МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ З КУРСУ "КЕРУВАННЯ СКЛАДНИМИ СИСТЕМАМИ"

для студентів спеціальності 7.09.25.01 "Автоматизація технологічних процесів і виробництв"

Затверджено
на засіданні кафедри
автоматизації
хімічних виробництв

Протокол №3 від 14.12.94

Київ КПІ 1995

Методичні вказівки до виконання розрахункових робіт з курсу "Керування складними системами" для студентів спеціальності 7.09.25.01 "Автоматизація технологічних процесів і виробництв" / Укл.: А.І.Жученко, М.В.Коржик, С.Д.Лутов. - Київ: КПІ, 1995. - 20 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки
до виконання розрахункових робіт з курсу
"Керування складними системами"
для студентів спеціальності 7.09.25.01
"Автоматизація технологічних процесів
і виробництв"

Укладачі: Жученко Анатолій Іванович
Коржик Михайло Володимирович
Лутов Станіслав Данилович

Відповідальний редактор М.З.Кваско
Рецензент А.І.Кубрак

Редактор Д.С.Балинська

Підп. до друку 23.03.95. Формат 60×84 1/16. Папір друк. № 3. Друк офсетний. Ум. др. арк. 1.16. Ум. фарбо-відб. 1,27
Облік.-вид. арк. 1.05. Тираж 300
Зам. № 5-1619

КПІ, 252056, Київ, проспект Перемоги, 37.

Фірма "ВІПОЛ"
252151, м.Київ, вул. Волинська, 60

Вступ

Технічний прогрес у промисловості обумовив створення систем високої точності та мінімальної складності. Такі автоматичні системи мають без участі оператора знаходити умови високоефективного ведення процесу за певних умов. У зв'язку з цим подальший розвиток автоматичних систем, пов'язаний з виявленням граничних можливостей систем і побудовою систем, найкращих (оптимальних) за будь-яким техніко-економічним показником.

Автоматичну систему, яка забезпечує найкращі технічні або техніко-економічні показники якості при заданих реальних умовах роботи та обмеженнях, називають оптимальною ситемою. Розробка найкращої системи, яка задовольняє поставлені умови, являє собою задачу синтезу оптимальної системи. Для розробки таких систем застосовують принцип оптимальності, який дозволяє забезпечити найкраще виконання цілі керування.

Застосування принципу оптимальності в техніці дозволяє здійснити оптимальне керування різними технічними пристроями, тобто для заданого об'єкта керування та умов його роботи забезпечити найкращі показники якості, які характеризують режим його роботи. Оптимальне керування широко застосовується для автоматизації технологічних процесів або складних технічних пристроїв. При цьому розглядається задача оптимізації режимів з урахуванням обмежень, які визначаються умовами роботи об'єкта керування для детермінованих і випадкових сигналів як при незмінних параметрах, так і при параметрах і характеристиках об'єкта керування, які змінюються, та сигналів зовнішніх збурень.

2-5-1619

Об'єктом дослідження в даних роботах є одновимірна система, динаміка якої описується такими рівняннями:

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k), \qquad (В.1)$$

$$y(k) = C\,x(k), \qquad (В.2)$$

де $x(k) = [x_1(k) \quad x_2(k)]^T$ – вектор змінних стану; $u(k)$, $y(k)$ – відповідно вхід та вихід ситеми; $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$ – перехідна матриця стану; $B = [\,0 \;\; 1\,]^T$ – матриця управлінь; $C = [\,0 \;\; 1\,]$ – матриця виходу. Варіанти завдань наведені в табл. 1.

