.6) знайти дискретну передавальну функцію системи замкненої системи  $W_3(z)$ .

Передавальна функція замкненої системи для каналу «завдання-відхил» визначається як:

$$W_{\varepsilon}(z) = \frac{E(z)}{G(z)} = \frac{1}{1 + W_p(z)}. \quad (2.7)$$

Передавальна функція замкненої системи за збуренням це відношення  $z$ -перетворень вихідної змінної  $Y(z)$  до збурення  $F(z)$ :

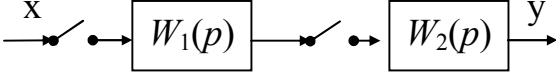
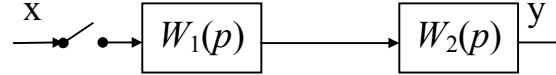
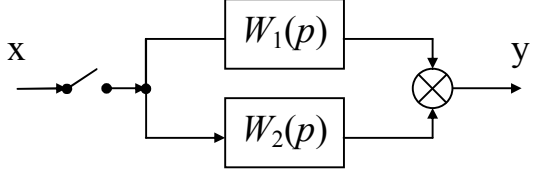
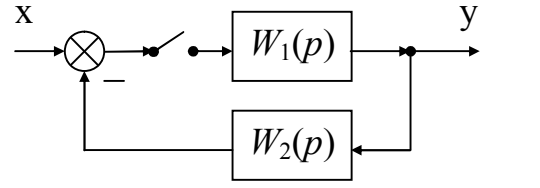
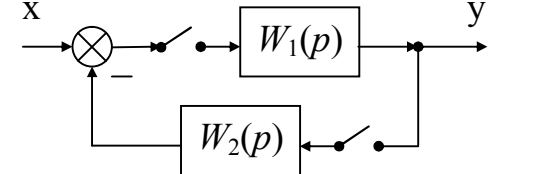
$$W_f(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{\Phi_f(z)}{1 + W_p(z)}, \quad (2.8)$$

де  $\Phi_f(z)$  – передавальна функція об'єкту за каналом «точка прикладання збурення – вихід», тобто  $\Phi_f(z)$  – передавальна функція з'єднання ланок, що знаходяться між точкою прикладання збурення та виходом системи [4,6,7,10].

При визначенні дискретних передавальних функцій можна користуватися табл. 2.1, в якій наведені основні схеми з'єднань та еквівалентні вирази для їх дискретних передавальних функцій.

Для послідовно з'єднаних ланок, між якими немає квантувача, їх дискретна передавальна функція є  $z$ -перетворенням добутку їх передавальних функцій. Для послідовно з'єднаних ланок, між якими є квантувач, їх дискретна передавальна функція дорівнює добутку  $z$ -перетворень їхніх передавальних функцій.

Таблиця 2.1–Дискретні передавальні функції основних схем з'єднань

Схема з'єднань	Передавальна функція
	$W_{XY}(z) = W_1(z) W_2(z)$
	$W_{XY}(z) = Z [W_1(z) W_2(z)] = W_{12}(z)$
	$W_{XY}(z) = Z [W_1(z) + W_2(z)] = W_1(z) + W_2(z)$
	$W_{XY}(z) = \frac{W_1(z)}{1 + W_2(z)}$
	$W_{XY}(z) = \frac{W_1(z)}{1 + W_1(z) \cdot W_2(z)}$

## 2.2 Приклади розв'язання задач

**Приклад 2.2.1** Знайти дискретні передавальні функції розімкненої та замкненої системи, структура якої наведена на рис. 2.1:

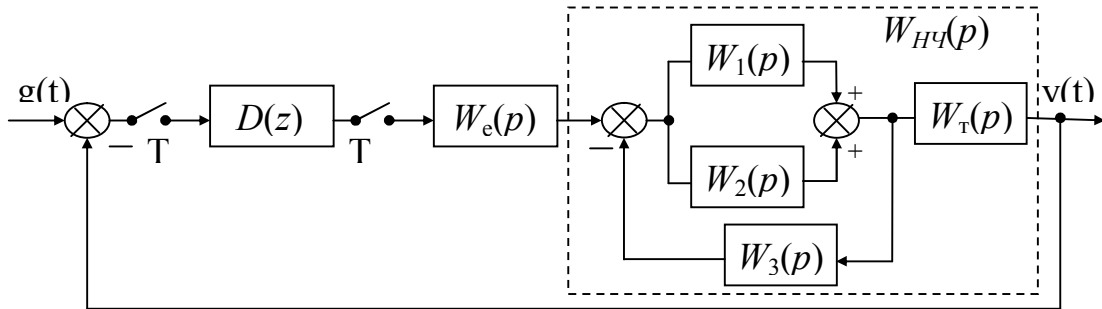


Рис. 2.1

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}; \quad W_E(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p};$$

$$W_3(p) = k_3; \quad W_T(p) = e^{-p\tau}; \quad D(z) = 1,$$

де  $k_1 = 5$ ;  $k_2 = 2$ ;  $k_3 = 0,2$ ;  $T_1 = 0,5$ ;  $T_2 = 0,5$ ;  $T = 0,3$ ;  $\tau = 0,3$ .

### Розв'язання.

Передавальна функція неперервної частини з урахуванням послідовних, паралельних з'єднань та оберненого зв'язку матиме вигляд:

$$W_{HЧ}(p) = \frac{W_1(p) + W_2(p)}{1 + [W_1(p) + W_2(p)]W_3(p)} W_T(p).$$

Зважаючи на те, що  $T_1 = T_2$ , матимемо:

$$W_{HЧ}(p) = \frac{\frac{k_1 + k_2}{T_1 p + 1}}{1 + \frac{k_1 + k_2}{T_1 p + 1} k_3} e^{-p\tau} = \frac{k_1 + k_2}{T_1 p + 1 + (k_1 + k_2)k_3} e^{-p\tau}.$$

Враховуючи формулу (2.4) та властивості  $z$ -перетворення (1.5), передавальна функція зведеної неперервної частини системи:

$$W_{знч}(z) = \frac{z-1}{z} Z \left[ \frac{1}{p} \frac{k_1+k_2}{T_1 p + 1 + (k_1+k_2)k_3} \right] z^{-k}, \quad \text{де } k = \tau / T.$$

Розкладемо вираз у фігурних дужках на прості дроби та знайдемо його  $z$ -перетворення:

$$W_{знч}(z) = \frac{k_1+k_2}{1+(k_1+k_2)k_3} \frac{1-d}{z-d} z^{-k}, \quad \text{де } d = e^{-T/T_1}.$$

Після підстановки числових даних дістанемо:

$$W_{знч}(z) = 2,9167 \frac{0,763}{z-0,2369} z^{-1} = \frac{2,225z^{-2}}{1-0,2369z^{-1}},$$

Оскільки  $D(z)=1$ , дискретна передавальна функція розімкненої системи згідно (2.5) матиме вигляд:

$$W_P(z) = D(z) W_{знч}(z) = \frac{2,225z^{-2}}{1-0,2369z^{-1}}.$$

Дискретна передавальна функція замкненої системи для каналу «завдання  $g(t)$  – вихід  $y(t)$ » згідно з (2.6) матиме вигляд:

$$W_3(z) = \frac{W_P(z)}{1+W_P(z)} = \frac{2,225z^{-2}}{1-0,2369z^{-1} + 2,225z^{-2}}.$$

### 3 ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

#### 3.1 Теоретичні положення

Необхідною та достатньою умовою стійкості дискретної системи є знаходження коренів її характеристичного рівняння всередині кола одиничного радіуса з центром у початку координат на площині комплексної змінної  $z$  (рис. 3.1) [2,4,5,6,7].

Тобто для характеристичного рівняння

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0, \quad (3.1)$$

з коренями  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$\text{умова стійкості має вигляд } |z_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

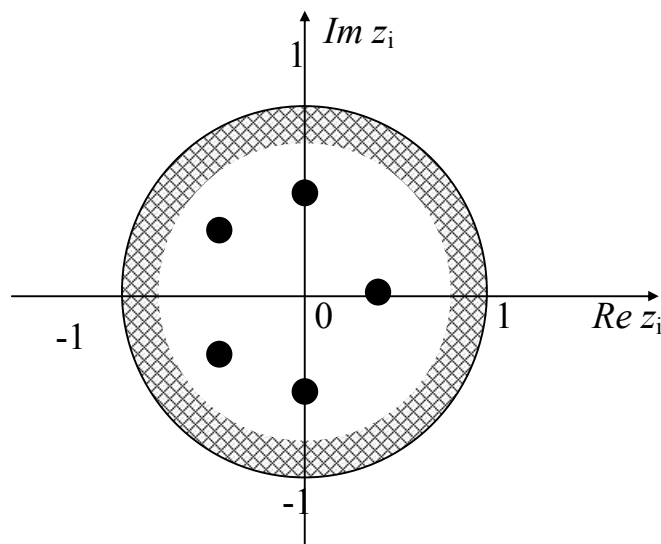


Рис 3.1

Для знаходження коренів рівнянь порядку  $n \geq 3$  доцільно застосовувати чисельні методи, програмна реалізація яких наведена в [9].

Щоб запобігти необхідності розв'язку алгебраїчних рівнянь високого порядку, розроблені критерії стійкості, які дозволяють судити про стійкість системи автоматичного керування за деякими відношеннями коефіцієнтів характеристичного рівняння.

За **критерієм Шур-Кона** корені характеристичного рівняння (3.1) будуть лежати всередині кола одиничного радіуса, якщо коефіцієнти рівняння задовольняють умовам:

$$\begin{aligned} \Delta_i < 0 & \text{ для непарних } i ; \\ \Delta_i > 0 & \text{ для парних } i , \end{aligned} \tag{3.3}$$

де  $\Delta_i$  - визначник Шур-Кона [1, 4, 11, 12] виду:

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{v-1} \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{v-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & a_{v-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-v+1} & a_{n-v+2} & a_{n-v+3} & \dots & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n^* & a_{n-1}^* & a_{n-2}^* & \dots & a_{n-v+1}^* \\ a_1^* & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n^* & a_{n-1}^* & \dots & a_{n-v+2}^* \\ a_2^* & a_1^* & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_n^* & \dots & a_{n-v+3}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{v-1}^* & a_{v-2}^* & a_{v-3}^* & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n^* \end{vmatrix},$$

де  $v = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

$a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$  - спряжені значення коефіцієнтів характеристичного рівняння. Для дійсних коефіцієнтів  $a_1^* = a_1, a_2^* = a_2, \dots, a_n^* = a_n$ .

Для характеристичного полінома другого порядку

$$A(z) = z^2 + a_1z + a_2 = 0 \quad (3.4)$$

умови стійкості за Шур-Коном мають вигляд:

$$|A(0)| < 1, A(1) > 0, A(-1) > 0. \quad (3.5)$$

Для характеристичного полінома третього порядку

$$A(z) = z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3 = 0 \quad (3.6)$$

визначники Шур-Кона для стійкої системи мають вигляд:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ 1 & a_3 \end{vmatrix} < 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & 1 & a_1 \\ a_2 & a_3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a_3 & a_2 \\ a_1 & 1 & 0 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$



$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & 0 & 1 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 & 1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} < 0. \quad (3.7)$$

Для полегшення процедури обчислення визначників високих порядків можна застосовувати обчислювальну техніку.

Після застосування до характеристичного рівняння **білінійного перетворення** виду

$$z = (1 + w)/(1 - w) \quad (3.8)$$

стійкість дискретної системи можна досліджувати за критерієм Рауса або Гурвіца [1-6].

Критерій Гурвіца для рівняння  $n$ -ого порядку дивись у додатку А.

Так після заміни змінних (3.8) в рівнянні (3.6) та відкидаючи знаменник, матимемо:

$$(1 - a_1 + a_2 - a_3)w^3 + (3 - a_1 - a_2 + 3a_3)w^2 + (3 + a_1 - a_2 - 3a_3)w + 1 + a_1 + a_2 + a_3 = 0,$$

або

$$b_3w^3 + b_2w^2 + b_1w + b_0 = 0.$$

Тоді згідно з критерієм Гурвіца [1,4,11] складаємо визначники Гурвіца і знаходимо умови стійкості для рівняння третього порядку:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_3 = 1 - a_1 + a_2 - a_3 > 0, \\ b_2 = 3 - a_1 - a_2 + 3a_3 > 0, \\ b_1 = 3 + a_1 - a_2 - 3a_3 > 0, \\ b_0 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 > 0, \\ b_2 b_1 - b_3 b_0 = (3 - a_1 - a_2 + 3a_3)(3 + a_1 - a_2 - 3a_3) - \\ - (1 + a_1 + a_2 + a_3)(1 - a_1 + a_2 - a_3) > 0. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

### 3.2 Приклади розв'язання задач

**Приклад 3.2.1** Дослідити стійкість системи автоматичного керування, якщо характеристичне рівняння замкненої системи має вигляд:

$$A(z) = z^3 - 1,014456z^2 + 0,302017z - 0,00506 = 0. \quad (*)$$

**Розв'язання.**

Спосіб 1. За розташуванням коренів характеристичного рівняння.

Знайдемо корені (рис. 3.2):

$$z_1 = 0,018 ; \quad z_{2,3} = 0,5 \pm j 0,19 ;$$

$$|z_1| < 1;$$

$$|z_{2,3}| = \sqrt{0,5^2 + 0,19^2} = 0,5348 < 1.$$

Оскільки корені заданого характеристичного рівняння замкненої системи знаходяться в середині кола одиничного радіусу, система є стійкою.

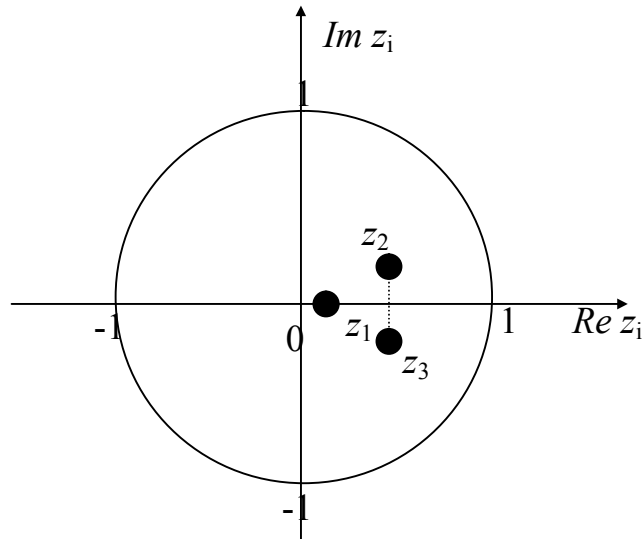


Рис. 3.2

Спосіб 2. За критерієм Шур-Кона.

Знайдемо парні та непарні визначники Шур-Кона:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -0,00506 & 1 \\ 1 & -0,00506 \end{vmatrix} = -1,000025 < 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -0,00506 & 0 & 1 & -1,014456 \\ 0,302017 & -0,00506 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -0,00506 & 0,302017 \\ -1,014456 & 1 & 0 & -0,00506 \end{vmatrix} = 0,97 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -0,00506 & 0 & 0 & 1 & -1,014456 & 0,302017 \\ 0,302017 & -0,00506 & 0 & 0 & 1 & -1,014456 \\ -1,014456 & 0,302017 & -0,00506 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -0,00506 & 0,302017 & -1,014456 \\ -1,014456 & 1 & 0 & 0 & -0,00506 & 0,302017 \\ 0,302017 & -1,014456 & 1 & 0 & 0 & -0,00506 \end{vmatrix} =$$

$$= -0,6 < 0.$$

Всі умови стійкості Шур-Кона виконуються, отже можна зробити висновок, що замкнена система є стійкою.

Спосіб 3. За допомогою білінійного перетворення.

Зробимо білінійну підстановку (3.8) у характеристичному рівнянні (\*) та після елементарних перетворень отримаємо:

$$2,321533w^3 + 3,697259w^2 + 1,698707w + 0,282501 = 0.$$

Скористаємося умовою стійкості Гурвіца для рівняння третього порядку (3.9):

$$2,321533 > 0, \quad 3,697259 > 0, \quad 0,282501 > 0,$$

$$3,697259 * 1,698707 - 2,321533 * 0,282501 = 5,624724 > 0,$$

Як бачимо, усі висновки про стійкість системи збігаються.

**Приклад 3.2.2** Дослідити стійкість замкненої цифрової системи автоматичного керування, якщо розімкнена передавальна функція системи має вигляд:

$$W_P(z) = \frac{0,632z}{z^2 - 1,368z + 0,368}.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння замкненої системи:

$$A(z) = 1 + W_P(z) = 1 + \frac{0,632z}{z^2 - 1,368z + 0,368} = 0,$$

або

$$A(z) = z^2 - 0,736z - 0,368 = 0.$$

Його корені:  $z_1 = 1,1$ ;  $z_2 = -0,34$ .

Система нестійка, тому що один з коренів характеристичного рівняння знаходиться за межами кола одиничного радіусу.

## 4. СИНТЕЗ ЦИФРОВИХ РЕГУЛЯТОРІВ

### 4.1. Синтез цифрових регуляторів за методом Даліна

#### 4.1.1. Загальні теоретичні положення

В практиці реалізації цифрових регуляторів застосовують стандартні алгоритми, які еквівалентні неперервним регуляторам. Можна проектувати алгоритми таких регуляторів, які забезпечують заданий перехідний процес в замкнутій системі регулювання.

