Корпель

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З КУРСУ "КЕРУВАННЯ СКЛАДНИМИ СИСТЕМАМИ"

для студентів спеціальності 21.03.01
"Автоматизація технологічних процесів і виробництв. Автоматизація хіміко-технологічних процесів"

Затверджено
на засіданні кафедри
автоматизації хімічних виробництв
Протокол № 4 від 22.12.93

Київ КПІ 1994

Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу "Керування складними системами" для студентів спеціальності 21.03.01 "Автоматизація технологічних процесів і виробництв. Автоматизація хіміко-технологічних процесів" / Укл. А.І.Жученко, М.В.Коржик. - К.: КПІ. 1994. - 32 с.

Укладачі: А.І.Жученко, канд.техн.наук
М.В.Коржик

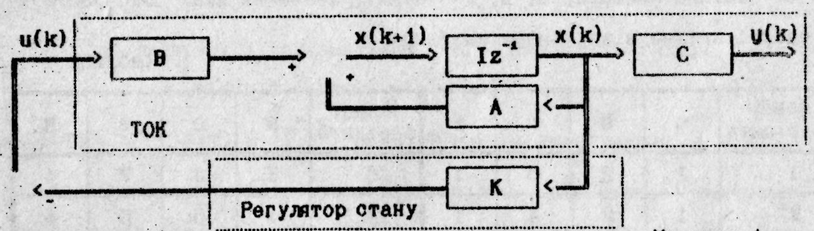
Відповідальний редактор М.З.Кваско

Рецензенти: А.І.Кубрак
В.М.Ковалевський

Вступ

Широке впровадження інформаційних технологій у сучасне виробництво потребує застосування відповідних методів синтезу автоматичних систем керування, зокрема регуляторів стану.

Структурна схема автоматичної системи керування з регулятором стану може бути зображена, як показано на мал. 1.



Малюнок 1

Якщо технологічний об'єкт керування (ТОК) є лінійним стаціонарним об'єктом, його математична модель в просторі станів представляється рівняннями :

$$\begin{cases} \dfrac{d\,x(t)}{d\,t} = A\,x(t) + B\,u(t), \\ y(t) = C\,x(t), \end{cases} \qquad (B.1)$$

де $x(t)$, $y(t)$ та $u(t)$ - відповідно вектори змінних стану розміром $n\times 1$, виходів $(r\times 1)$ та управлінь $(m\times 1)$; A, B та C - матриці розміром відповідно $n\times n$, $n\times m$ та $r\times n$.

Синтез автоматичних систем здійснюється для досягнення наперед заданих показників якості. Такими показниками можуть бути запас стійкості, ступінь коливальності, швидкодія, інтегральні та квадратичні показники якості тощо.

Під час виконання лабораторних робіт студенти повинні синтезувати різні типи регуляторів стану згідно із заданими показниками якості для детермінованих систем. Об'єктом дослідження є одновимірна замкнена система керування з ТОК, передаточна функція якого має вигляд

$$W(s) = \frac{k}{(s+a)(s+b)(s+c)}, \qquad (В.2)$$

де s – змінна Лапласа; a, b, c – сталі, значення яких вибираються з табл. 1 згідно з варіантом завдання.

Таблиця 1

Номер варіанта	a	b	c	k	Номер варіанта	a	b	c	k
1	1	2	3	1	16	3	4	7	4
2	1	2	4	1	17	4	5	6	4
3	1	2	5	1	18	4	5	7	4
4	1	2	6	1	19	5	6	7	4
5	1	2	7	1	20	1	2	8	4
6	2	3	4	2	21	1	3	8	5
7	2	3	5	2	22	1	4	8	5
8	2	3	6	2	23	1	5	8	5
9	2	3	7	2	24	2	3	8	5
10	1	3	4	2	25	2	4	8	5
11	1	3	5	3	26	2	5	8	1
12	1	3	6	3	27	3	4	8	1
13	1	3	7	3	28	3	5	8	1
14	3	4	5	3	29	4	5	8	1
15	3	4	6	3	30	4	6	8	1

Для синтезу регуляторів стану математична модель (В.2) повинна бути представлена у вигляді (В.1). Для цього треба

обчислити матриці :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & q & f \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}, \quad C = [\,0\ 0\ 1\,],$$

де $p = -abc$; $q = -(ab + bc + ac)$; $f = -(a + b + c)$.

Розв'язок рівняння (В.1):

$$x(t) = \Phi(t)\,x(0) + [\int_0^t \Phi(\tau)\,u(\tau)\,d\tau]B, \qquad (В.3)$$

де $\Phi(t) = e^{At}$.

У разі дискретної системи вираз (В.3) набирає вигляду:

$$x(k + 1) = \Phi(T)\,x(k) + \theta(T)\,u(k), \qquad (В.4)$$

де $\Phi(T) = e^{AT}$; $\theta(T) = (\int_0^T e^{A\tau}\,d\tau)B$ (Т-період квантування, $t = kT$).