Таблиця 1

№ варіанта	a	b	№ варіанта	a	b	№ варіанта	a	b
1	-0.09	-0.8	11	-0.08	0.9	21	-0.24	-1.0
2	0.16	-0.6	12	-0.14	0.9	22	-0.08	-0.9
3	0.21	-0.4	13	-0.18	0.9	23	-0.32	-1.2
4	0.24	-0.2	14	-0.2	0.9	24	-0.28	-1.1
5	0.15	0.2	15	-0.16	1.0	25	-0.18	-1.1
6	0.24	0.2	16	-0.24	1.1	26	-0.27	-1.2
7	0.21	0.4	17	-0.35	1.2	27	-0.36	-1.3
8	0.16	0.6	18	-0.09	-1.0	28	-0.48	-1.4
9	0.09	0.8	19	-0.16	-1.0	29	-0.07	-0.8
10	-0.72	1.7	20	-0.21	-1.0	30	-0.56	-1.5

При динамічній оптимізації систем часто застосовується критерій оптимальності вигляду:

$$I = \sum_{k=0}^{N} [x^T(k)\,Q\,x(k) + u^T(k)\,R\,u(k)], \qquad (В.3)$$

де матриці Q та R додатно визначені та симетричні.

Для одновимірного об'єкта 2-го порядку, який досліджується в даних лабораторних роботах, задано $R = r$, $Q = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$, тобто критерій оптимальності (В.3) буде:

$$I = \sum_{k=0}^{N} [q(x_1^2(k) + x_2^2(k)) + ru^2(k)]. \qquad (В.3)$$

Задача синтезу системи полягає в побудові регулятора, який формує такий вектор управлінь $u(k)$ з вектора змінних стану $x(k)$, що переводить систему в кінцевий стан $x(N) = 0$ та мінімізує квадратичний критерій якості (В.3).

Розрахункова робота № 1

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ НА ОСНОВІ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Мета роботи. Вивчити теоретичні основи та набути практичних навичок з синтезу оптимальних систем на основі варіаційного числення.

Теоретичні відомості. Згідно з принципом варіації задача знаходження мінімуму функції при наявності обмежень у вигляді рівностей вирішується шляхом додавання обмежень до цієї функції.

Визначимо вектор $\lambda(k+1)$ вимірністю $n \times 1$ як множник Лагранжа. Критерій якості I (В.3) перетворюється в розширений критерій

$$I_o = \sum_{k=0}^{N} [\, x^T(k) + Q\,x(k) + u^T(k)\,R\,u(k)\,] + $$
$$+ \lambda^T(k+1)[\, x(k+1) - A\,x(k) - B\,u(k)\,] = $$
$$= \sum_{k=0}^{N} F_o[\, x(k),\, x(k+1),\, u(k),\, \lambda(k),\, k\,], \qquad (1.1)$$

2*

де $F_o = x^T(k)\ Q\ x(k) + u^T(k)\ R\ u(k) + $
$$+ \lambda^T[\ x(k+1) - A\ x(k) - B\ u(k)]. \qquad (1.2)$$

В теорії варіаційного числення доводиться, що знаходження мінімуму або максимуму функціоналу I при умові (В.1) еквівалентно пошуку мінімуму або максимуму функціоналу I_o без обмежень.

Нехай $x(k)$, $x(k+1)$, $u(k)$ та $\lambda(k)$ мають різні варіації :

$$x(k) = x_o(k) + \varepsilon\ \eta(k),$$
$$x(k+1) = x_o(k+1) + \varepsilon\ \eta(k+1),$$
$$u(k) = u_o(k) + \delta\ \mu(k),$$
$$\lambda(k+1) = \lambda_o(k+1) + \gamma\ \omega(k+1),$$

де $x_o(k)$, $x_o(k+1)$, $u_o(k)$, $\lambda_o(k)$ - вектори, відповідні оптимальним траєкторіям; $\eta(k)$, $\mu(k)$, $\omega(k)$ - довільні векторні змінні; ε, δ, та γ - деякі сталі.

Необхідні умови існування екстремуму (максимуму або мінімуму) критерію оптимальності I_o визначаються дискретним рівнянням Ейлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial\ Fo(k)}{\partial\ x_o(k)} + \frac{\partial\ Fo(k-1)}{\partial\ x_o(k)} = 0. \qquad (1.3)$$

Друге рівняння

$$\eta(k)\ \frac{\partial\ Fo(k-1)}{\partial\ x_o(k)}\ \Bigg|_{k=0}^{k=N} = 0 \qquad (1.4)$$

відоме як умова трансверсальності, або гранична умова, необхідна для розв'язку диференціальних рівнянь в частинних похідних (1.3).