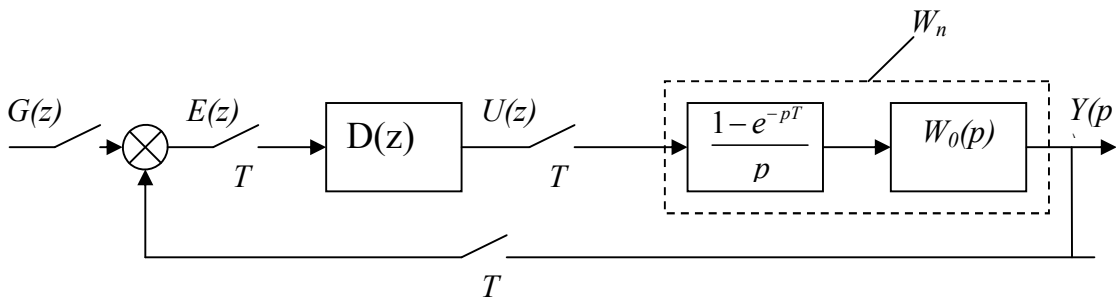


Рис. 4.1 – Структурна схема цифрової системи регулювання

Імпульсна передавальна функція  $D(z)$  знаходиться по такій формулі:

$$\Phi(z) = \frac{D(z)W_n(z)}{1 + D(z)W_n(z)},$$

де  $W_n(z)$  – зведена неперервна частина;  $\Phi(z)$  – передавальна функція замкнutoї системи в формі  $z$  – перетворення.

Для знаходження  $\Phi(z)$  задаємося перехідним процесом в замкненій цифровій системі керування в вигляді аперіодичної ланки першого порядку з запізненням:

$$\Phi(p) = \frac{Y(p)}{q(p)} = \frac{e^{-p\tau}}{T_3 p + 1}, \quad (4.1)$$

де  $T_3$  стала часу замкненої системи;  $\tau$  — запізнення, що дорівнює запізненню об'єкта в каналі керування.

Як видно, коефіцієнт передачі дорівнює одиниці. Це пояснюється тим, що розглянутий канал "завдання – вихід"  $g(t) - y(t)$  в якому дотримується умова: на скільки одиниць збільшили завдання, на стільки ж збільшиться і вихідна величина.

Перетворимо в  $z$ -форму:

$$Z\{e^{-P\tau}\} = Z\left\{e^{-P\frac{\tau}{T}T}\right\} = Z\{e^{-PTK}\},$$

де  $K = \tau / T$ ,  $KT < \tau \leq (K + 1)T$ .

Знайдемо  $z$ -перетворення для виразу  $1 / (T_3 P + 1)$ .

Введемо позначення:  $d = 1 / T_3$ ;  $a_3 = e^{-dT}$ . Тоді  $z$ -перетворення від (4.1) має наступний вигляд:

$$\Phi(z) = \frac{1 - a_3}{z - a_3} z^{-K} = \frac{1 - a_3}{1 - a_3 z^{-1}} z^{-(k+1)} \quad (4.2)$$

$$D(z) = [W_p(z)]^{-1} \frac{(1-a_3)z^{-(k+1)}}{1-a_3z^{-1}-(1-a_3)z^{-(k+1)}} \quad (4.3)$$

Вираз (4.3) представляє в загальному вигляді імпульсну передавальну функцію регулятора Даліна. Маючи (4.4), розглянемо об'єкти керування, що задані у вигляді різних передавальних функцій.

1. Об'єкт керування має передавальну функцію

$$W_{ob}(P) = \frac{K_{ob}e^{-Pt}}{T_{ob}P+1}. \quad (4.4)$$

Знайдемо z-перетворення  $W_p(P)$  з врахуванням (4.4):

$$W_p(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_{ob}(P)}{P} \right\}. \quad (4.5)$$

Другий співмножник в (4.5) розкладемо на прості дроби:

$$Z \left\{ \frac{W_{ob}(P)}{P} \right\} = Z \left\{ \frac{K_{ob}e^{-Pt}}{P(T_{ob}P+1)} \right\} = Z \left\{ \frac{K_{ob}e^{-Pt}}{P} - \frac{K_{ob}T_{ob}e^{-Pt}}{T_{ob}P+1} \right\} = Z \left\{ \frac{K_{ob}e^{-Pt}}{P} - \frac{K_{ob}e^{-Pt}}{P + \frac{1}{T_{ob}}} \right\}$$

У відповідності до таблиці модифікованих z-перетворень:

$$Z \left\{ \frac{W_{ob}(P)}{P} \right\} = \frac{K_{ob}(C_1 + C_2z^{-1})z^{-(k+1)}}{1 - e^{-T/T_{ob}}z^{-1}}$$

С врахуванням (4.5)

$$W_p(z) = \frac{K_{ob}(C_1 + C_2z^{-1})z^{-(k+1)}}{1 - e^{-T/T_{ob}}z^{-1}} \quad (4.6)$$



$$\text{Де } C_1 = 1 - e^{-\alpha T/T_{ob}}; C_2 = e^{-\alpha T/T_{ob}} - e^{-T/T_{ob}}; a = 1 - \frac{\tau - kT}{T}; a_p = e^{-T/T_{ob}}.$$

Підставивши (4.6) в (4.3), отримаємо імпульсну функцію регулятора  
Даліна:

$$D(z) = \frac{(1 - a_3)(1 - a_3 z^{-1})}{K_{ob} [1 - a_3 z^{-1} - (1 - a_3) z^{-(k+1)}] (C_1 + C_2 z^{-1})}. \quad (4.7)$$

2. Об'єкт керування має передавальну функцію

$$W_{ob}(P) = \frac{K_{ob} e^{-P\tau}}{(T_1 P + 1)(T_2 P + 1)}. \quad (4.8)$$

Знайдемо z-перетворення зведеної неперервної частини:

$$Wp(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K_{ob} e^{-P\tau}}{P(T_1 P + 1)(T_2 P + 1)} \right\}. \quad (4.9)$$

Розкладемо на прості дроби вираз в фігурних дужках в (4.9)

$$\begin{aligned} & Z \left\{ \frac{K_{ob} e^{-P\tau}}{P(T_1 P + 1)(T_2 P + 1)} \right\} = \\ & = Z \left\{ \frac{K_{ob} e^{-P\tau}}{P} - \frac{K_{ob} T_1 e^{-P\tau}}{(T_1 - T_2)(P + \frac{1}{T})} + \frac{K_{ob} T_2 e^{-P\tau}}{(T_1 - T_2)(P + \frac{1}{T})} \right\} \quad (4.10) \end{aligned}$$

У відповідності до табл.

$$Z \left\{ \frac{K_{ob} e^{-P\tau}}{P(T_1 P + 1)(T_2 P + 1)} \right\} = \frac{K_{ob} e^{-K}}{z-1} - \frac{K_{ob} e^{-[T/T_1 - (k+1)T/T_1]} z^{-(k+1)}}{(T_1 - T_2)(1 - e^{-T/T_1} z^{-1})} +$$

$$+ \frac{K_{ob} e^{-[T/T_2 - (k+1)T/T_2]} z^{-(k+1)}}{(T_1 - T_2)(1 - e^{-T/T_2} z^{-1})} \quad (4.11)$$

Після перетворень виразів (4.11) і з врахуванням (4.9) маємо

$$Wp(z) = \frac{K_{ob}(C_3 + C_4 z^{-1}) z^{-(k+1)}}{(1 - e^{-T/T_1} z^{-1})(1 - e^{-T/T_2} z^{-1})}. \quad (4.12)$$

Вводимо позначення:

$$C_3 = 1 + \frac{T_1 a_{p1} - T a_{p2}}{T_2 - T_1}; \quad C_4 = e^{-T/T_1 - T/T_2} + \frac{T_1 a_{p1} - T_2 a_{p2}}{T_2 - T_1}.$$

$$a_{p1} = e^{-T/T_1}; \quad a_{p2} = e^{-T/T_2}.$$

Виходячи з цього отримуємо імпульсну передавальну функцію регулятора Даліна:

$$D(z) = \frac{(1 - a_3)(1 - a_{p1} z^{-1})(1 - a_{p2} z^{-1})}{K_{ob} [1 - a_3 z^{-1} - (1 - a_3) z^{-(k+1)}]} (C_3 + C_4 z^{-1}). \quad (4.13)$$

3. Приводимо імпульсні передавальні функції ЗНЧ для об'єктів з такими передавальними функціями:

$$Wob(p) = \frac{Kob}{T_1 p + 1} \quad (4.14)$$

$$Wob(p) = \frac{Kob}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} \quad (4.15)$$

Для виразу (1.12), використовуючи таблицю отримуємо:

$$\begin{aligned}
Wp(z) &= \frac{z-1}{z} z \left\{ \frac{Kob}{p(T_1 p + 1)} \right\} = \frac{z-1}{z} z \left\{ \frac{Kob}{p} - \frac{Kob T_1}{T_1 p + 1} \right\} = \\
&= \frac{z-1}{z} \left[ \frac{Kob z}{z-1} - \frac{Kob z}{z - e^{-T/T_1}} \right] = \frac{Kob(1 - a_{p1})z^{-1}}{1 - a_{p1}z^{-1}} \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Для виразу (1.13)

$$Wp(z) = \frac{z-1}{z} \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{a_1 z}{T_1(z - a_{p1})} + \frac{b_1 z}{T_2(z - a_{p2})} \right] Kob, \quad (4.17)$$

$$\text{Де } a_1 = \frac{T_1^2}{T_1 - T_2}; \quad b_1 = \frac{T_2^2}{T_1 - T_2}$$

Маючи  $Wp(z)$ , з урахуванням виразу можна легко отримати  $D(z)$  для розглянутих випадків, представлених виразами (4.14) та (4.15).

4. При необхідності фільтрації вхідної змінної в коло оберненого зв'язку включають експоненціальний фільтр з передавальною функцією:

$$W\phi(p) = \frac{1}{T\phi p + 1} \quad (4.18)$$

Де  $T\phi$  – стала часу фільтра.

Передавальна функція  $Wp(p)$  буде мати вид:

$$Wp(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} Wob(p) \frac{1}{T\phi p + 1} \quad (4.19)$$

Якщо  $Wob(p)$  є аперіодичною ланкою першого порядку з запізненням, а передавальна функція замкненої системи описується виразом (4.1), то

$$D(z) = \frac{(1-a_3)(1-a_{p1}z^{-1})(1-a_{p2}z^{-1})}{Kob(1-a_{p2}) \left[ (1-a_3z^{-1})(1-a_{p1}z^{-1}) - \frac{1-a_3}{1-a_{p2}} (\alpha + \beta z - 1)^{-(k+1)} \right]} \quad (4.20)$$

$$\text{де } a_{p1} = e^{-T/T\phi}; \quad a_{p2} = e^{-T/Tob}; \quad \alpha = 1 - \frac{a_{p1}T\phi - a_{p2}Tob}{T\phi - Tob};$$

$$\beta = a_{p1}a_{p2} - \frac{a_{p2}T\phi - a_{p1}Tob}{T\phi - Tob}.$$

Програми розрахунку регуляторів по методу Даліна в середовищі MathCAD наведені в прикладах.

#### **4.2. Умови забезпечення якості регулювання в системах з використанням регулятора Даліна**

Як показали експериментальні досліди, при наявності в характеристичному рівнянні коренів, що лежить в колі  $z = -1$ , в керувальному діянні  $U(t)$  будуть мати місце затухаючі коливання, які небажані для виконавчого пристрою (рис. 4.1). ця особливість регулятора Даліна називається коливальністю.

В системах управління, де використовується регулятор Даліна, коливність може з'явитися за рахунок любого із множників знаменника в виразах (4.8), (4.13), (4.20).

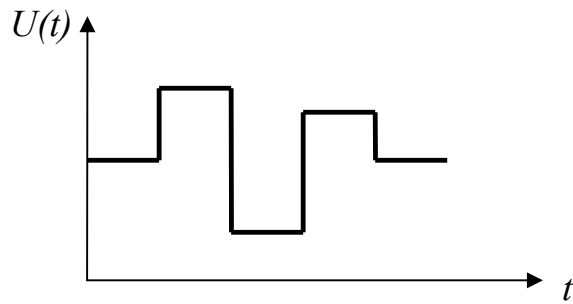


Рис. 4.1. Коливання в керувальному сигналі

1. Об'єкт керування – аперіодична ланка першого порядку з запізненням.

Розглянемо знаменник виразу (4.7)

$$\text{Kob} \left[ 1 - a_3 z^{-1} - (1 - a_3) z^{-1(k+1)} \right] (c_2 z^{-1} + C_1) \quad (4.21)$$

Коефіцієнт  $c_2 z^{-1} + C_1$  має полюс  $z_1 = -C_2 / C_1$ , інший співмножник може бути представлений так:

$$\begin{aligned} & 1 - a_3 z^{-1} - (1 - a_3) z^{-(k+1)} = \\ & = (1 - z^{-1}) \left[ 1 + (1 - a_3) z^{-1} + (1 - a_3) z^{-2} + \dots + (1 - a_3) z^{-k} \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Якщо припустити, що в цьому виразі є корені  $z_1 = -1$ , котрі приводять до коливання, то для усунення їх дії замість  $z$  поставимо  $z = 1$  (крім співмножника  $(1 - z^{-1})$ ). Оскільки корені і коефіцієнти полінома зв'язані між собою, ви як би «перегнали» небажані корені в коефіцієнти.

Розглянемо (4.22) при  $K=2$ , тобто  $\tau / T = 2$ :

$$1 - a_3 z^{-1} - (1 - a_3) z^{-3} = (1 - z^{-1}) [1 + (1 - a_3) z^{-1} + (1 - a_3) z^{-2}] \quad (4.23)$$

Звідси

$$z_{2,3} = -\frac{(1 - a_3)}{2} \pm i \sqrt{\frac{4(1 - a_3) - (1 - a_3)^2}{4}} \quad (4.24)$$

За абсолютною величиною із (4.24) ці корені

$$|z| = \sqrt{1 - a_3} = \sqrt{1 - e^{-T/T_3}} \quad (4.25)$$

В (4.23) один корінь  $z = 1$ , а дві інших визначаються із (4.24)

Для стійкої системи необхідно, щоб визначні із (4.25) корені  $|z| = 1$ , що можливо при  $e^{-T/T_3} \rightarrow 0$ . В цьому випадку  $z_2 = 1$ ;

$z_3 = -1$ , тобто корінь  $z_3 = -1$  дає коливність, прибрати яку можна, підставивши в вираз (4.23)  $z = 1$  (крім  $(1 - Z^{-1})$ ), тобто «огрубити» систему. В цьому випадку отримуємо скореговану імпульсну передавальну функцію цифрового регулятора Даліна, в якому коливання в  $D(z)$  не буде. Вираз (4.7) при довільному  $K = \tau / T$  тепер потрібно записати так:

$$D(z) = \frac{(1 - a_3)(1 - a_3 z^{-1})}{Kob(C_1 + C_2)[1 + K(1 + a_3)](1 - z^{-1})} \quad (4.26)$$

Наведемо вираз (4.26) при  $K = \tau / T = 2$  до дискретного аналогу неперервного регулятора. Відомо, що дискретний аналог ІІІ-регулятора має імпульсну передавальну функцію.

$$D(z) = Kp \left[ 1 + \frac{T}{Tu(1 - z^{-1})} \right] \quad (4.27)$$

Перетворимо (4.26) до виду (4.27)

$$\begin{aligned}
 D(z) &= \frac{1-a_3}{Kob(C_1+C_2)(3-2a_3)} \frac{a_3(\frac{1}{a_3} - z^{-1} + 1 - 1)}{1-z^{-1}} = \\
 &= \frac{1-a_3}{Kob(C_1+C_2)(3-2a_3)} \frac{a_3 \left[ \left(\frac{1}{a_3} - 1\right) + (1 - z^{-1}) \right]}{1-z^{-1}} = \\
 &= \frac{(1-a_3)a_3}{Kob(C_1+C_2)(3-2a_3)} \left[ 1 + \frac{\left(\frac{1}{a_3} - 1\right)}{1-z^{-1}} \right] \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

Звідси маємо параметри настройки дискретного ПІ-регулятора при  $K = 2$ :

$$Kp_{opt} = \frac{a_3(1-a_3)}{Kob(C_1+C_2)(3-2a_3)}; \quad Tu = \frac{T}{(1/a_3 - 1)}.$$

Для довільного цілого  $K$  коефіцієнти

$$Kp_{opt} = \frac{1 - e^{-T/T_3}}{Kob(C_1+C_2) \left[ 1 + K(1 - e^{T/T_3}) \right]};$$

$$Ku_{opt} = \frac{T}{e^{T/Tob} - 1}$$

При таких параметрах настройки ЦР керувальне діяння при зміні динамічного режиму об'єкта керування виконує монотонний ступінчатий перехідний процес (Рис. 4.2)

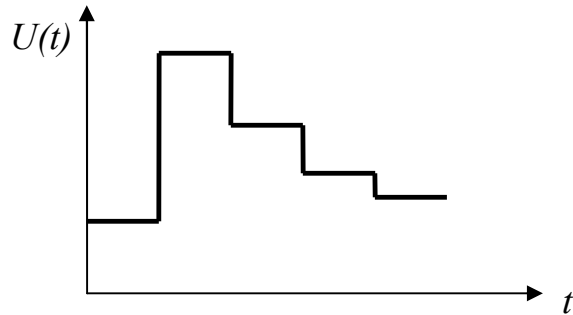


Рис. 4.2. Перехідний процес оптимальних  $Kp$  і  $Tu$

2. Об'єкт керування – аперіодична ланка другого порядку з запізненням.