Після синтезу регулятора стану якість автоматичної системи будемо аналізувати по вигляду її динамічних характеристик. Для розрахунку цих характеристик рівняння стану (В.4) треба доповнити рівнянням зворотного зв'язку :

$$u(k) = -K\,x(k), \qquad (В.5)$$

де К – матриця зворотного зв'язку регулятора стану. Тоді рівняння стану замкненої системи набере вигляду:

$$x(k + 1) = (\Phi - \theta K)\,x(k). \qquad (В.6)$$

Задаючи $x(0)$ при $k = 0$, можна послідовно обчислити $x(k)$ $k = 1, 2, \ldots,$ а потім і $y(k)$ згідно з рівняннями виходу $y(k) = C\,x(k)$.

Для виконання лабораторних робіт розроблено два пакети прикладних програм, що працюють у середовищі операційної системи DOS.

Пакет TOOLS містить програми для дій з матрицями. До пакета також включена програма Z – перетворення. Програми цього пакета використовуються для підготовчих операцій. Безпосередні

2-4-5245

розрахунок змінних стану технологічного об'єкта керування у замкненій системі здійснюється програмами пакета SZSYS.

Для запуску пакета TOOlS (або SZSYS) необхідно ввести відповідне ім'я в командний рядок та натиснути клавішу <Ввод>.

Після запуску пакета TOOlS на екрані комп'ютера з'являється головне меню (див. мал. 2), яке являє собою перелік включених до пакету програм. Виклик потрібної програми здійснюється шляхом введення з клавіатури номера цієї прграми (операції).

```
Дії з матрицями для виконання лабораторних робіт з курсу
            "Керування складними системами"

    1 - Множення матриць
    2 - Обернення матриці
    3 - Обчислювання визначника матриці
    4 - Обчислювання власних значень матриці
    5 - Обчислювання власних векторів матриці
    6 - Обчислювання перехідної матриці стану
        та матриці керування
    7 - Перетворення матриці на канонічну форму
    8 - Z - перетворення полюсів
    0 - Вихід

Введіть номер операції :
```

Малюнок 2

Для початку розрахунків необхідно ввести вихідні матриці. Введення матриці починається із задання її розмірів (кількості рядків та стовпців). Якщо розмір матриці не перевищує припустимий (пакети TOOlS та SZSYS працюють з матрицями, максимальний розмір яких 3×3), то на екрані з'являється графічний образ матриці і Ви починаєте введення значень елементів матриці. Для введення кожного набраного значення необхідно натиснути клавішу <Ввод>. При введенні кожне числове значення не повинно містити більше 7 символів (включаючи десяткову крапку та знак). Після введення всіх

елементів, якщо матриця введена правильно, треба натиснути клавішу <Ввод>; якщо ні - будь-яку іншу клавішу і повторити введення всіх елементів.

Для повернення в головне меню після завершення розрахунків треба натиснути клавішу <Ввод>.

Після запуску пакета SZSYS на екрані комп'ютера з'являється головне меню (див. мал. 3), яке містить перелік включених до пакета програм розрахунків характеристик стану ТОК.

```
 Побудова характеристик стану ТОК у замкненій системі для
лабораторних робіт з курсу "Керування складними системами"

    1 - Система з регулятором стану
    2 - Система з модальним регулятором стану
    3 - Система зі спостерігачем повного порядку
        та регулятором стану
    4 - Система зі спостерігачем зниженого порядку
        та регулятором стану

    0 - Вихід

Введіть номер операції :
```

Малюнок 3

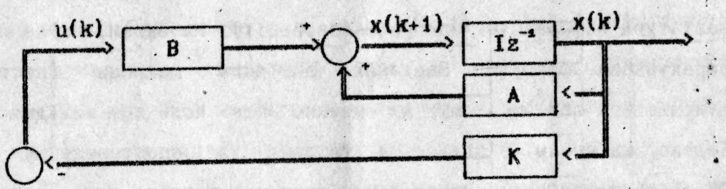
Виклик потрібної програми здійснюється шляхом введення з клавіатури номера цієї програми (операції). На екрані з'являється розрахункова формула. Введення вихідних матриць (векторів) здійснюється подібно тому, як описано вище. Коли всі вихідні дані введено, на екрані з'являється таблиця для спостереження стану ТОК. Розрахунок починається після введення з клавіатури кількості періодів квантування. Для продовження розрахунків треба збільшити кількість періодів квантування. Якщо введено число 0, розрахунок припиняється. Пакет програм не розрахований на використання друкарського пристрою. Після припинення розрахунків на екрані з'являється запитання "Чи бажаєте Ви вивести результати розрахунків на екран?". Для ствердної відповіді треба ввести з клавіатури літеру "Y". Після цього можна проглянути всі розрахунки та виписати необхідні для побудови характеристик стану ТОК. Результати розрахунків можна виводити багаторазово. Для повернення в головне меню треба ввести з клавіатури літеру "N".