Крім того, повинні мати місце лише такі співвідношення:

$$\frac{\partial\ Fo(k)}{\partial\ \lambda_i(k+1)} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n; \qquad (1.5)$$

$$\frac{\partial\ Fo(k)}{\partial\ u_j(k)} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m. \qquad (1.6)$$

де n та m - кількість змінних стану та управлінь відповідно.

Рівняння (1.5) веде до виразу (В.1), який означає, що рівняння оптимальної траєкторії повинно задовольняти рівняння стану. Рівняння (1.6) визначає оптимальне управління $u_o(k)$ через $\lambda_o(k+1)$.

Для більшості задач проектування задається початковий стан $x(0)$. Отже, збурення $x(k)$ при $k = 0$ дорівнює нулю, тому що $x(0)$ зафіксовано, тобто $\eta(0) = 0$. Умова трансверсальності (1.4) зводиться до умови

$$\eta(k)\ \frac{\partial\ Fo(k-1)}{\partial\ x_o(k)}\ \Bigg|_{k=N} = 0. \qquad (1.7)$$

Більшість задач оптимального керування класифікують у відповідності до граничних умов в крайніх точках. Наприклад, якщо $x(N)$ задано, то цей випадок називають задачею проектування з закріпленими крайніми точками. Якщо значення $x(N)$ не визначене або належить деякій області цілі, то маємо задачу з вільними крайніми точками. Умову трансверсальності (1.7) треба використовувати у відповідності з граничними умовами в крайніх точках. Якщо має місце задача з закріпленими крайніми точками ($x(N)$ - не фіксоване, $\eta(N) = 0$), тоді похідна

$$\frac{\partial\ Fo(k-1)}{\partial\ x_o(k)}\ \Bigg|_{k=N}$$

має довільне значення, і для розв'язку рівняння (1.3) нема необхідності в умові трансверсальності. Для задачі з вільними крайніми точками ($x(N)$ - не фіксоване, $\eta(N) \neq 0$), похідна

$$\frac{\partial\ Fo(k-1)}{\partial\ x_o(k)}\ \Bigg|_{k=N} = 0, \qquad (1.8)$$

що є умовою трансверсальності, необхідною для розв'язку рівняння (1.3).

3-5-1619

В багатьох випадках одні елементи вектора $x(N)$ фіксовані, а інші вільні. Тоді умови трансверсальності повинні застосовуватись відповідно.

Для одновимірного об'єкта 2-го порядку, який досліджується в даній роботі, функція $F(k)$ (1.2) має вигляд:

$$F(k) = qx_1^2(k) + qx_2^2(k) + ru^2(k) + \lambda_1(k+1)[x_1(k+1) - x_2(k)] + \lambda_2(k+1)[x_2(k+1) - ax_1(k) - bx_2(k) - u(k)]. \quad (1.9)$$

Використовуючи рівняння (1.3), визначимо дискретне рівняння Ейлера-Лагранжа :

$$\begin{cases} 2qx_1(k) - a\lambda_2(k+1) + \lambda_1(k) = 0, \\ 2qx_2(k) - \lambda_1(k+1) - b\lambda_2(k+1) + \lambda_2(k) = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Із співвідношень (1.5) маємо:

$$\begin{cases} x_1(k+1) - x_2(k) = 0, \\ x_2(k+1) - ax_1(k) - bx_2(k) - u(k) = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

а з (1.6) дістанемо:

$$u(k) = \frac{1}{2r}\lambda_2(k+1). \quad (1.12)$$

Підставляючи (1.12) в друге рівняння системи (1.11) та об'єднуючи останню з (1.10), сформуємо систему

$$\begin{cases} 2qx_1(k) + \lambda_1(k) - a\lambda_2(k+1) = 0; & (1.13а) \\ 2qx_2(k) + \lambda_2(k) - \lambda_1(k+1) - b\lambda_2(k+1) = 0; & (1.13б) \\ x_1(k+1) - x_2(k) = 0; & (1.13в) \\ x_2(k+1) - ax_1(k) - bx_2(k) - \frac{1}{2r}\lambda_2(k+1) = 0. & (1.13г) \end{cases}$$