Розглянемо знаменник виразу (4.12) як характеристичне управління:

$$Kob[1 - a_3 z^{-1} - (1 - a_3)z^{-(k+1)}](C_3 + C_4 z^{-1}) = 0 \quad (4.29)$$

Співмножник  $C_3 + C_4 z^{-1} = 0$  дає корінь  $z_1 = -C_4 / C_3$ , а другий співмножник представимо так, як показано в формулі (4.22), або для окремого випадку, коли  $\tau = T$ , тобто  $K = 1$ .

$$1 - a_3 z^{-1} - (1 - a_3)z^{-2} = (1 - z^{-1})[1 + (1 - a_3)z^{-1}].$$

Тут маємо ще два корені:

$$z_2 = 1; z_3 = -(1 - a_3) = -(1 - e^{-T/T_3}).$$

В усталеному перехідному процесі при  $t \rightarrow \infty$  треба, щоб  $e^{-T/T_3} \rightarrow 0$ . Це призводить до того, що  $Z = -1$ , а це дає коливність в системі. Щоб позбавитись від неї, в співмножник в квадратних дужках замість  $z$  підставимо значення  $z = 1$ . В окремому випадку при  $K = 1$  імпульсна передавальна функція регулятора Даліна має вигляд:



$$D(z) = \frac{(1-a_3)(1-a_{p1}z^{-1})(1-a_{p2}z^{-1})}{Kob(C_3 + C_4)(2-a_3)(1-z^{-1})} \quad (4.30)$$

В загальному випадку, тобто при довільному цілому  $K$ .

$$D(z) = \frac{(1-a_3)(1-a_{p1}z^{-1})(1-a_{p2}z^{-1})}{Kob(C_3 + C_4)[1+K(1-a_3)](1-z^{-1})} \quad (4.31)$$

Зводимо цей вираз до такого виду (з урахуванням підстановки  $a_3, a_{p1}, a_{p2}, C_3, C_4$ ):

$$D(z) = \frac{(e^{T/T_1} + e^{T/T_2} - 2)(1 - e^{-T/T_3})}{Kob(e^{T/T_1} - 1)(e^{T/T_2} - 1)[1 + K(1 - e^{-T/T_2})]} \times$$

$$\times \left[ 1 + \frac{(1 - e^{-T/T_1})(1 - e^{-T/T_2})}{(e^{T/T_2} + e^{-T/T_2} - 2)(1 - z^{-1})} + \frac{1 - z^{-1}}{e^{T/T_1} + e^{T/T_2} - 2} \right] \quad (4.32)$$

В загальноприйнятому виді імпульсна передавальна функція дискретного ПІД-регулятора в  $z$ -формі записується так:

$$D(z) = Kp \left[ 1 + \frac{T}{Tu(1-z^{-1})} + \frac{Tg}{T}(1-z^{-1}) \right]. \quad (4.33)$$

Порівнюючи (4.32) та (4.33), знаходимо оптимальні параметри настройки ПІД-регулятора:

$$Kp_{opt} = \frac{(e^{T/T_1} + e^{T/T_2} - 2)(1 - e^{-T/T_3})}{Kob(e^{T/T_1} - 1)(e^{T/T_2} - 1)[1 + K(1 - e^{-T/T_2})]};$$

$$Tu_{opt} = \frac{T(e^{T/T_1} + e^{T/T_2} - 2)}{(1 - e^{-T/T_1})(1 - e^{-T/T_2})}; \quad Tg_{opt} = \frac{T}{e^{T/T_1} + e^{T/T_2} - 2}.$$

Тепер, якщо  $T \rightarrow 0$ , то дискретні регулятори перетворюються в неперервні і можна визначити параметри налаштувань неперервних ПІ- та ПІД-регуляторів:

а) для ПІД-регулятора

$$Kp_{opt} = \frac{T_1 / T_3}{Kob(1 + \tau / T_3)}; Tu_{opt} = T_1;$$

б) для ПІД-регулятора

$$Kp_{opt} = \frac{T_1 / T_2 + T_2}{Kob(1 + \tau / T_3)}; Tu_{opt} = T_1 + T_2 \cdot Tg_{opt} = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}.$$

Таким чином, отримані значення параметрів настройки регуляторів, котрі залежать від динамічних властивостей об'єкта, а значення  $Kp_{opt}$ , ще й від сталої часу замкненої системи  $T_3$ .

### 4.3. Перетворення імпульсних передавальних функцій в програмні.

Запишемо вираз (4.6) в вигляді

$$\frac{U(z)}{G(z) - Y(z)} = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{(1 - a_3)(1 - a_3 z^{-1})}{Kob(C_1 + C_2)(3 - 2a_3)(1 - z^{-1})} \quad (4.41)$$

Позначимо  $1 - a_3 = A$ ;  $Kob(C_1 + C_2)(3 - 2a_3) = B$  і отримаємо

$$U(z)B(1 - z^{-1}) = E(z)(1 - a_3 z^{-1})A;$$

$$U(z) = U(z)z^{-1} + \frac{A}{B}E(z) - \frac{A - a_3}{B}E(z)z^{-1}.$$

Звідси програмуюча функція регулятора НЦУ

$$U[nT] = U[(n-1)T] + ME[nT] + NE[(n-1)T],$$

$$M = A / B; N = -\frac{Aa_3}{B} \quad (4.42)$$

Аналогічно можна отримати програмуючу функцію із виразу (4.30)

#### 4.4 Синтез цифрових регуляторів за методом Калмана

Регулятор Калмана забезпечує мінімальний час перехідного процесу.

Задається умова, щоб перехідний процес в замкненій системі цифрової АСР (рис. 4.3) закінчився (рис. 4.4, а) за час, який дорівнює двом періодам квантування (рис. 4.4, б) при подаванні на регулятор в якості завдання одиничного збурювального діяння  $G[1]$ . Керувальне діяння  $U(t)$  має два проміжних значення перед тим, як воно досягне кінцевого рівня  $U_f$ .

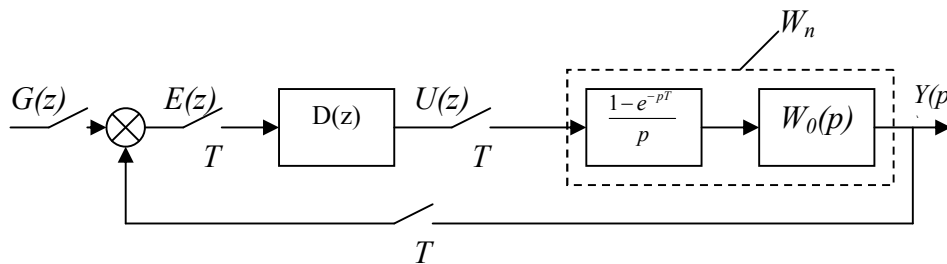


Рис. 4.3 – Структурна схема контура НЦУ ( $P(z) = Y(z)/G(z)$  – імпульсна передавальна функція за каналом «завдання регулятора – вихідна (регульована) величина»;  $Q(z) = U(z)/G(z)$  – імпульсна передавальна функція за каналом «завдання регулятора – керувальне діяння»)

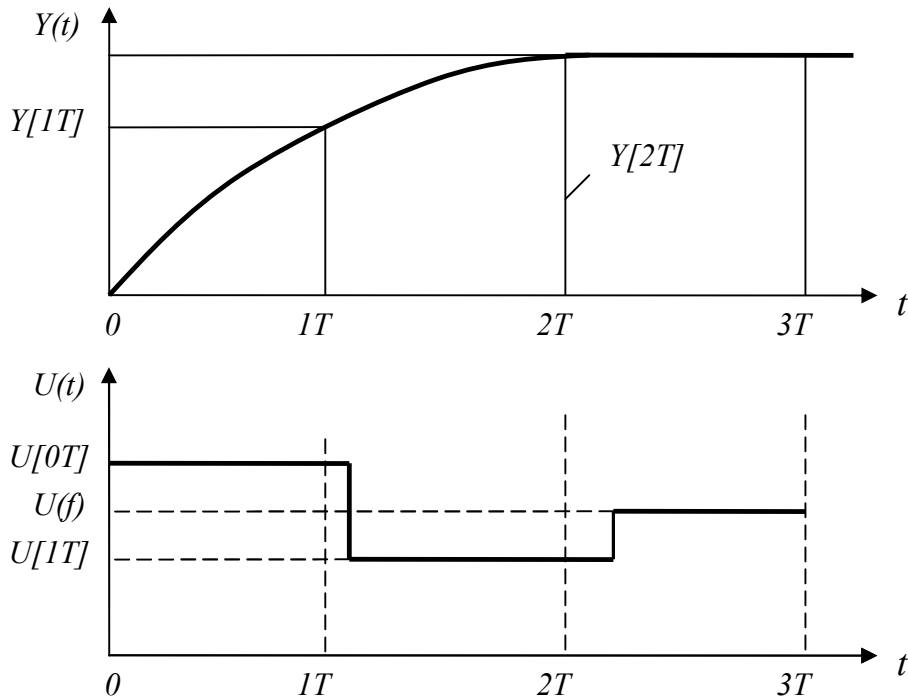


Рис. 4.4 – Динамічні характеристики системи НЦУ:

а – бажаний перехідний процес в замкненій ЦАСУ; б – керувальне діяння ( $U[0T]$ ,  $U[1T]$  – проміжні значення керувального діяння)

Запишемо вираз для вхідної і керувальної змінної в  $z$ -формі:

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Y[nT]z^{-n}; \quad (4.51)$$

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} U[nT]z^{-n}; \quad (4.52)$$

Одиничне завдання в формі  $z$ -перетворення буде мати вигляд;

$$G(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (4.53)$$

Розглядаючи сумісно з (4.51) і (4.53), а також (4.52) і (4.53), отримуємо

$$P(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = (1 - z^{-1}) \{y[0T]z^0 + y[1T]z^{-1} + y[2T]z^{-2} + \dots\} \quad (4.54)$$

$$Q(z) = \frac{U(z)}{G(z)} = (1 - z^{-1}) \{U[0T]z^0 + U[1T]z^{-1} + U[2T]z^{-2} + \dots\} \quad (4.55)$$

Де  $U[0T]$ ,  $U[1T]$  – визначення значення керувального діяння;

$U_f$  – усталене значення керувального діяння.

Таким чином, можна записати:  $y[0T]=0$ , а  $y[2T]=y[3T]=\dots=1$ , оскільки вважаємо, що регулятор обробив одиничне завдання і перехідний процес закінчився.

Вирази (4.54) і (4.55) перепишемо наступним чином:

$$P(z) = (1 - z^{-1}) \{y[1T]z^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3} + \dots\} \quad (4.56)$$

$$Q(z) = (1 - z^{-1}) \{U[0T] + U[1T]1z^{-1} + U_f z^{-2} + \dots\} \quad (4.57)$$

Перетворимо ці вирази, випускаючи члени ряду при  $z^{-3}$  і більше:

$$\frac{Y(z)}{G(z)} = P(z) = y[1T]z^{-1} + \{1 - y[1T]\}z^{-2} \quad (4.58)$$

$$\frac{U(z)}{G(z)} = Q(z) = U[0T] + \{U[1T] - U[0T]\}z^{-1} + \{U_f - U[1T]\}z^{-2} \quad (4.59)$$

Імпульсну передавальну функцію ПНЧ системи можна записати так:

$$Wp(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{Y(z)/G(z)}{U(z)/G(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)} =$$

$$= \frac{Y[1T]z^{-1} + \{1 - Y[1T]\}z^{-2}}{U[0T] + \{U[1T] - U[0T]\}z^{-1} + \{U_f - U[1T]\}z^{-2}} \quad (4.60)$$

Визначаємо імпульсну передавальну функцію регулятора НЦУ за каналом  $E(z) \rightarrow U(z)$ :

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{U(z)}{G(z) - Y(z)} \quad (4.61)$$

Знаходимо з (4.58)  $Y(z) = G(z)P(z)$ , а з (9)  $U(z) = G(z)Q(z)$  і, підставляючи їх в (4.61), отримаємо:

$$D(z) = \frac{Q(z)G(z)}{G(z) - P(z)G(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} \quad (4.62)$$

Вирази (4.58)-(4.60) використовуємо для визначення алгоритму (закону) регулятора НЦУ і розрахунку імпульсної передавальної функції регулятора виходячи з конкретних умов об'єкта.

I. Об'єкт має передавальну функцію

$$W_1(p) = \frac{K_o e^{-p\tau}}{T_1 p + 1} \quad (4.63)$$

Аналогічно (4.2)-(4.4) знаходимо в  $z$ -формі передавальну функцію зведеної неперервної частини:

$$Wp(z) = \frac{z-1}{z} z \left\{ \frac{W_1(p)}{p} \right\} = \frac{Ko(C_1 + C_2 z^{-1})z^{-(k+1)}}{1 - a_{p1} z^{-1}} \quad (4.64)$$

$$\text{де } C_1 = 1 - e^{-\frac{\alpha T}{T_1}}; \quad C_2 = e^{-\frac{\alpha T}{T_1}} - e^{-T/T_1};$$

$$a = 1 - \frac{(\tau - KT)}{T}; a_{p1} = e^{-T/T_1}; KT < \tau \leq (k+1)T.$$

З виразу (4.60) слідує, що сума коефіцієнтів при  $z^{-1}$  і  $z^{-2}$

в чисельнику буде дорівнювати одиниці. Для того щоб в (14) мати це, поділимо чисельник і знаменник на  $Ko(C_1 + C_2)$ :

$$Wp(z) = \frac{\left( \frac{C_1}{C_1 + C_2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} z^{-1} \right) z^{-(k+1)}}{\frac{1}{Ko(C_1 + C_2)} (1 - a_{p1} z^{-1})} \quad (4.65)$$

На основі виразів (4.64) і (4.65)

$$P(z) = \frac{C_1 z^{-(k+1)}}{C_1 + C_2} + \frac{C_2 z^{-(k+2)}}{C_1 + C_2} \quad (4.66)$$

$$Q(z) = \frac{1}{(C_1 + C_2)Ko} - \frac{a_{p1} z^{-1}}{Ko(C_1 + C_2)} \quad (17)$$

Підставляючи (4.66) і (4.67) в (4.62), отримуємо

$$D(z) = \frac{1 - a_{p1} z^{-1}}{Ko(C_1 + C_2) \left[ 1 - \frac{C_1 z^{-(k+1)}}{C_1 + C_2} - \frac{C_2 z^{-(k+2)}}{C_1 + C_2} \right]} \quad (4.68)$$

При такому алгоритмі у відповідності до вибраного критерію система НЦУ з об'єктом 1-го порядку із запізненням буде мати монотонний згасальний перехідний процес. Однак  $U(t)$  проявляє значні коливання, котрі з'являються за рахунок полюсів передавальної функції (4.68) наближених до  $z = -1$ . Щоб прибрати ці полюси другий співмножник в (4.68) при  $K = 2$  перетворюємо таким чином:



спочатку позначимо  $C_1 / (C_1 + C_2) = x_1$ ;

$$\begin{aligned}
 1 - x_1 z^{-3} - (1 - x_1) z^{-4} &= 1 - x_1 z^{-3} - z^{-4} + z^{-4} x_1 = (1 - z^{-4}) - x_1 z^{-3} (1 - z^{-1}) = \\
 &= (1 - z^{-1})(1 + z^{-1})(1 + z^{-2}) - x_1 z^{-3} (1 - z^{-1}) = (1 - z^{-1}) \left[ (1 + z^{-1})(1 + z^{-2}) - x_1 z^{-3} \right] = \\
 &= (1 - z^{-1}) \left[ 1 + z^{-1} + z^{-2} + (1 - x_1) z^{-3} \right] \tag{4.69}
 \end{aligned}$$

Підстановка в вираз (4.69), крім  $(1 - z^{-1})$ , значення  $z = +1$ , де коливань немає, перетворює вираз для  $D(z)$  в такому вигляді:

$$D(z) = \frac{1 - a_{p1} z^{-1}}{K_o(C_1 + C_2)(1 - z^{-1})(4 - x_1)} \tag{4.70}$$

Якщо  $K \neq 2$ , співмножник знаменника може бути представлений так:

$$\begin{aligned}
 1 - x_1 z^{-k-1} - (1 - x_1)^{-k-2} &= \\
 &= (1 - z^{-1}) \left[ 1 + z^{-1} + x^{-2} + \dots + z^{-k} + (1 - x_1) z^{-k-1} \right] \tag{4.71}
 \end{aligned}$$

Якщо  $z = +1$ , то (4.71) набуде вигляду:

$$(1 - z^{-1})(K + 2 - x_1) \tag{4.72}$$

Передавальна функція регулятора буде записана наступним чином:

$$D(z) = \frac{1}{K_o(e^{T/T_1} - 1)(K + 2 - x_1)} \left( 1 + \frac{e^{T/T_1} - 1}{1 - z^{-1}} \right) \tag{4.73}$$