Розв'язати цю систему можна, наприклад, за допомогою z - перетворення, застосовуючи яке до рівнянь (1.13), маємо систему :

$$\begin{cases} 2qx_1(z) + \Lambda_1(z) - az\Lambda_2(z) = -az\lambda_2(0); \\ 2qx_2(z) - z\Lambda_1(z) + (1 - bz)\Lambda_2(z) = -z\lambda_1(0) - bz\lambda_2(0); \\ zx_1(z) - x_2(z) = zx_1(0); \\ ax_1(z) + (b - z)x_2(z) + \frac{1}{2r}z\Lambda_2(z) = -zx_2(0) + \frac{1}{2r}z\lambda_2(0), \end{cases} \quad (1.14)$$

де $x_1(z)$, $x_2(z)$, $\Lambda_1(z)$, $\Lambda_2(z)$ – зображення $x_1(k)$, $x_2(k)$, $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ відповідно.

Одним з розв'язків системи (1.14) буде

$$x_1(z) = \frac{C(z)\lambda_1(0) + D(z)\lambda_2(0) + F(z)}{M(z)}, \quad (1.15)$$

де

$$M(z) = az^4 + b(1 - a)z^3 - \left(1 + a^2 + b^2 + \frac{2q}{r}\right)z^2 + b(1 - a)z + a; \quad (1.16)$$

$$C(z) = \frac{1}{2r}z^2; \quad (1.17)$$

$$D(z) = \frac{1}{2r}z; \quad (1.18)$$

$$F(z) = ax_1(0)z^4 + [b(1 - a)x_1(0) + ax_2(0)]z^3 - \left[\left(1 + b^2 + \frac{q}{r}\right)x_1(0) - bx_2(0)\right]z^2 + [bx_1(0) - x_2(0)]z. \quad (1.19)$$

Переходячи до оригіналу, за формулою обернення маємо:

$$x_1(k) = \sum_{i=1}^{4} F_i(k), \quad (1.20)$$

де $F_i(k) = \operatorname{Res}_{z=z_i}[x_1(z)z^{k-1}]$ - залишок функції $x_1(z)z^{k-1}$ у полюсі z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) функції $x_1(z)$ (z_i - корені рівняння $M(z) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$).

Функція $F_i(k)$ обчислюється за формулою

$$F_i(k) = \frac{z_i^{k-1}[C(z_i)\lambda_1(0) + D(z_i)\lambda_2(0) + F(z_i)]}{N(z_i)}. \quad (1.21)$$

3^*

де $$N(z_i) = (z_i - z_j)(z_i - z_m)(z_i - z_n); \tag{1.21а}$$

тут z_j, z_m, z_n – корені $M(z) = 0$, при цьому $j, m, n \neq i$.

З урахуванням (1.21) вираз (1.20) можна переписати у вигляді:

$$x_1(k) = g(k)\lambda_1(0) + f(k)\lambda_2(0) + p(k). \tag{1.22}$$

де
$$g(k) = \sum_{i=1}^{4} z_i^{k-1}\frac{C(z_i)}{N(z_i)}; \tag{1.23}$$

$$f(k) = \sum_{i=1}^{4} z_i^{k-1}\frac{D(z_i)}{N(z_i)}; \tag{1.24}$$

$$p(k) = \sum_{i=1}^{4} z_i^{k-1}\frac{F(z_i)}{N(z_i)}. \tag{1.25}$$

З рівняння (1.13в), враховуючи (1.22) ÷ (1.25), витікає, що

$$x_2(k) = \alpha(k)\lambda_1(0) + \beta(k)\lambda_2(0) + \gamma(k), \tag{1.26}$$

де
$$\alpha(k) = \sum_{i=1}^{4} z_i^{k}\frac{C(z_i)}{N(z_i)}; \tag{1.27}$$

$$\beta(k) = \sum_{i=1}^{4} z_i^{k}\frac{D(z_i)}{N(z_i)}; \tag{1.28}$$

$$\gamma(k) = \sum_{i=1}^{4} z_i^{k}\frac{F(z_i)}{N(z_i)}. \tag{1.29}$$

У виразах (1.22) та (1.26) невідомими залишаються $\lambda_1(0)$ і $\lambda_2(0)$. Для їх визначення треба скористатися граничними умовами $x_1(N) = 0$; $x_2(N) = 0$. Тоді можна скласти таку систему рівнянь, підставляючи у (1.22) та (1.26) $k = N$:

$$\begin{aligned} g(N)\lambda_1(0) + f(N)\lambda_2(0) &= -p(N); \\ \alpha(N)\lambda_1(0) + \beta(N)\lambda_2(0) &= -\gamma(N). \end{aligned} \tag{1.30}$$

Розв'язком цієї системи будуть:

$$\lambda_1(0) = \frac{f(N)\gamma(N) - p(N)\beta(N)}{g(N)\beta(N) - f(N)\alpha(N)}; \tag{1.31}$$

$$\lambda_1(0) = \frac{p(N)\alpha(N) - g(N)\gamma(N)}{g(N)\beta(N) - f(N)\alpha(N)}. \tag{1.32}$$

Тепер з рівняння (1.13а) знаходимо ітеративну формулу для обчислення $\lambda_2(k + 1)$:

$$\lambda_2(k + 1) = \frac{1}{a}[2qx_1(k) + \lambda_1(k)]. \tag{1.33}$$

Далі можна розрахувати оптимальну стратегію керування $u_o(k)$ за формулою (1.12), а також змінні стану $x_1(k)$ та $x_2(k)$ за виразами (1.22) і (1.26) для будь-яких $k = 0, 1, ..., N$.

Порядок виконання роботи

1. Задайте $x(0) = [\,5\ 5\,]^T$; $x(N) = 0$; $N = 5$.
2. Задайте $q = 1$, $r = 1$.
3. Розрахуйте змінні стану $x(k)$ та управління $u_o(k)$ ($k = 0, 1,..., N$), для чого:

3.1. Знайдіть корені z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) рівняння $M(z) = 0$ (1.16).

3.2. Обчисліть $C(z_i)$, $D(z_i)$, $F(z_i)$ та $N(z_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) згідно з виразами (1.17) ÷ (1.19) та (1.21а).

3.3. Визначте $g(k)$, $f(k)$, $p(k)$, $\alpha(k)$, $\beta(k)$, $\gamma(k)$ за формулами (1.23) – (1.25) та (1.27) – (1.29).

3.4. Розрахуйте $\lambda_1(0)$ та $\lambda_2(0)$ за формулами (1.31) та (1.32).

3.5. Використовуючи вирази (1.22) та (1.26) і формулу (1.12), визначте змінні стану $x_1(k)$ та $x_2(k)$ і оптимальне управління $u_o(k)$ при $k = 0, 1, ..., N$.

4. Знайдіть значення критерію оптимальності за формулою (В.3).
5. Змініть параметри критерію оптимальності :

а) q = 10; r = 1;

б) q = 1; r = 10,

та повторити розрахунки, починаючи з п. 3.

6. Задайте N = 10 та повторити розрахунки згідно з пп. 2 - 4.

Оформлення результатів роботи

1. Привести фактичні дані виконаних розрахунків.

2. Привести графіки зміни змінних стану та оптимального управління для всіх варіантів початкових даних.