Порівняння членів і коефіцієнтів в цьому регуляторі з загальним представленням дискретного ПІ-регулятора

$$D(z) = Kp \left[ 1 + \frac{T}{Tu(1-z^{-1})} \right] \quad (4.74)$$

дає наступні оптимальні параметри налаштувань дискретного ПІ-регулятора за методом Калмана при довільному  $K$ :

$$Kp_{opt} = \frac{1}{Ko(e^{T/T_1} - 1)(K + 2 - x_1)};$$

$$Tu_{opt} = \frac{T}{e^{T/T_1} - 1};$$

II. Об'єкт має передавальну функцію

Імпульсна передавальна функція ЗНЧ об'єкта має вигляд

$$Wp(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\left( \frac{C_3}{C_3 + C_4} + \frac{C_4}{C_3 + C_4} z^{-1} \right) z^{-(k+1)}}{\frac{1}{K_1(C_3 + C_4)} (1 - a_{p1} z^{-1})(1 - a_{p2} z^{-1})}; \quad (4.76)$$

$$P(z) = \left( \frac{C_3}{C_3 + C_4} + \frac{C_4}{C_3 + C_4} z^{-1} \right) z^{-(k+1)}; \quad (4.77)$$

$$Q(z) = \frac{1}{K_1(C_3 + C_4)} (1 - a_{p1} z^{-1})(1 - a_{p2} z^{-1}); \quad (4.78)$$

$$C_3 = 1 + \frac{T_2 a_{p2} - T_1 a_{p1}}{T_1 - T_2}; \quad a_{p1} = e^{-T/T_1}; \quad (4.79)$$

$$C_4 = a_{p1} a_{p2} + \frac{T_2 a_{p1} - T_1 a_{p2}}{T_1 - T_2}; \quad a_{p2} = e^{-T/T_2}. \quad (4.80)$$

Після підстановки в формулу (4.62) виразів (4.77) і (4.78) алгоритм керування приймає вигляд

$$D(z) = \frac{1}{K_1(C_3 + C_4)} \frac{(1 - a_{p1}z^{-1})(1 - a_{p2}z^{-1})}{1 - \frac{C_3}{C_3 + C_4}z^{-(k+1)} - \frac{C_4}{C_3 + C_4}z^{-(k+2)}}. \quad (4.81)$$

При  $z = -1$ , як показали дослідження, в керувальному діянні при перехідному процесі, викликаному ступінчатою зміною уставки регулятора, з'являється згасання коливань, що є дуже небажаними для виконавчого механізму. Для усунення цих коливань виконаємо наступне. Позначимо

$$\begin{aligned} \frac{C_3}{C_3 + C_4} &= x_2; \quad \frac{C_4}{C_3 + C_4} = 1 - x_2; \\ 1 - x_2z^{-k-1} - (1 - x_2)z^{-k-2} &= \\ &= (1 - z^{-1})[1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-k} + (1 - x_2)z^{-k-1}]. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Підставивши до правої частини (4.82) замість  $z = +1$ , а  $(1 - z^{-1})$  залишивши без змін, отримаємо такий вираз для  $D(z)$ :

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{e^{T/T_1} + e^{T/T_2} - 2}{K_1(e^{T/T_1} - 1)(e^{T/T_2} - 1)(2 + K - x_2)} \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{(1 - e^{T/T_1})(1 - e^{T/T_2})}{(e^{T/T_1} + e^{T/T_2} - 2)(1 - z^{-1})} + \frac{1 - z^{-1}}{(e^{T/T_1} + e^{T/T_2} - 2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Порівняння членів в цьому рівнянні з загальним поданням ПІД-регулятора в дискретній формі:

$$D(z) = Kp \left[ 1 + \frac{T}{Tu(1-z^{-1})} + \frac{Tg}{T}(1-z^{-1}) \right] \quad (4.84)$$

показує, що параметри налаштування  $Kp$ ,  $Tu$ ,  $Tg$  можна записати так:

$$Kp_{opt} = \frac{e^{T/T_1} + e^{T/T_2} - 2}{K_1(e^{T/T_1} - 1)(e^{T/T_2} - 1)(2 + K - x_2)}; Tu_{opt} = \frac{(1 - e^{T/T_1})(1 - e^{T/T_2})}{e^{T/T_1} + e^{T/T_2} - 2}$$

$$Tg_{opt} = \frac{1}{e^{T/T_1} + e^{T/T_2} - 2}.$$

## 4.5. Приклади розрахунку регуляторів Даліна та Калмана

### 4.5.1. Об'єкт заданий аперіодичною ланкою 1-го порядку

$$W_{ob}(p) := \frac{K_{ob} \cdot e^{-p \cdot \tau}}{T_{ob} \cdot p + 1} \quad K_{ob} := 5 \quad T_{ob} := 60 \quad \tau := 0$$

Перехідна характеристика об'єкта визначається як реакція на одиничний ступінчастий сигнал:

$$Y(p) := \frac{K_{ob} \cdot e^{-p \cdot \tau}}{(T_{ob} \cdot p + 1)} \cdot \frac{1}{p}$$

Знайдемо обернене перетворення Лапласа для  $Y(p)$  та побудуємо графік перехідного процесу.

$$y(t) := Y(p) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace} \quad ,p \\ \text{float} \quad ,4 \end{array} \right. \rightarrow -5. \cdot \exp\left(-1.667 \cdot 10^{-2} \cdot t\right) + 5.$$

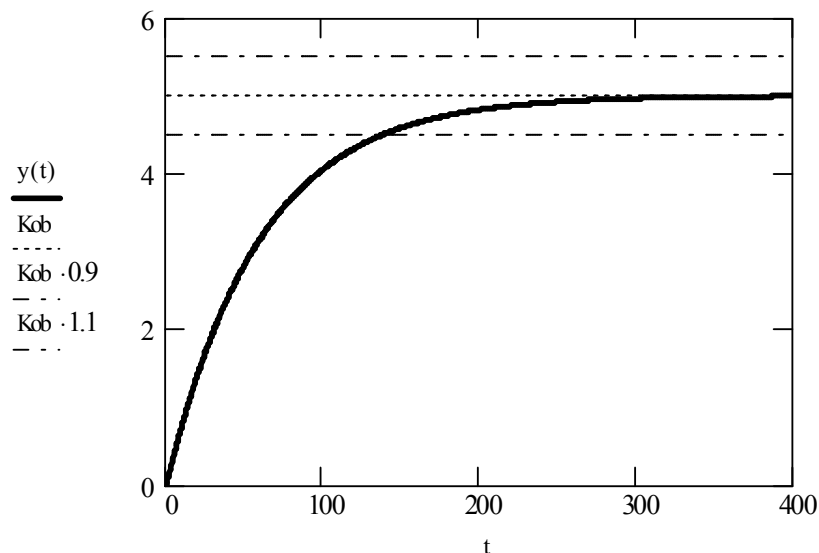


Рис. 4.5.1 – Перехідна характеристика об'єкта

## Визначення періоду дискретизації

Розглянемо частотну передавальну функцію об'єкта, зробивши заміну  $p=i\cdot\omega$ , де  $i$  – уявна одиниця.

$$W_{ob}(\omega) := \frac{K_{ob} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot \tau}}{1 + T_{ob} \cdot i \cdot \omega}$$

Амплітудно-частотна характеристика об'єкта визначається як модуль частотної передавальної функції

$$A(\omega) := |W_{ob}(\omega)|$$

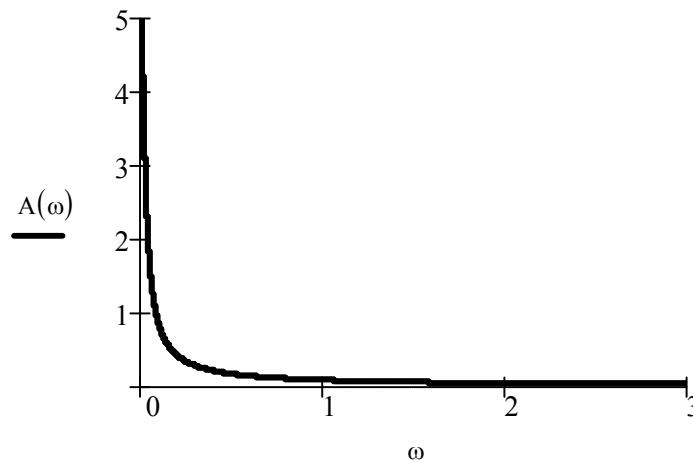


Рис. 4.5.2 Графік АЧХ об'єкта

Знайдемо частоту зрізу як частоту, при якій АЧХ приймає значення 5% від свого максимального значення.

$$\text{Максимальне значення АЧХ: } A(0) = 5$$

5 % від свого максимального значення:

$$0.05 \cdot A(0) = 0.25$$

Знайдемо частоту зрізу як розв'язок рівняння

$$A(x) - 0.05 \cdot A(0) \left| \begin{array}{l} \text{solve } , x \\ \text{float } , 5 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -.33292 \\ .33292 \end{pmatrix} \right.$$

Частота зрізу:

$$\omega_c := .33292 \text{ , [рад/с]}$$

Період дискретизації знаходимо як:

$$T := \frac{2\pi}{2\omega_c}$$

тобто

$$T = 9.436 \text{ , [с]}$$

Оберемо для даної системи період дискретизації

$$T := 9$$

### **Визначення передавальної функції зведеної неперервної частини системи**

Передавальна функція екстраполятора нульового порядку:

$$W_e(p) := \frac{1 - e^{-p \cdot T}}{p}$$

Передавальна функція зведеної неперервної частини:

$$W_{znc}(p) := W_{ob}(p) \cdot W_e(p)$$

$$W_{znc}(p) := \frac{1 - e^{-p \cdot T}}{p} \cdot \frac{Kob \cdot e^{-p \cdot \tau}}{(Tob \cdot p + 1)}$$

Враховуємо властивості z-перетворення "зсув у часовій області" та скориставшись формулою для перетворення функції із екстраполятором, отримуємо

$$W_{znc}(z) := Kob \cdot \frac{\left(1 - \exp\left(\frac{-T}{Tob}\right)\right)}{\left(z - \exp\left(\frac{-T}{Tob}\right)\right)} \cdot z^{-k}$$

Кількість періодів квантування, що припадають на запізнення

$$k := \frac{\tau}{T}$$

$$k \cdot T \leq \tau < (k + 1) \cdot T$$

$$k = 0$$

Для перевірки вірності знайденої функції побудуємо перехідний процес у зведеній неперервній частині

$$Y_{znc}(z) := W_{znc}(z) \cdot \frac{z}{z - 1}$$

$$y_{znc}(n) := Y_{znc}(z) \left| \begin{array}{l} \text{invtrans} \quad , z \\ \text{float} \quad , 4 \end{array} \right. \rightarrow -5 \cdot .8607^n + 5.$$



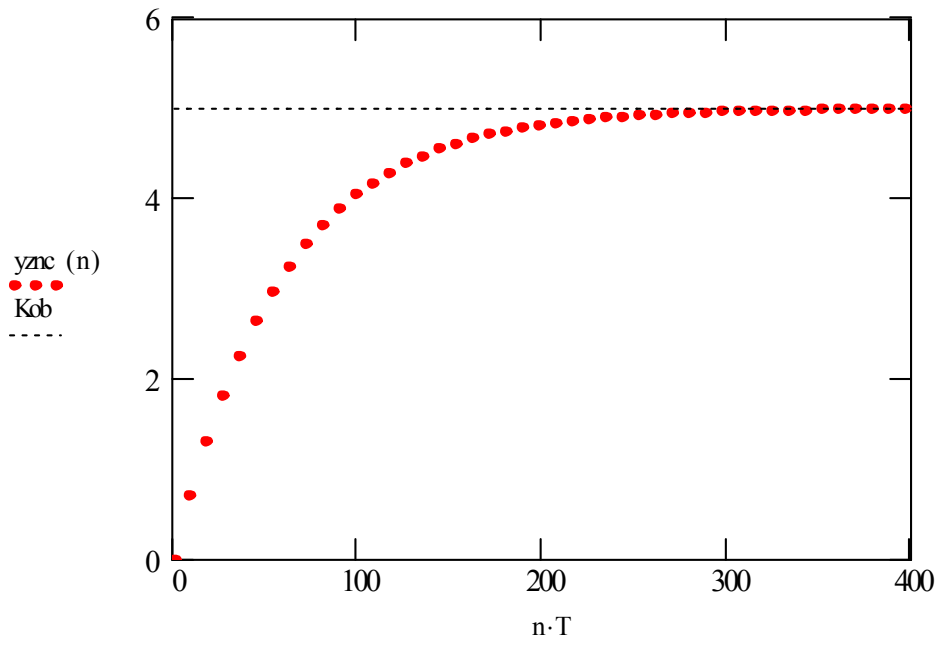


Рис. 4.5.3 – Перехідна характеристика ЗНЧ

## Синтез регулятора Даліна

При розрахунку передавальної функції Даліна задаємося виглядом перехідного процесу в замкненій системі як аперіодичною ланкою 1-го порядку. Практично, треба задатися сталою часу замкненої системи  $T_3$ .

Задаємося параметрами передавальної функції замкненої системи

$$W_{zs}(p) := \frac{e^{-p \cdot \tau}}{T_3 \cdot p + 1}$$

$$W_{zs}(z) := \frac{\left( \frac{-T}{1 - e^{-\frac{T}{T_3}}} \right)}{\left( \frac{-T}{z - e^{-\frac{T}{T_3}}} \right)} \cdot z^{-\frac{\tau T}{T}}$$

або

$$W_{zs}(z) := \frac{1 - a_3}{1 - a_3 \cdot z^{-1}} \cdot z^{-(k+1)}$$

$$\text{де } a_3 := e^{-\frac{T}{T_3}}, \quad T_3 := 20$$

Побудуємо бажаний перехідний процес в системі

$$Y_{zs}(z) := W_{zs}(z) \cdot \frac{z}{z - 1}$$

$$y_{zs2}(n) := Y_{zs2}(z) \text{ invztrans } , z \rightarrow -\exp\left(\frac{-9}{20}\right)^n + 1$$

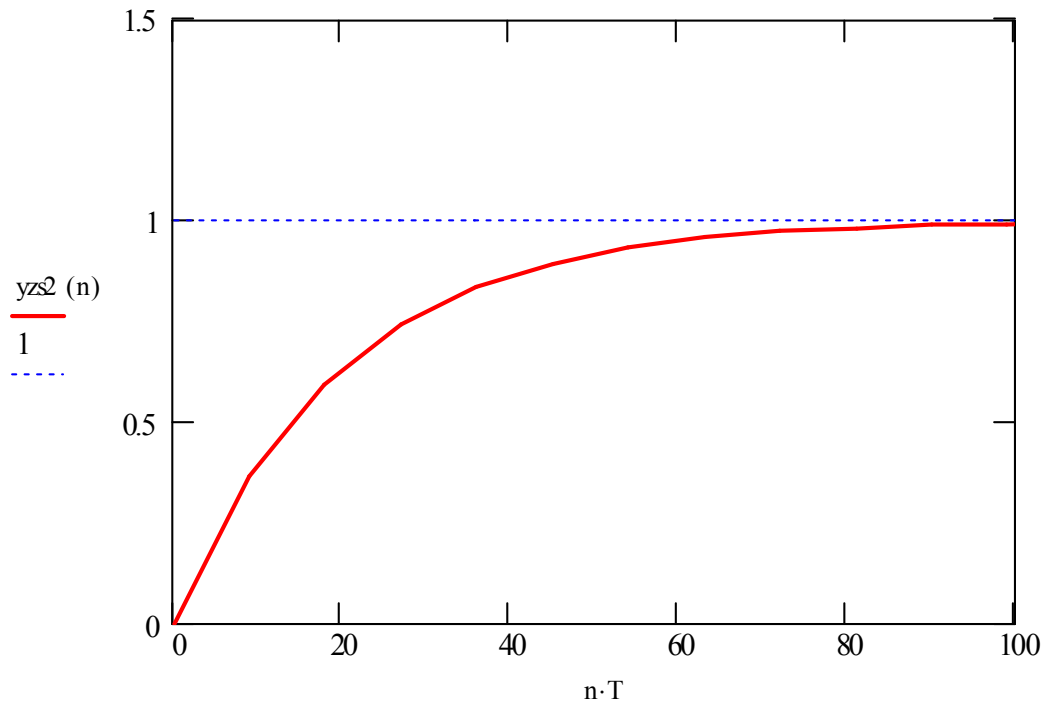


Рис. 4.5.4 – Бажана перехідна характеристика замкненої системи при  $T_3=20$

Передавальна функція регулятора Даліна

$$D(z) := \frac{W_{zs}(z)}{W_{pnc}(z) \cdot (1 - W_{zs}(z))}$$

Після підстановки

$$D_d(z) := \frac{\frac{1 - a_3}{1 - a_3 \cdot z^{-1}} \cdot z^{-(k+1)}}{K_{ob} \cdot \frac{\left(1 - \exp\left(\frac{-T}{T_{ob}}\right)\right)}{\left(z - \exp\left(\frac{-T}{T_{ob}}\right)\right)} \cdot z^{-(k)} \cdot \left[1 - \frac{1 - a_3}{1 - a_3 \cdot z^{-1}} \cdot z^{-(k+1)}\right]}$$

Передавальна функція розімкненої системи

$$W_{rs}(z) := D_d(z) \cdot W_{znc}(z)$$

Передавальна функція замкненої системи

$$W_{zs}(z) := \frac{W_{fs}(z)}{1 + W_{fs}(z)}$$

Сигнал завдання заданий одиничною ступінчастою функцією у вигляді z-перетворення

$$G(z) := \frac{z}{z - 1}$$

Вихідний сигнал замкненої системи

$$Y(z) := G(z) \cdot W_{zs}(z)$$

Знаходимо обернене z-перетворення та отримуємо

$$y(n) := Y(z) \text{ invztrans } , z \rightarrow -\exp\left(\frac{-9}{20}\right)^n + 1$$

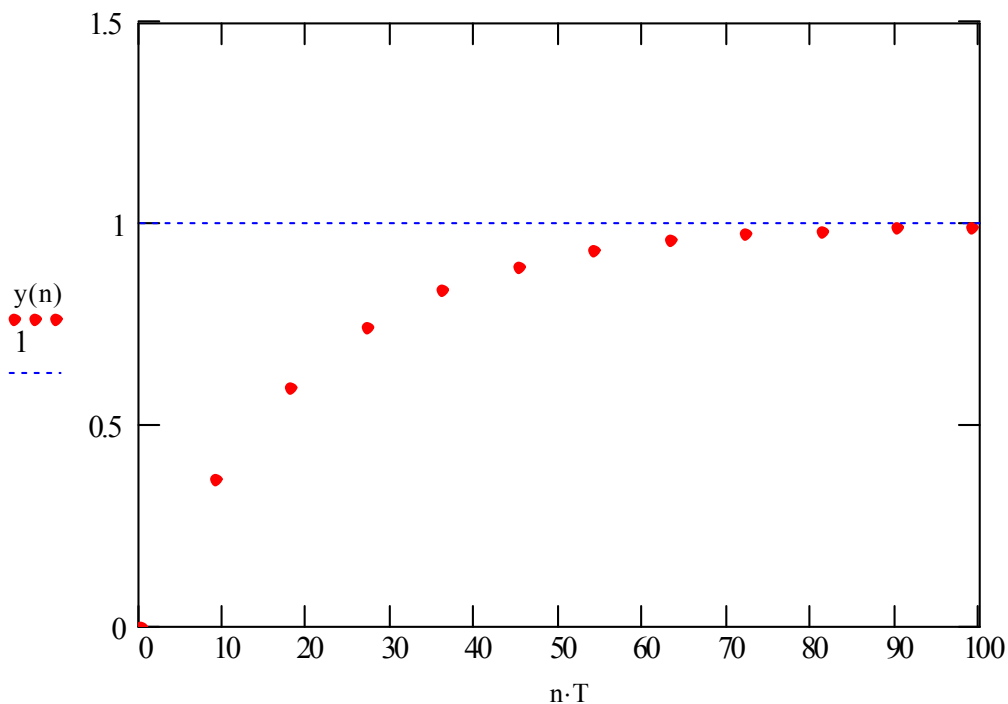


Рис. 4.5.5 – Перехідний процес в замкненій системі з регулятором Даліна

### Перерахунок параметрів регулятора Даліна у параметри налаштування цифрового ПІ-регулятора

Скористаємося формулами

$$T_{i\_dalin} := \frac{T}{e^{\frac{T}{T_{ob}}} - 1}$$

$$K_{r\_dalin} := \frac{1 - e^{-\frac{T}{T_{ib}}}}{K_{ob} \cdot \left( e^{\frac{T}{T_{ob}}} - 1 \right) \cdot \left[ 1 + k \cdot \left( 1 - e^{-\frac{T}{T_{ib}}} \right) \right]}$$

Виконаємо переприсвоєння на розрахунок

$$K_{pi} := K_{r\_dalin}$$

$$T_{i\_pi} := T_{i\_dalin}$$

$$K_{r\_dalin} = 0.448$$

$$T_{i\_dalin} = 55.612$$

Передавальна функція ПІ-регулятора

$$W_{pi}(z) := K_{pi} \cdot \left[ 1 + \frac{T}{T_{i\_pi} \cdot (1 - z^{-1})} \right]$$

Передавальна функція замкненої системи із ПІ-регулятором

$$W_{zs\_pi}(z) := \frac{W_{pi}(z) \cdot W_{znc}(z)}{1 + W_{pi}(z) \cdot W_{znc}(z)}$$

Перехідна функція у вигляді зображення

$$Y_{zs\_pi}(z) := W_{zs\_pi}(z) \cdot \frac{z}{z - 1}$$

Обернене перетворення

$$y_{zs\_pi3}(n) := Y_{zs\_pi}(z) \text{ invztrans } , z \rightarrow \frac{-\exp\left(\frac{-9}{20}\right)^n \cdot \exp\left(\frac{-3}{20}\right) \cdot \exp\left(\frac{-3}{10}\right) - \exp\left(\frac{-9}{20}\right)^n \cdot \exp\left(\frac{-3}{20}\right)^2 + \exp\left(\frac{-9}{20}\right)^n \cdot \exp\left(\frac{-3}{10}\right) + \exp\left(\frac{-9}{20}\right)^n + \exp\left(\frac{-3}{20}\right) \cdot \exp\left(\frac{-3}{10}\right) + \exp\left(\frac{-3}{20}\right)^2 - \exp\left(\frac{-3}{10}\right) - 1}{-1 + \exp\left(\frac{-9}{20}\right)}$$

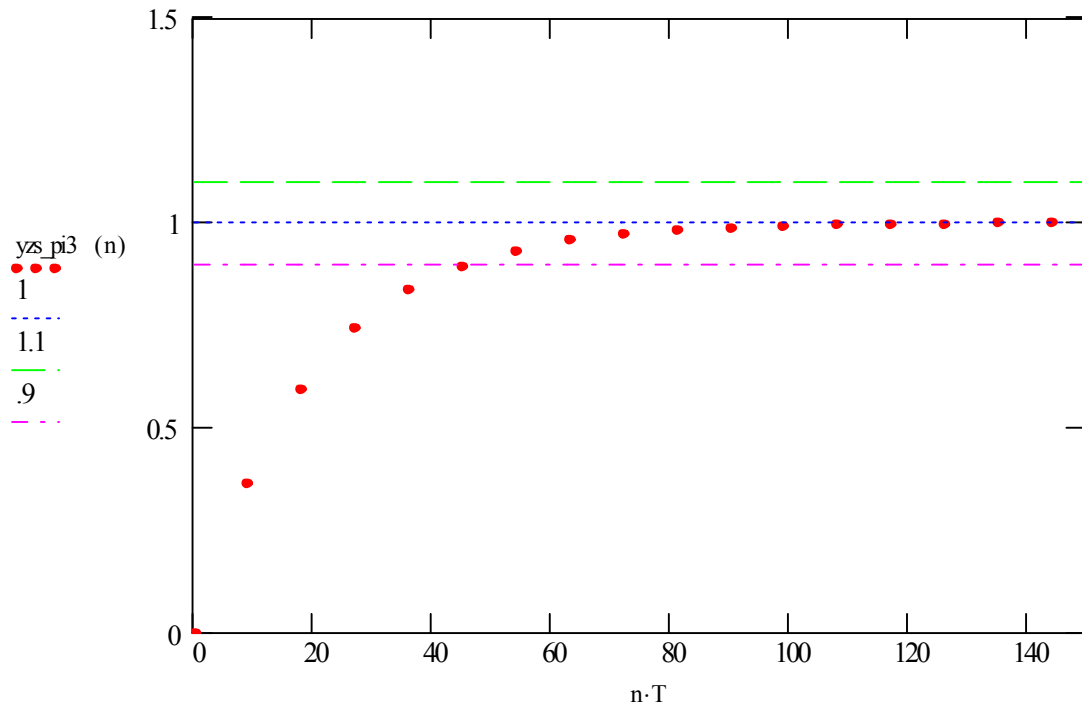


Рис. 4.5.6 – Перехідний процес в замкненій системі із ПІ-регулятором за алгоритмом Даліна

### Розробка програмувальної функції регулятора Даліна

Спочатку розробимо програмувальну функцію зведеної неперервної частини системи для подальшого використання при програмуванні моделі системи.

Введемо позначення

$$k_{l1} := K_{ob}$$

$$a_p := e^{-\frac{T}{T_{ob}}}$$

з урахуванням яких передавальна функція зведеної неперервної

частини системи

$$W_{znc}(z) := K_{ob} \cdot \frac{\left(1 - \exp\left(\frac{-T}{T_{ob}}\right)\right)}{\left(z - \exp\left(\frac{-T}{T_{ob}}\right)\right)} \cdot z^{-k}$$

може бути подана як

$$W_{znc}(z) := \frac{k_{l1} \cdot (1 - ap)}{1 - ap \cdot z^{-1}} \cdot z^{-(k+1)}$$

Оскільки передавальна функція є відношенням зображень виходу (керована змінна  $y(z)$ ) та входу сигнал керуючого впливу  $u(z)$

$$W_{znc}(z) := \frac{y(z)}{u(z)}$$

маємо

$$y(z) \cdot (1 - ap \cdot z^{-1}) := k_{l1} \cdot (1 - ap) \cdot u(z) \cdot z^{-(k+1)}$$

або

$$y(z) := k_{l1} \cdot (1 - ap) \cdot u(z) \cdot z^{-(k+1)} + ap \cdot y(z) \cdot z^{-1}$$

Введемо позначення

$$A := 1 - ap$$

тоді при переході від  $z$ -зображення до функції дискретного часу, маємо рівняння, що описує залежність виходу ЗНЧ  $y(nT)$  від сигналу керуючого впливу  $u(nT)$ :



$$y(n \cdot T) := k_{11} \cdot A \cdot u[(n-1-k) \cdot T] + a_p \cdot y[(n-1) \cdot T]$$

Аналогічно знайдемо передавальну функцію регулятора Даліна.

$$D(z) := \frac{(1-a_3) \cdot (1-a_p \cdot z^{-1})}{k_{11} \cdot (1-a_p) \cdot [1-a_3 \cdot z^{-1} - (1-a_3) \cdot z^{-(k+1)}]}$$

яка є відношенням зображень виходу (сигнал керуючого впливу  $u(z)$ ) та входу (сигнал відхилу  $e(z)$ )

$$D(z) := \frac{u(z)}{e(z)}$$

$$u(z) \cdot k_{11} \cdot (1-a_p) \cdot [1-a_3 \cdot z^{-1} - (1-a_3) \cdot z^{-(k+1)}] := e(z) \cdot [(1-a_3) \cdot (1-a_p \cdot z^{-1})]$$

Введемо позначення

$$B := 1 - a_3$$

Маємо

$$u(z) \cdot k_{11} \cdot A \cdot [1-a_3 \cdot z^{-1} - B \cdot z^{-(k+1)}] := e(z) \cdot [B \cdot (1-a_p \cdot z^{-1})]$$

$$u(z) := \frac{B}{k_{11} \cdot A} \cdot (e(z) - a_p \cdot e(z) \cdot z^{-1}) + a_3 \cdot u(z) \cdot z^{-1} + B \cdot u(z) \cdot z^{-(k+1)}$$

при переході від  $z$ -зображення до функції дискретного часу, маємо рівняння, що описує залежність виходу регулятора  $u(nT)$  від сигналу відхилу  $e(nT)$  із урахуванням попередніх значень сигналів керуючого впливу та відхилу:

$$u(n \cdot T) := \frac{B}{k_{11} \cdot A} \cdot [e(n \cdot T) - a_p \cdot e[(n-1) \cdot T]] + a_3 \cdot u[(n-1) \cdot T] + B \cdot u[(n-1-k) \cdot T]$$

В залежності від кількості періодів квантування, що припадають на запізнення, визначаємо правило нумерації елементів масиву даних, оскільки для розрахунку значень керованої змінної та сигналу керування у нульовий момент часу ( $i=0$ ) необхідні значення з  $k+1$  попередніх періодів квантування:

$$\text{ORIGIN} := 0 - k - 1$$

$$\text{ORIGIN} = -1$$

Програма дозволяє обрахувати значення вихідного сигналу  $y_i = ST_{1,i}$  і значення сигналів керуючого впливу  $u_i = ST_{0,i}$  замкненої системи в залежності від значення сигналу завдання  $sp$ .

```

ModSys (sp, ff) :=
   $\epsilon_0 \leftarrow 0$ 
   $u_0 \leftarrow 0$ 
   $y_0 \leftarrow 0$ 
   $f_0 \leftarrow 0$ 
  for i ∈ 0..100
     $f_i \leftarrow ff$ 
    for i ∈ 0..100
       $y_i \leftarrow k_{11} \cdot (1 - ap) \cdot u_{i-k-1} + y_{i-1} \cdot ap$ 
       $\epsilon_i \leftarrow sp - y_i$ 
       $u_i \leftarrow \frac{B}{k_{11} \cdot A} \cdot (\epsilon_i - ap \cdot \epsilon_{i-1}) + a3 \cdot u_{i-1} + B \cdot u_{i-k-1}$ 
       $ST_{1,i} \leftarrow y_i$ 
       $ST_{0,i} \leftarrow u_i$ 
       $i \leftarrow i + 1$ 
  ST

```

Задамося вихідними даними

$sp := 1$

$ff := 0$

$h := \text{ModSys}(sp, ff)$

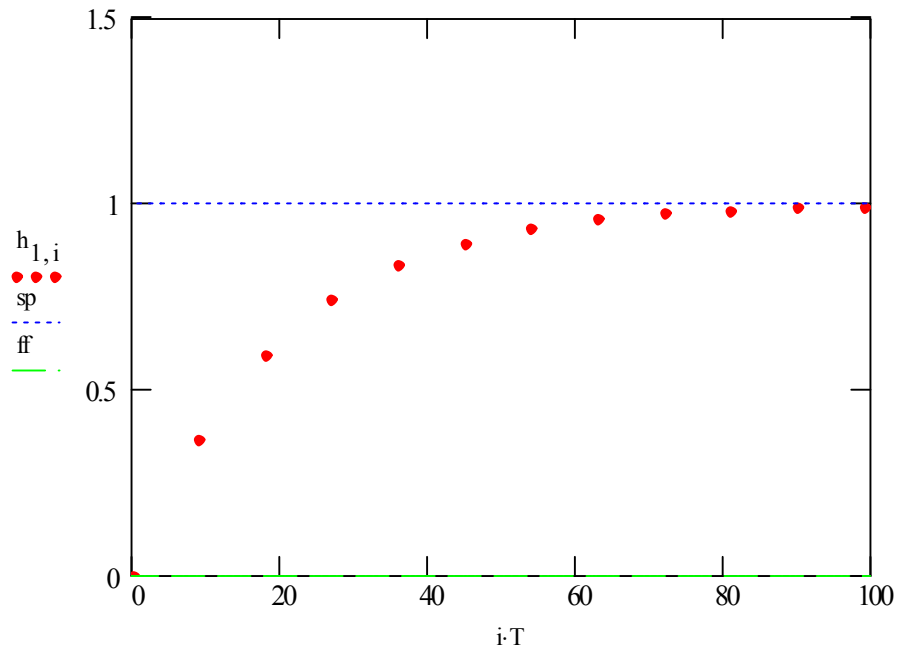


Рис. 4.5.7 – Перехідний процес в системі із регулятором Даліна, який отримано з використанням програмувальної функції

Масив даних із ординатами перехідних характеристик за періодами квантування:

	-1	0	1	2	3
-1	0	0	0	0	0
0	0	0.52	0.404	0.33	0.283
1	0	0	0.362	0.593	0.741
2					
3					
4					

## Синтез регулятора Калмана

Введемо позначення

$$A := 1 - \frac{\tau - k \cdot T}{T}$$

$$C1 := 1 - e^{A \cdot \frac{T}{Tob}}$$

$$C2 := e^{-A \cdot \frac{T}{Tob}} - e^{-\frac{T}{Tob}}$$

$$ap1 := e^{-\frac{T}{Tob}}$$

$$X1 := \frac{C1}{C1 + C2}$$

$$Ti\_pi := \frac{T}{e^{\frac{T}{Tob}} - 1}$$

$$Kpi := \frac{1}{Kob \cdot \left( e^{\frac{T}{Tob}} - 1 \right) \cdot (k + 2 - X1)}$$

Розрахуємо параметри ПІ-регулятора за алгоритмом Калмана.

$$Ti\_pi = 55.612$$

$$Kpi = 1.236$$

Передавальна функція ПІ-регулятора

$$W_{pi}(z) := K_{pi} \cdot \left[ 1 + \frac{T}{T_{i\_pi} \cdot (1 - z^{-1})} \right]$$

Передавальна функція замкненої системи із ПІ-регулятором

$$W_{zs\_pi}(z) := \frac{W_{pi}(z) \cdot W_{znc}(z)}{1 + W_{pi}(z) \cdot W_{znc}(z)}$$

Перехідна функція у вигляді зображення

$$Y_{zs\_pi}(z) := W_{zs\_pi}(z) \cdot \frac{z}{z - 1}$$

Обернене перетворення

$$y_{zs\_pi3}(n) := Y_{zs\_pi}(z) \left| \begin{array}{l} \text{invztrans, } z \\ \text{float, 4} \end{array} \right. \rightarrow 1.000 \cdot 1.000^n + 3.649 \cdot 10^{-5} \cdot .8607^n - 1.000 \cdot (4.720 \cdot 10^{-3})^n$$