Контрольні запитання

1. Який критерій оптимальності застосовується в даній роботі?
2. В чому полягає задача синтезу системи в даному випадку?
3. Що називається варіацією функцій?
4. Запишіть рівняння Ейлера-Лагранжа. Що воно визначає?
5. Що таке умова трансверсальності і для чого вона необхідна?
6. Як класифікують задачі оптимального керування в залежності від граничних умов в крайніх точках? Яка задача досліджується в даній роботі?
7. Що ви можете сказати про умови трансверсальності для задач з закріпленими та вільними крайніми точками?
8. Довести вираз (1.9).
9. Яким чином розв'язується система (1.14)?
10. Виведіть формули (1.15) - (1.19).
11. Поясніть, як виведені вирази (1.22) - (1.25).
12. Виведіть формули (1.26) - (1.29).
13. Поясніть, як розрахувати $\lambda_1(0)$ та $\lambda_2(0)$.

14. Порівняйте значення критеріїв оптимальності при N = 1 та N = 10. Чим Ви можете пояснити різницю між ними?
15. Викладіть порядок виконання роботи.

Розрахункова робота № 2

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЇ СИТЕМИ НА ОСНОВІ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ.

Мета роботи. Вивчити теоретичні основи та набути практичних навичок з синтезу оптимальних систем на основі принципу максимуму.

Теоретичні відомості. Задача пректування оптимальної системи сформульована таким чином. Треба знайти оптимальне управління $u_o(k)$ на інтервалі $[0, N]$, яке мінімізує критерій оптимальності:

$$I = G[x(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} F[x(k), u(k), k] \qquad (2.1)$$

при обмеженні, заданому у вигляді рівності

$$x(k + 1) = f[x(k), u(k), k]. \qquad (2.2)$$

Член $G[x(N), N]$ у виразі (2.1) є термінальною складовою критерію оптимальності. Ця складова необхідна як обмеження на кінцевий стан тільки у випадку, коли $x(N)$ не є закріпленою точкою. Зазначимо також, що критерій (В.3) є окремим випадком критерію (2.1), коли $G[\dots] = F[\dots]$, а рівняння стану (В.1) - окремим випадком (2.2).

За аналогією з множниками Лагранжа визначимо n - вимірний додатковий вектор $\psi(k)$. Тоді задача оптимізації еквівалентна мінімізації:

$$I_o = G[x(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} \{F[x(k), u(k), k] - \psi^T(k+1)[x(k+1) - f(x(k), u(k), k)]\}. \qquad (2.3)$$

Визначимо як гамільтоніан скалярну функцію

$$H[x(k), u(k), k] = F[x(k), u(k), \psi(k+1), k] + \psi(k+1)f[x(k), u(k), k]. \qquad (2.4)$$

При визначенні гамільтоніана таким чином він відповідає задачі дискретного принципу максимуму. Для дискретного принципу мінімуму гамільтоніан визначається у вигляді :

$$H[x(k), u(k), k] = H[x(k), u(k), \psi(k+1), k] - \psi^T(k+1)f[x(k), u(k), k]. \qquad (2.5)$$

Принцип максимуму стверджує, що гамільтоніан приймає максимальне значення вздовж оптимальної траєкторії та, навпаки, для принципу мінімуму гамільтоніан вздовж неї має мінімальне значення.

З (2.5) маємо

$$F[x(k), u(k), k] = H[x(k), u(k), \psi(k+1), k] - \psi(k+1)f[x(k), u(k), k]$$

і підставимо у (2.3):

$$I_o = G[x(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} \{H[x(k), u(k), \psi(k+1), k] - \psi^T(k+1)x(k+1)\}, \qquad (2.6)$$

що відповідає принципу мінімуму.

Згідно з принципом максимуму (мінімуму) критерій оптимальності I_o буде досягати екстремуму при виконанні таких умов:

$$\frac{\partial H^o(k)}{\partial x_o(k)} = \psi_o(k); \qquad (2.7)$$

$$\frac{\partial H^o(k)}{\partial \psi_o(k+1)} = x_o(k+1); \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial H^o(k)}{\partial u_o(k)} = 0; \qquad (2.9)$$

$$\frac{\partial G^o(N)}{\partial x_o(N)} = \psi_o(N). \qquad (2.10)$$

Рівняння (2.7) та (2.8) дають 2n різницевих рівнянь першого порядку, які називаються канонічними рівнянням стану. Рівняння (2.9) визначає оптимальне управління $u_o(k)$, а рівняння (2.10) – умову трансверсальності, яку необхідно використовувати, коли $x(N)$ є незакріпленою точкою. Якщо деякі елементи вектора $x(N)$ визначені, то відповідні умови трансверсальності для $\psi_o(N)$ не використовуються.