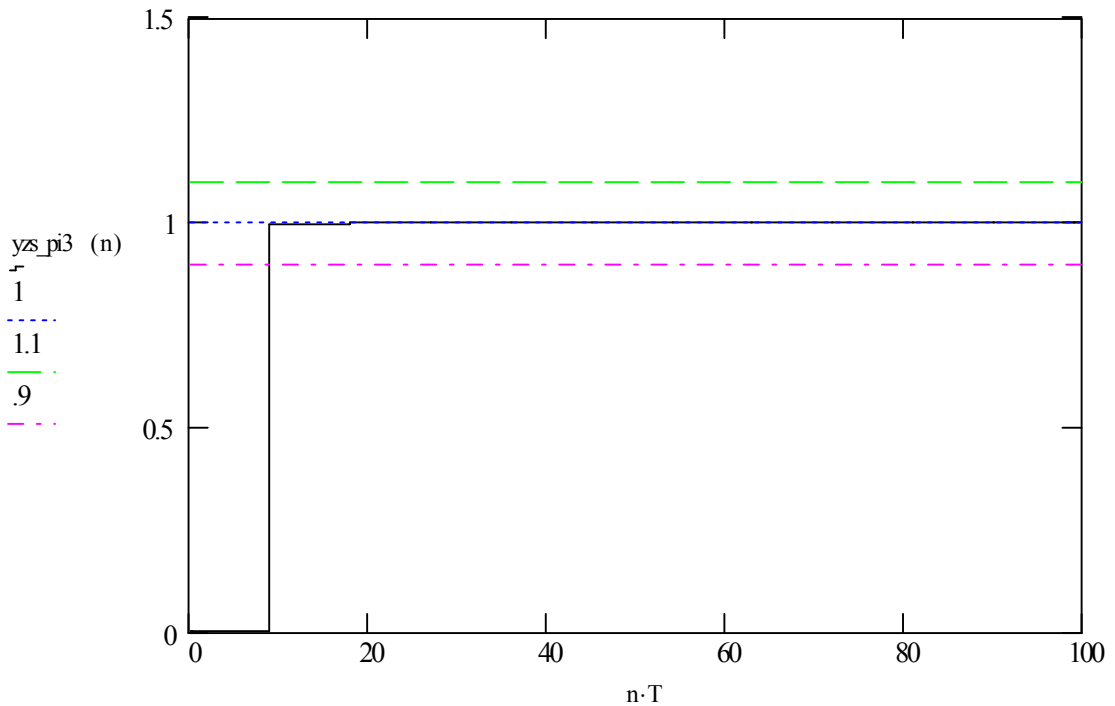


Рис. 4.5.8 – Перехідний процес в замкненій системі із ПІ-регулятором за алгоритмом Калмана

Передавальна функція замкненої системи із ПІ-регулятором канал "завдання – керувальний сигнал"

$$W_{zs\_pi\_u}(z) := \frac{W_{pi}(z)}{1 + W_{pi}(z) \cdot W_{znc}(z)}$$

Перехідна функція у вигляді зображення та обернене перетворення

$$Y_{zs\_pi\_u}(z) := W_{zs\_pi\_u}(z) \cdot \frac{z}{z - 1}$$

$$y_{zs\_pi\_u}(n) := Y_{zs\_pi\_u}(z) \Big|_{\text{float},4}^{\text{invztrans},z} \rightarrow .2000 \cdot 1.000^n - 1.636 \cdot 10^{-9} \cdot .8607^n + 1.229 \cdot (4.720 \cdot 10^{-3})^n$$

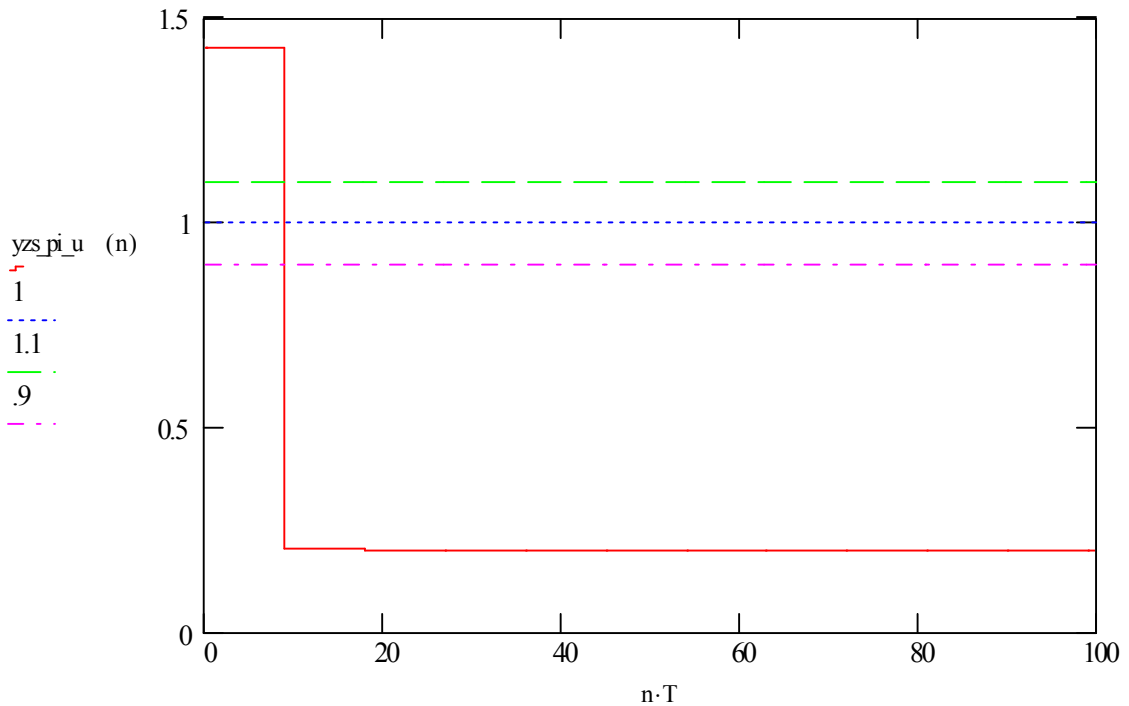


Рис. 4.5.9 – Вихід регулятора  $U(nT)$  в замкненій системі із ПІ-регулятором за алгоритмом Калмана

### Розробка програмувальної функції регулятора Калмана

Аналогічно програмувальній функції регулятора Даліна, визначимо програмувальну функцію регулятора Калмана

$$u(n \cdot T) := u_{i-1} + R1 \cdot \epsilon_i + R2 \cdot \epsilon_{i-1} \blacksquare$$

Складемо програму розрахунку перехідного процесу в системі при зміні завдання:

$$\text{ORIGIN} := 0 - k - 1$$



ORIGIN = -1

```
ModSysProg_kalman (sp, ff) :=
|
|  $\alpha_0 \leftarrow 0$ 
|  $u_0 \leftarrow 0$ 
|  $y_0 \leftarrow 0$ 
|  $f_0 \leftarrow 0$ 
| for i ∈ 0.. 100
|    $f_i \leftarrow ff$ 
|   for i ∈ 0.. 100
|     |
|     |  $y_i \leftarrow k11 \cdot (1 - ap) \cdot u_{i-k-1} + y_{i-1} \cdot ap$ 
|     |  $\alpha_i \leftarrow sp - y_i$ 
|     |  $u_i \leftarrow u_{i-1} + R1 \cdot \alpha_i + R2 \cdot \alpha_{i-1}$ 
|     |  $ST_{1,i} \leftarrow y_i$ 
|     |  $ST_{0,i} \leftarrow u_i$ 
|     |  $i \leftarrow i + 1$ 
|   ST
```

Задамо значення завдання sp:

sp := 1

h := ModSysProg\_kalman (sp, ff)

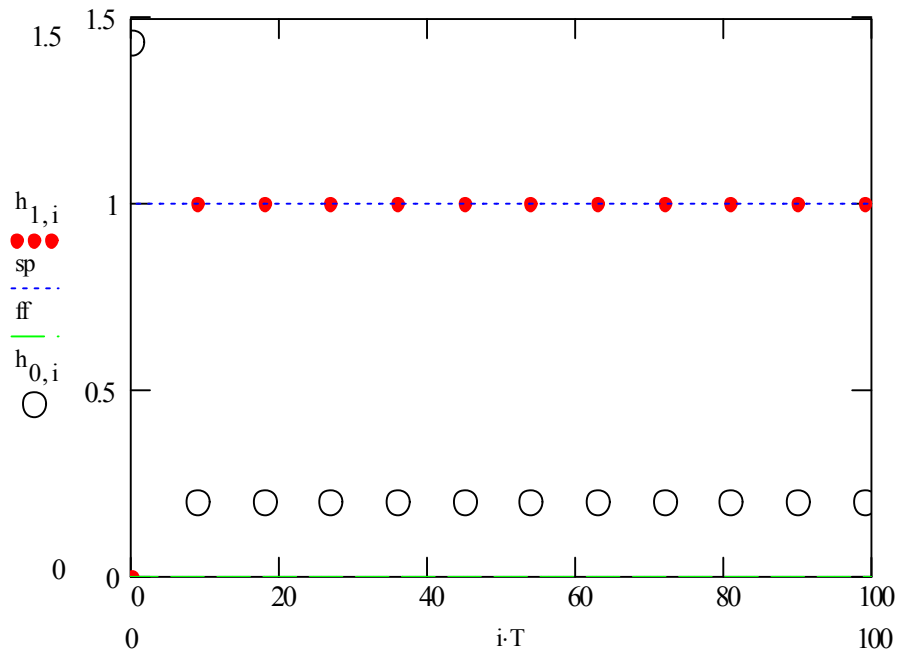


Рис. 4.5.10 – Перехідний процес в системі із регулятором Калмана, який отримано з використанням програмувальної функції:

$h_{1,i}$  – керований параметр,  $h_{0,i}$  – керувальне діяння

#### 4.5.2. Об'єкт заданий аперіодичною ланкою 2-го порядку

Передавальна функція об'єкта керування (сталі часу подано у секундах)

$$W_{ob}(p) := \frac{K_{ob} \cdot e^{-p \cdot \tau}}{(T1 \cdot p + 1) \cdot (T2 \cdot p + 1)}$$

$$K_{ob} := 0.92$$

$$T1 := 6$$

$$T2 := 5$$

$$\tau := 4$$

Зображення вихідного сигналу об'єкта, як реакції на одиничну ступінчасту функцію:

$$Y(p) := \frac{K_{ob} \cdot e^{-p \cdot \tau}}{(T1 \cdot p + 1) \cdot (T2 \cdot p + 1)} \cdot \frac{1}{p}$$

Знайдемо обернене перетворення Лапласа для  $Y(p)$  та побудуємо графік перехідного процесу в об'єкті.

$$y(t) := Y(p) \Big|_{\text{float}, 3}^{\text{invlaplace}, p} \rightarrow -5.52 \cdot \Phi(t - 4) \cdot \exp(-.167 \cdot t + .667) + 4.60 \cdot \Phi(t - 4) \cdot \exp(-.200 \cdot t + .800) + .920 \cdot \Phi(t - 4)$$

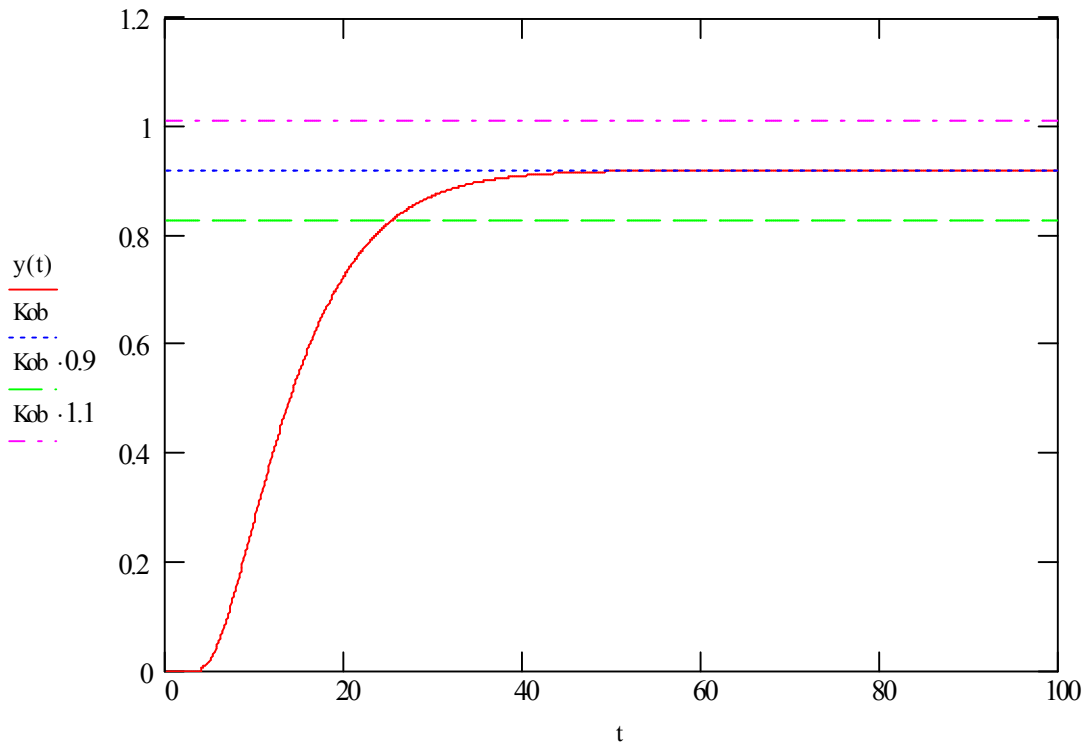


Рис. 4.5.11 – Перехідна характеристика об'єкта

Для коректної роботи програми треба задати визначення функції Дірака

$$\Delta(n) := \delta(0, n)$$

Розглянемо частотну передавальну функцію об'єкта, зробивши заміну  $p=j \cdot \omega$

$$W_{ob}(\omega) := \frac{K_{ob} \cdot e^{-(j \cdot \omega) \cdot \tau}}{(T_1 \cdot j \cdot \omega + 1) \cdot (T_2 \cdot j \cdot \omega + 1)}$$

АЧХ об'єкта визначається за модулем частотної передавальної функції

$$A(\omega) := |Wob(\omega)|$$

Знайдемо частоту зрізу як частоту, при якій АЧХ приймає значення 5% від свого максимального значення.

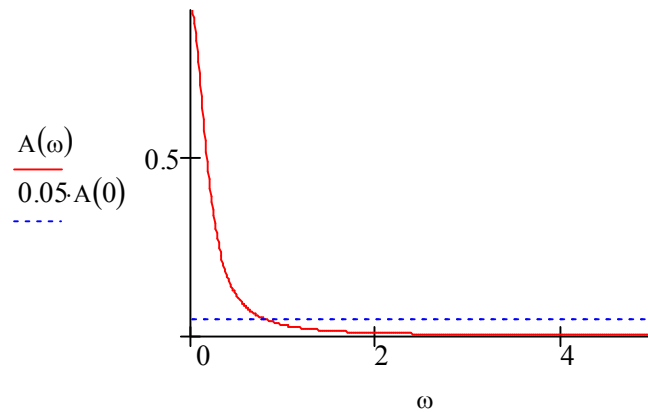


Рис. 4.5.10 – Визначення частоти зрізу за АЧХ об'єкту

$$A(0) = 0.92$$

$$0.05 \cdot A(0) = 0.046$$

$$A(x) - 0.05 \cdot A(0) \left| \begin{array}{l} \text{solve ,x} \\ \text{float ,5} \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -.79549 \\ -.83701 \cdot i \\ .83701 \cdot i \\ .79549 \end{pmatrix}$$

Частота зрізу (обираємо серед коренів рівняння додатний дійсний корінь):

$$\omega_c := .79549$$

Період дискретизації знаходимо як:

$$T := \frac{2\pi}{2\omega_c}$$

$$T = 3.949 \text{ , [рад/с]}$$

оберемо

$$T = 3 \text{ , [с]}$$

### Визначення передавальної функції зведеної неперервної частини системи

Передавальна функція екстраполятора нульового порядку:

$$W_e(p) := \frac{1 - e^{-p \cdot T}}{p}$$

Передавальна функція зведеної неперервної системи

$$W_{pnc}(p) := W_{ob}(p) \cdot W_e(p)$$

$$W_{pnc}(p) := \frac{1 - e^{-p \cdot T}}{p} \cdot \frac{K_{ob} \cdot e^{-p \cdot \tau}}{(T_1 \cdot p + 1) \cdot (T_2 \cdot p + 1)}$$

$$W_{pnc}(z) := K_{ob} \cdot \frac{\left[ \frac{T_1}{(T_2 - T_1)} \cdot \exp\left(\frac{-T}{T_1}\right) - \frac{T_2}{(T_2 - T_1)} \cdot \exp\left(\frac{-T}{T_2}\right) + 1 \right] + \left[ \exp\left[-T \cdot \frac{(T_1 + T_2)}{T_2 \cdot T_1}\right] + \frac{\left(-T_2 \cdot \exp\left(\frac{-T}{T_1}\right) + T_1 \cdot \exp\left(\frac{-T}{T_2}\right)\right)}{(T_2 - T_1)} \right] \cdot z^{-1}}{\left(1 - \exp\left(\frac{-T}{T_2}\right) \cdot z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-T}{T_1}\right) \cdot z^{-1}\right)} \cdot z^{-(k+1)}$$

Визначимо перехідну характеристику ЗНЧ:

$$Y_{\text{pnc}}(z) := W_{\text{pnc}}(z) \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$y_{\text{pnc}}(n) := Y_{\text{pnc}}(z) \left| \begin{array}{l} \text{invztrans} \quad ,z \\ \text{float} \quad ,4 \end{array} \right. \rightarrow -2008 \cdot \Delta(n) + 9200 \cdot 1.000^n - 9.101 \cdot .6065^n + 8.382 \cdot .5488^n$$

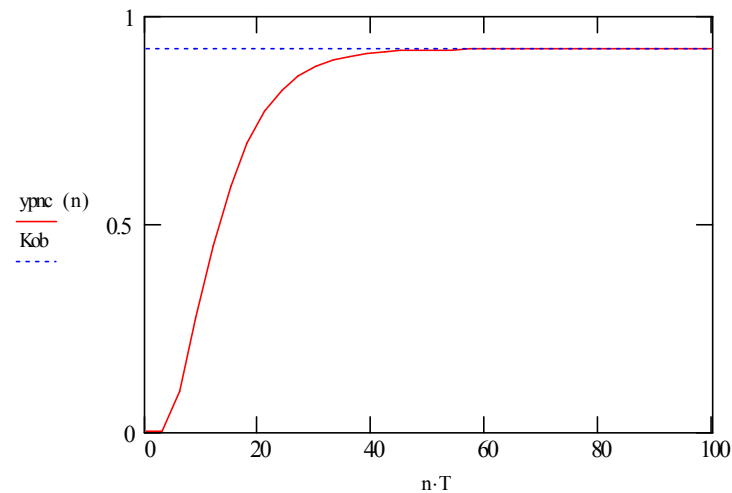


Рис. 4.5.12 – Перехідна характеристика ЗНЧ

### Синтез регулятора Даліна

Задамося параметрами передавальної функції замкненої системи у вигляді зображення за Лапласом

$$W_{zs}(p) := \frac{e^{-p \cdot \tau}}{T_3 \cdot p + 1}$$

та у z-формі:

$$W_{zs}(z) := \frac{\left( \begin{array}{c} -T \\ 1 - e^{\frac{-T}{T3}} \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{c} -T \\ z - e^{\frac{-T}{T3}} \end{array} \right)} \cdot z^{-\frac{\tau z}{T}}$$

або

$$W_{zs}(z) := \frac{1 - a3}{1 - a3 \cdot z^{-1}} \cdot z^{-(k+1)}$$

$$a3 := e^{\frac{-T}{T3}}$$

Оберемо сталу часу замкненої системи

$$T3 := 5$$

Перехідна функція замкненої системи

$$Y_{zs2}(z) := W_{zs}(z) \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$y_{zs2}(n) := Y_{zs2}(z) \text{ invtrans } , z \rightarrow \frac{\Delta(n) - \Delta(n) \cdot \exp\left(\frac{-3}{5}\right) - \exp\left(\frac{-3}{5}\right)^n + \exp\left(\frac{-3}{5}\right)}{\exp\left(\frac{-3}{5}\right)}$$



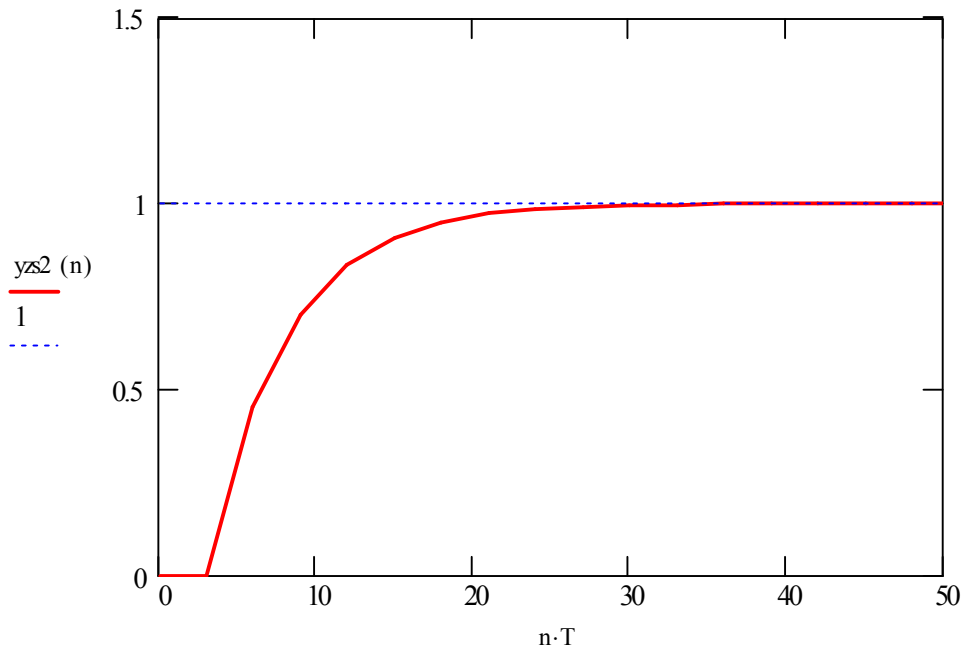


Рис. 4.5.13 – Бажаний перехідний процес в замкненій системі при  $T_3=5$

Передавальна функція замкненої системи з регулятором

$$W_{zs}(z) := \frac{D(z) \cdot W_{\text{пнс}}(z)}{1 + D(z) \cdot W_{\text{пнс}}(z)}$$

Передавальна функція регулятора Даліна

$$D(z) := \frac{W_{zs}(z)}{W_{\text{пнс}}(z) \cdot (1 - W_{zs}(z))}$$

або після підстановки

$$D(z) := \frac{\left(1 - \exp\left(\frac{-T}{T2}\right) \cdot z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-T}{T1}\right) \cdot z^{-1}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{T3}}\right)}{Kob \cdot \left[ \left[ \frac{T1}{(T2 - T1)} \cdot \exp\left(\frac{-T}{T1}\right) - \frac{T2}{(T2 - T1)} \cdot \exp\left(\frac{-T}{T2}\right) + 1 \right] \dots \right. \\ \left. + \left[ \exp\left[-T \cdot \frac{(T1 + T2)}{T2 \cdot T1}\right] + \frac{\left(-T2 \cdot \exp\left(\frac{-T}{T1}\right) + T1 \cdot \exp\left(\frac{-T}{T2}\right)\right)}{(T2 - T1)} \right] \cdot z^{-1} \right] \cdot z^{-1} \cdot \left[ 1 - \frac{\left(1 - e^{-\frac{T}{T3}}\right)}{\left(z - e^{-\frac{T}{T3}}\right)} \cdot z^{-\frac{\tau}{T}} \right] \cdot \left(z - e^{-\frac{T}{T3}}\right)}$$

Введемо позначення

$$C3 := \frac{T1}{(T2 - T1)} \cdot \exp\left(\frac{-T}{T1}\right) - \frac{T2}{(T2 - T1)} \cdot \exp\left(\frac{-T}{T2}\right) + 1$$

$$C4 := \exp\left[-T \cdot \frac{(T1 + T2)}{T2 \cdot T1}\right] + \frac{\left(-T2 \cdot \exp\left(\frac{-T}{T1}\right) + T1 \cdot \exp\left(\frac{-T}{T2}\right)\right)}{(T2 - T1)}$$

$$A3 := e^{-\frac{T}{T3}}$$

$$A1 := \exp\left(\frac{-T}{T1}\right)$$

$$A2 := \exp\left(\frac{-T}{T2}\right)$$

Отримуємо

$$D(z) := \frac{\left(1 - A2 \cdot z^{-1}\right) \cdot \left(1 - A1 \cdot z^{-1}\right) \cdot \left(1 - A3\right)}{Kob \cdot \left(C3 + C4 \cdot z^{-1}\right) \cdot \left[1 - A3 \cdot z^{-1} - \left(1 - A3\right) \cdot z^{-k+1}\right]}$$

Перехідна функція в замкненій системі у вигляді z-зображення

$$Y_{dalin}(z) := \frac{D(z) \cdot W_{pnc}(z)}{1 + D(z) \cdot W_{pnc}(z)} \cdot \frac{z}{z - 1}$$

$$Y_{\text{dalin}}(z) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 5 \end{array} \right. \rightarrow \frac{4.5119 \cdot 10^{19}}{\left(1.0000 \cdot 10^{20} \cdot z - 5.4881 \cdot 10^{19}\right) \cdot (z - 1.)}$$

Після оберненого перетворення маємо

$$y_{\text{dalin}}(n) := Y_{\text{dalin}}(z) \left| \begin{array}{l} \text{invztrans}, z \\ \text{float}, 4 \end{array} \right. \rightarrow .8221 \cdot \Delta(n) + 2.778 \cdot 10^{-19} \cdot (-.6928)^n + 1.000 \cdot 1.000^n - 1.822 \cdot .5488^n$$

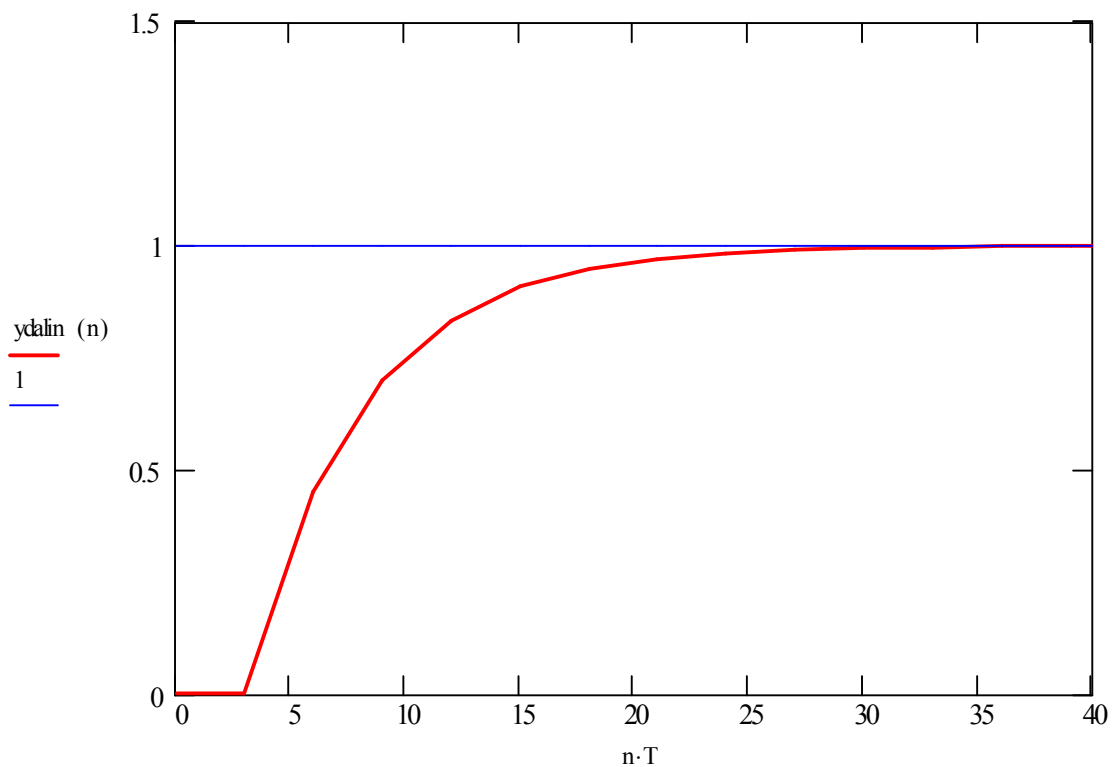


Рис. 4.5.14 – Перехідний процес в замкненій системі із регулятором Даліна

## Перерахунок параметрів настройки регулятора Даліна у параметри настройки ПІД-регулятора

Визначимо параметри налаштування ПІД-регулятора

$$K_{pid} := \frac{\left( e^{\frac{T}{T1}} + e^{\frac{T}{T2}} - 2 \right) \cdot \left( 1 - e^{\frac{-T}{T3}} \right)}{Kob \cdot \left( -1 + \exp\left(\frac{T}{T2}\right) \right) \cdot \left( -1 + \exp\left(\frac{T}{T1}\right) \right) \cdot \left[ 1 + k \cdot \left( 1 - e^{\frac{-T}{T3}} \right) \right]}$$

$$Ti_{pid} := \frac{T \cdot \left( e^{\frac{T}{T1}} + e^{\frac{T}{T2}} - 2 \right)}{\left( 1 - \exp\left(\frac{T}{T2}\right) \right) \cdot \left( 1 - \exp\left(\frac{T}{T1}\right) \right)}$$

$$Td_{pid} := \frac{T}{e^{\frac{T}{T1}} + e^{\frac{T}{T2}} - 2}$$

Після розрахунку отримуємо

$$K_{pid} = 0.932$$

$$Ti_{pid} = 8.274$$

$$Td_{pid} = 2.04$$

Передавальна функція ПІД-регулятора у вигляді z-перетворення

$$W_{pid}(z) := K_{pid} \cdot \left[ 1 + \frac{T}{Ti_{pid} \cdot (1 - z^{-1})} + \frac{Td_{pid}}{T} \cdot (1 - z^{-1}) \right]$$

## Перехідний процес у замкненій системі із ПІД-регулятором

$$Y_{pid}(z) := \frac{W_{pid}(z) \cdot W_{nc}(z)}{1 + W_{pid}(z) \cdot W_{nc}(z)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

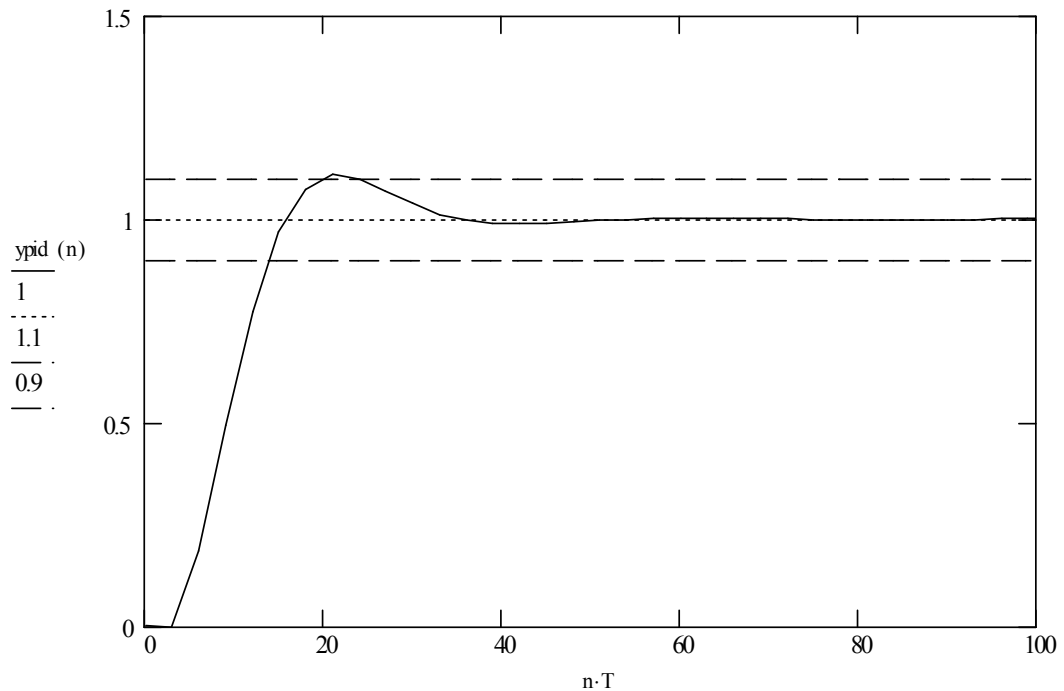


Рис. 4.5.15 – Перехідний процес в системі з ПІД-регулятором, параметри якого отримані з алгоритму Даліна

## Синтез регулятора Калмана

Передавальна функція зведеної неперервної частини можна подати у вигляді

$$W_{nc3}(z) := \frac{\left( \frac{C3}{C3 + C4} + \frac{C4}{C3 + C4} \cdot z^{-1} \right) \cdot z^{-(k+1)}}{\frac{1}{K_{ob} \cdot (C3 + C4)} \cdot (1 - A1 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - A2 \cdot z^{-1})}$$

або виділимо вирази для чисельника та знаменника

$$P(z) := \left( \frac{C3}{C3 + C4} + \frac{C4}{C3 + C4} \cdot z^{-1} \right) \cdot z^{-(k+1)}$$

$$Q(z) := \frac{1}{Kob \cdot (C3 + C4)} \cdot (1 - A1 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - A2 \cdot z^{-1})$$

Передавальна функція регулятора Калмана

$$Dk3(z) := \frac{1}{Kob \cdot (C3 + C4)} \cdot \frac{\left[ (1 - A1 \cdot z^{-1}) \cdot (1 - A2 \cdot z^{-1}) \right]}{1 - \left[ \left( \frac{C3}{C3 + C4} + \frac{C4}{C3 + C4} \cdot z^{-1} \right) \cdot z^{-(k+1)} \right]}$$

або через P(z) та Q(z)

$$Dk3(z) := \frac{Q(z)}{1 - P(z)}$$

Перехідна функція у замкненій системі із регулятором Калмана

$$Ykal3(z) := \frac{Dk3(z) \cdot Wpnc3(z)}{1 + Dk3(z) \cdot Wpnc3(z)} \cdot \frac{z}{z - 1}$$