Застосовуючи принцип мінімуму до задачі, яка досліджується в даній роботі (критерій оптимальності (В.3) та обмеження у вигляді (В.1)), на першому етапі треба сформувати гамільтоніан. Згідно з виразом (2.5)

$$H[x(k), u(k), \psi(k+1), k] = q[x_1^2(k) + x_2^2(k)] + ru(k) + \psi_1(k+1)x_2(k) + \psi_2(k+1)[ax_1(k) + bx_2(k) + u(k)]. \qquad (2.11)$$

Далі визначимо канонічні рівняння стану за формулами (2.7) та (2.8):

$$\left[\begin{aligned} &2qx_1(k) + a\psi_2(k+1) = \psi_1(k); \\ &2qx_2(k) + \psi_1(k+1) + b\psi_2(k+1) = \psi_2(k); \\ &x_2(k) = x_1(k+1); \\ &ax_1(k) + bx_2(k) + u(k) = x_2(k+1). \end{aligned}\right. \qquad (2.12)$$

З рівняння (2.9) знайдемо оптимальне управління:

$$u_0(k) = -\frac{1}{2}\psi_2(k+1). \qquad (2.13)$$

В зв'язку з тим, що кінцева точка $x(N) = 0$ закріплена, нема необхідності в умові трансверсальності (2.10).

Підставляючи (2.13) у (2.12), дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2qx_1(k) - \psi_1(k) + a\psi_2(k+1) = 0; & (2.14а) \\ 2qx_2(k) - \psi_2(k) + \psi_1(k+1) + b\psi_2(k+1) = 0; & (2.14б) \\ x_1(k+1) - x_2(k) = 0; & (2.14в) \\ x_2(k+1) - ax_1(k) - bx_2(k) + \frac{1}{2r}\psi_2(k+1) = 0, & (2.14г) \end{cases}$$

яка схожа з системою (1.13) з попередньої розрахункової роботи.

Застосовуючи z - перетворення до рівнянь системи (2.14), маємо:

$$\begin{cases} 2qx_1(z) - \psi_1(z) + az\psi_2(z) = az\psi_2(0); \\ 2qx_2(z) + z\psi_1(z) - (1 - bz)\psi_2(z) = z\psi_1(0) + bz\psi_2(0); \\ zx_1(z) - x_2(z) = zx_1(0); \\ ax_1(z) + (b - z)x_2(z) - \frac{1}{2r}z\psi_2(z) = -zx_2(0) - \frac{1}{2r}z\psi_2(0), \end{cases} \qquad (2.15)$$

де $x_1(z)$, $x_2(z)$, $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ - зображення відповідно $x_1(k)$, $x_2(k)$, $\psi_1(k)$, $\psi_2(k)$.

Невідома $x_1(z)$ цієї системи розраховується за формулою (1.15), де $M(z)$ і $F(z)$ визначаються виразами (1.16) та (1.19), а $C(z)$ і $D(z)$ будуть:

$$C(z) = -\frac{1}{2r}z^2, \qquad (2.16)$$

$$D(z) = -\frac{1}{2r}z. \qquad (2.17)$$

Аналогічно попередній роботі $x_1(k)$ та $x_2(k)$ обчислюються за формулами (1.22) і (1.26). Підставляючи у ці формули граничні

умови $x_1(N) = 0$ та $x_2(N) = 0$ при $k = N$, можна скласти систему рівнянь:

$$\begin{aligned} g(N)\psi_1(0) + f(N)\psi_2(0) &= -p(N); \\ \alpha(N)\psi_1(0) + \beta(N)\psi_2(0) &= -\gamma(N), \end{aligned} \qquad (2.18)$$