Після оберненого перетворення

$$Y_{kal3}(n) = Y_{kal3}(z) \Big|_{z \rightarrow \dots} = \frac{\lambda(n) \cdot \exp\left(\frac{-1}{2}\right) + \lambda(n) \cdot \exp\left(\frac{-3}{5}\right) - \lambda(n) - \exp\left(\frac{-11}{10}\right) + \lambda(n-1) \cdot \exp\left(\frac{-1}{2}\right) + \lambda(n-1) \cdot \exp\left(\frac{-3}{5}\right) - \lambda(n-1) - \lambda(n-1) \cdot \exp\left(\frac{-11}{10}\right) - \lambda(n-2) \cdot \exp\left(\frac{-11}{10}\right) - 5 \cdot \lambda(n-2) \cdot \exp\left(\frac{-1}{2}\right) - 6 \cdot \lambda(n-2) \cdot \exp\left(\frac{-3}{5}\right) - \exp\left(\frac{-1}{2}\right) - \exp\left(\frac{-3}{5}\right) + 1 + \exp\left(\frac{-11}{10}\right)}{-\exp\left(\frac{-1}{2}\right) - \exp\left(\frac{-3}{5}\right) + 1 + \exp\left(\frac{-11}{10}\right)}$$

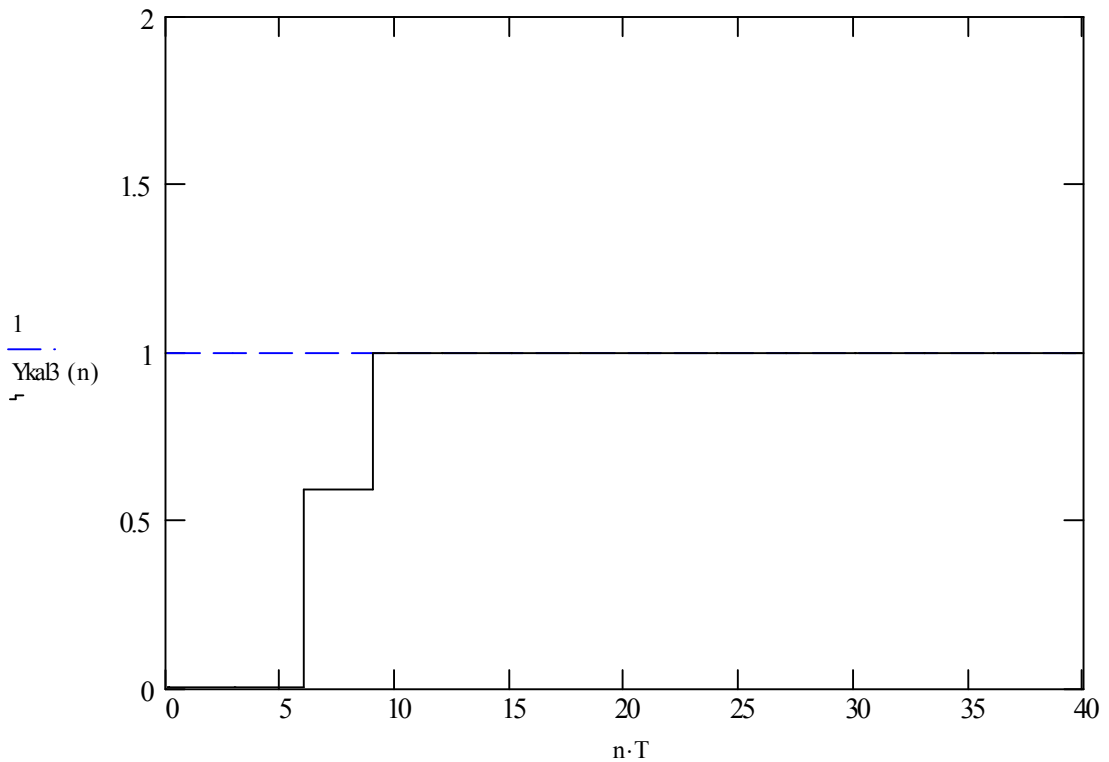


Рис. 4.5.16 – Перехідний процес в системі з регулятором Калмана

Зображення перехідної функції замкненої системи із ПІ-регулятором за алгоритмом Калмана за каналом "завдання – керувальний сигнал"

$$Y_{kal3\_u}(z) := \frac{Dk3(z)}{1 + Dk3(z) \cdot W_{pnc3}(z)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Обернене перетворення

$$Y_{kal3\_u}(n) := Y_{kal3\_u}(z) \left| \begin{array}{l} \text{invztrans} \\ \text{float} \end{array} \right. , z \rightarrow -2.038 \cdot \Delta(n-1.) + 5.036 \cdot \Delta(n) + 1.087 \cdot 1.000^n$$

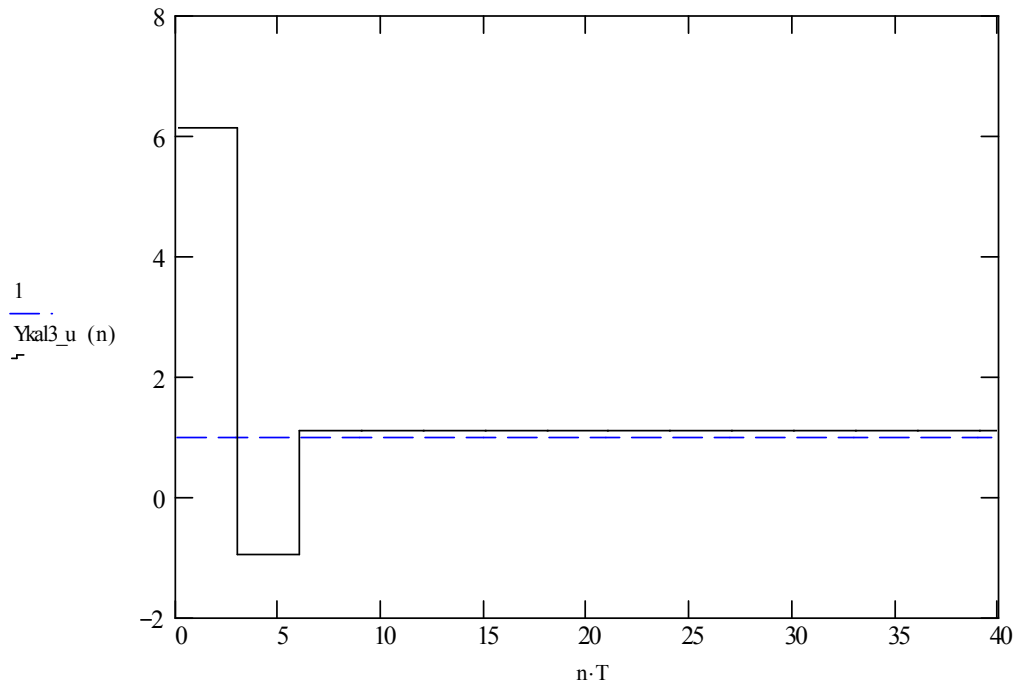


Рис. 4.5.17 – Вихід регулятора  $u(nT)$  в замкненій системі із ПІ-регулятором за алгоритмом Калмана

**Перерахуємо параметри настройки регулятора Калмана у параметри настройки ПІД-регулятора**

$$K_{pid\_k} := \frac{\left( e^{\frac{T}{T1}} + e^{\frac{T}{T2}} - 2 \right)}{K_{ob} \cdot \left( -1 + \exp\left(\frac{T}{T2}\right) \right) \cdot \left( -1 + \exp\left(\frac{T}{T1}\right) \right) \cdot \left( 2 + k - \frac{C3}{C3 + C4} \right)}$$



$$T_{i\_pid\_k} := \frac{\left( e^{\frac{T}{T1}} + e^{\frac{T}{T2}} - 2 \right) \cdot T}{\left( 1 - \exp\left(\frac{T}{T2}\right) \right) \cdot \left( 1 - \exp\left(\frac{T}{T1}\right) \right)}$$

$$T_{d\_pid\_k} := \frac{T}{e^{\frac{T}{T1}} + e^{\frac{T}{T2}} - 2}$$

$$K_{pid\_k} = 1.244$$

$$T_{i\_pid\_k} = 8.274$$

$$T_{d\_pid\_k} = 2.04$$

Передавальна функція ПІД-регулятора у вигляді z-перетворення

$$W_{pid\_k}(z) := K_{pid\_k} \cdot \left[ 1 + \frac{T}{T_{i\_pid\_k} \cdot (1 - z^{-1})} + \frac{T_{d\_pid\_k}}{T} \cdot (1 - z^{-1}) \right]$$

Перехідний процес у замкненій системі із ПІД-регулятором

$$Y_{pid\_k}(z) := \frac{W_{pid\_k}(z) \cdot W_{pnc3}(z)}{1 + W_{pid\_k}(z) \cdot W_{pnc3}(z)} \cdot \frac{z}{z - 1}$$

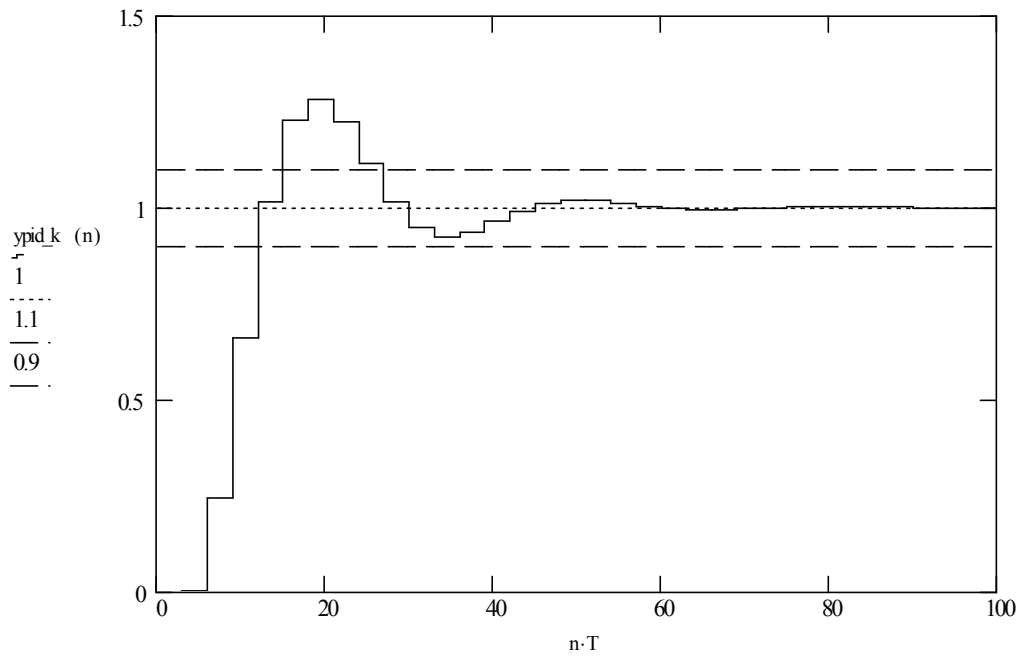


Рис. 4.5.18 – Перехідний процес в системі з ПІД-регулятором, параметри якого отримані з алгоритму Калмана

## 5 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

- 1 Типовий контур цифрової системи керування та характеристика його елементів.
- 2 Види імпульсної модуляції, що застосовуються в цифрових системах керування.
- 3 Екстраполятор нульового порядку, його характеристика.
- 4 Властивості  $\delta$  - функції.
- 5 Математичні залежності, що зв'язують неперервні та дискретні функції.
- 6 Теорема В. А. Котельникова.
- 7 Критерії стійкості цифрових систем.
- 8 Характеристичне рівняння замкненої цифрової системи.
- 9 Критерій Шур-Кона.
- 10 Білінійне перетворення, та його застосування для дослідження стійкості цифрових систем.
- 11 Застосування критерію Гурвіца для дослідження стійкості цифрових систем.
- 12 Алгебраїчні критерії стійкості цифрових систем.
- 13 Частотні методи дослідження стійкості цифрових систем.
- 14 Властивості  $z$ -перетворення.
- 15 Обмеження використання  $z$ -перетворення.
- 16 Модифіковане  $z$ -перетворення, випадки застосування.
- 17 Визначення  $z$ -перетворення функції за її зображенням за Лапласом.
- 18 Обернене  $z$ -перетворення. Способи визначення.

- 19 Схеми з'єднань ланок та еквівалентні передавальні функції цифрової системи керування.
- 20 Особливості знаходження  $z$ -перетворення для систем з декількома квантувачами.
- 21 Передавальні функції цифрових систем керування.
- 22 Формування неперервних сигналів в цифровій системі керування.
- 23 Система із транспортним запізненням. Її імпульсна передавальна функція.
- 24 Умова можливості реалізації для передавальної функції цифрової системи.
- 25 Зв'язок між імпульсною передавальною функцією та перехідною функцією системи.

## ДОДАТОК

### Критерій Гурвіца для рівняння $n$ -ого порядку

**Критерій стійкості Гурвіца:** для того щоб система автоматичного керування була стійкою, необхідно та достатньо, щоб при  $a_0 > 0$  всі визначники Гурвіца  $\Delta_i$  були додатними.

$$\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \quad \dots;$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix},$$

де  $n$  – порядок характеристичного рівняння.

Розкриваючи визначники Гурвіца отримуємо умови стійкості для неперервних систем другого, третього та четвертого порядків.

$$\mathbf{n=1:} \quad a_0 p + a_1 = 0;$$

умови стійкості для системи першого порядку будуть:

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0;$$

$$\mathbf{n=2:} \quad a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0;$$

умови стійкості для системи другого порядку будуть:

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 > 0, \quad \text{звідки } a_2 > 0;$$

$$\mathbf{n=3:} \quad a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0;$$

умови стійкості для системи третього порядку будуть:

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0,$$

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0, \quad \text{звідки } a_3 > 0;$$

$$\mathbf{n=4:} \quad a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0;$$

умови стійкості для системи четвертого порядку будуть:

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

$$\Delta_3 = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0,$$

$$\Delta_4 = a_4 \Delta_3 > 0, \quad \text{звідки } a_4 > 0.$$

$$\mathbf{n=5:} \quad a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0,$$

умови стійкості для системи п'ятого порядку будуть:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_5 > 0,$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

$$(a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_0 a_1 a_5) a_4 -$$

$$- (a_1 a_2^2 - a_0 a_1 a_4 - a_0 a_2 a_3 + a_0^2 a_5) a_5 > 0,$$

Нагадуємо, що критерій Гурвіца можна застосовувати для характеристичних рівнянь імпульсних та цифрових систем керування тільки після білінійної підстановки (3.8).

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Бесекерский В. А. Теория систем автоматического регулирования. / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – М.: Наука, Главн. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 768с.
- 2 Бесекерский В. А. Системы автоматического управления с микро-ЭВМ. / В. А. Бесекерский, В. В. Израинцев. – М.: Наука. Главн. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 320 с..
- 3 Забашта Ю. П. Микропроцессорные системы управления. / Ю. П. Забашта, Б. Б. Самотокин. – К.: УМК ВО, 1989. – 83 с.
- 4 Иващенко Н. Н. Автоматическое регулирование / Н. Н. Иващенко. – М.: Машиностроение, 1978.–735с.
- 5 Кваско М.З. Проектирование и расчет цифровых систем управления/ М. З. Кваско. – К.: УМК ВО, 1991. –220с.
- 6 Кваско М. З. Проектування і розрахунків дискретних автоматичних систем керування технологічними процесами [Текст]: навч. посіб. / М. З. Кваско, М. С. Піргач, Т. А. Аверіна. – К.: НМЦ ВО, 2000. –248с. – Бібліогр.: с. 240-243.-200 пр. – ISBN 966-622-001-6
- 7 Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления: Пер. с англ. / Б. Куо. – М.: Машиностроение, 1986.—448с.
- 8 Микропроцессорные системы автоматического управления/ Под ред. В.А. Бесекерского. – М.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1988.— 365с.
- 9 Пиргач Н. С. Автоматическое регулирование и регуляторы в целлюлозно-бумажной, деревообрабатывающей и лесохимической промышленности / Н.С. Пиргач, В.С. Пиргач. – М.: Лесная промышленность, 1983. –262 с.

- 10 Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под ред. В. А. Бесекерского. — М.: Наука, 1978.-512с.
- 11 Топчеев Ю. И. Задачник по теории автоматического регулирования./ Ю. И. Топчеев, А. П. Цыпляков. — М.: Машиностроение, 1977. — 592с.
- 12 Ту Ю. Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления / Ю. Т. Ту. — М.: Машиностроение, 1964. — 704с.
- 13 Кваско М. З. Проектування і дослідження дискретних систем автоматичного керування технологічними процесами [Текст]: навч. посіб. // М. З. Кваско, М. С. Піргач, Т. В. Аверіна. — К.: ІВЦ «Видавництво "Політехніка"», 2003.-360с. — Бібліогр.: с. 60-61; с.130; с. 192; с.237-238; с.263; с.307-309; с.339-340.-200 пр. — ISBN 966-622-116-0.
- 14 Кваско М. З. Математичне моделювання та ідентифікація одно- та багатовимірних систем [Текст]: навч. посіб. / М.З. Кваско, Л. Р. Ладієва, М. С. Піргач. — К.: НТУУ «КПІ», 2006. — 368с. Бібліогр.: с. 277-278. - 200 пр. — ISBN 966-622-211-6.