з якої визначити невідомі $\psi_1(0)$ та $\psi_2(0)$:

$$\psi_1(0) = \frac{f(N)\gamma(N) - p(N)\beta(N)}{g(N)\beta(N) - f(N)\alpha(N)}; \qquad (2.19)$$

$$\psi_2(0) = \frac{p(N)\alpha(N) - g(N)\gamma(N)}{g(N)\beta(N) - f(N)\alpha(N)}. \qquad (2.20)$$

У виразах (2.18) - (2.20) $g(N)$, $f(N)$, $p(N)$, $\alpha(N)$, $\beta(N)$ і $\gamma(N)$ розраховуються згідно з (1.23) - (1.25а), (1.27) - (1.29) при $k = N$.

Тепер з рівняння (2.14а) знаходимо ітеративну формулу для обчислення $\psi_2(k+1)$:

$$\psi_2(k+1) = \frac{1}{a}[\psi_1(k) - 2qx_1(k)]. \qquad (2.21)$$

Далі можна розрахувати оптимальну стратегію керування $u_0(k)$ за формулою (2.13), а також змінні стану $x_1(k)$ та $x_2(k)$ згідно з виразами (1.22) і (1.26) для будь-яких $k=0, 1,\ldots, N$.

<u>Порядок виконання роботи</u>

1. Задайте $x(0) = [\,5\ 5\,]^T$; $x(N) = 0$; $N = 5$.

2. Задайте $q = 1$, $r = 1$.

3. Розрахуйте змінні стану $x(k)$ та управління $u_0(k)$ ($k = 0, 1, \ldots, N$), для чого:

3.1. Знайдіть корені z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) рівняння $M(z) = 0$ (1.16).

3.2. Обчисліть $C(z_i)$, $D(z_i)$, $F(z_i)$ та $N(z_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) згідно з виразами (2.16), (2.17), (2.19) та (2.21а) відповідно.

3.3. Визначте $g(k)$, $f(k)$, $p(k)$, $\alpha(k)$, $\beta(k)$ і $\gamma(k)$ за формулами (1.23) - (1.25) та (1.27) - (1.29).

3.4. Розрахуйте $\psi_1(0)$ та $\psi_2(0)$ за виразами (2.19) та (2.20).

3.5. Використовуючи формули (1.22) та (1.26) і вираз (2.13), визначте змінні стану $x_1(k)$ та $x_2(k)$ і оптимальне управління $u_o(k)$ при $k = 0, 1, \ldots, N$.

4. Знайдіть значення критерію оптимальності за формулою (В.3).

5. Змініть параметри критерію оптимальності:

а) $q = 10$; $r = 1$;

б) $q = 1$; $r = 10$,

та повторити розрахунки, починаючи з п.3.

6. Задати $N = 10$ та повторити розрахунки згідно з пп.2 - 4.

Оформлення результатів роботи

1. Привести фактичні дані виконаних розрахунків.

2. Побудувати графіки зміни змінних стану та оптимального управління для всіх варіантів початкових даних.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачу синтезу оптимальної системи на основі принципу максимуму.

2. Що таке гамільтоніан і як він визначається?

3. В чому полягає принцип максимуму?

4. Який критерій оптимальності застосовується в даній роботі?

5. Виведіть формулу (2.11).

6. Виведіть канонічні рівняння стану (2.12).

7. Як класифікують задачі оптимального керування в залежності від граничних умов в крайніх точках? Яка задача досліджується в даній роботі?

8. Яким чином розв'язується система (2.15)?

9. Виведіть формули (1.15), (1.16), (1.19), (2.16) та (2.17).

10. Поясніть, як виведені вирази (1.22) - (1.25).

11. Виведіть формули (1.26) - (1.29).

12. Поясніть, як розрахувати $\psi_1(0)$ та $\psi_2(0)$.

13. Чим Ви можете пояснити різницю в значеннях критерію оптимальності при $N = 5$ та $N = 10$?

14. Викладіть порядок виконання роботи.