Лабораторна робота № 1

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА СТАНУ ПО ЗАДАНОМУ РОЗТАШУВАННЮ ПОЛЮСІВ СИСТЕМИ

Мета роботи – оволодіти теоретичними знаннями та надбати практичних навичок з синтезу регуляторів стану по заданому розташуванню полюсів автоматичної системи.

Теоретичні відомості. Об'єктом дослідження є замкнена система, структурна схема якої зображена на мал. 4. Регулятор стану



Малюнок 4

має матрицю коефіцієнтів $K = [\,k_0 k_1 k_2\,]$. Об'єкт керування описується рівнянням стану

$$x(k + 1) = A\,x(k) + B\,u(k). \qquad (1.1)$$

Це рівняння може бути за допомогою перетворення $\upsilon(k) = P\,x(k)$ представлене в канонічній формі :

$$\upsilon(k + 1) = A_1\upsilon(k) + B_1 u(k), \qquad (1.2)$$

де

$$A_1 = P\,A\,P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \qquad (1.3)$$

$$B_1 = P\,B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (1.4)$$

а матриця перетворення :

$$P = \begin{bmatrix} S \\ SA \\ SA^2 \end{bmatrix}, \qquad (1.5)$$

де

$$S = [\,0\ 0\ 1\,][\,B\ AB\ A^2B\,]^{-1}. \qquad (1.6)$$

Рівняння зворотного зв'язку по стану (див. мал. 4) має вигляд

$$u(k) = -K\,x(k) = -[\,k_0 k_1 k_2\,]\,x(k) = -[\,k_0 k_1 k_2\,]\,P^{-1}\upsilon(k) = -G\,\upsilon(k), \qquad (1.7)$$

де

$$G = K\,P^{-1} = [\,g_0 g_1 g_2\,]. \qquad (1.8)$$

Підставляючи вираз (1.7) в рівняння стану (1.2), маємо :

$$\upsilon(k + 1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \upsilon(k) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\,g_0 g_1 g_2\,]\,\upsilon(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(a_0 + g_0) & -(a_1 + g_1) & -(a_2 + g_2) \end{bmatrix} \upsilon(k). \qquad (1.9)$$

Таким чином, відповідне характеристичне рівняння замкненої системи:

$$\det(\lambda I - A_1 + B_1 G) = \lambda^3 + (a_2 + g_2)\lambda^2 + (a_1 + g_1)\lambda + (a_0 + g_0) = \lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3), \qquad (1.10)$$

де $\alpha_i = a_i + g_i$, $i = 0, 1, 2$.

Тепер, якщо розташувати якимсь чином полюси замкненої системи, тобто корені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристичного рівняння (1.10), можна обчислити шукані значення коефіцієнтів g_i ($i = 0, 1, 2$)

3-4-5245

зворотного зв'язку по стану : $g_i = \alpha_i - a_i$. (1.11)

Знайшовши g_i, легко обчислити реальні коефіцієнти k_i (i = 0, 1, 2) зворотного зв'язку :

$$K = G\,P. \qquad (1.12)$$

Вище проводилось розташування полюсів замкненої системи з ТОК, рівняння стану якого має вигляд (1.2) в той час, як реальною є система з математичним описом ТОК (1.1). Покажемо, що полюси цих двох систем збігаються. Розглянемо характеристичне рівняння замкненої системи (мал. 4) :

$$\det(\lambda I - A + B K) = 0. \qquad (1.13)$$

Якщо модель ТОК представити в канонічній формі (1.2), то характеристичне рівняння замкненої системи набере вигляду:

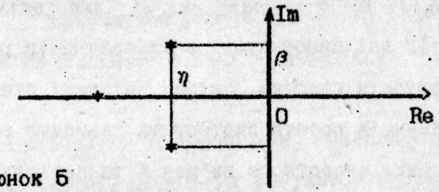
$$F(\lambda) = \det(\lambda I - A_1 + B_1 G) = 0. \qquad (1.14)$$

В останнє рівняння підставимо вирази (1.3), (1.4) та (1.8) :

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \det(\lambda I - P A P^{-1} + P B K P^{-1}) = \\ &= \det(\lambda P P^{-1} - P A P^{-1} + P B K P^{-1}) = \\ &= \det[P(\lambda I - A + B K)P^{-1}] = \\ &= \det(P)\det(\lambda I - A + B K)\det(P^{-1}) = \\ &= \det(\lambda I - A + B K). \end{aligned}$$

Тобто вирази (1.13) та (1.14) збігаються, що і треба було довести.

В даній лабораторній роботі розташування полюсів замкненої системи здійснюється виходячи із заданих запасу стійкості, ступеня коливальності, а також згідно з потрібним характером перехідних процесів. Поняття запасу стійкості $\varphi = -\eta$ та ступеня коливальності $\gamma = \beta/\varphi$ системи зрозуміло з мал.5, де "*" позначені полюси системи.



Малюнок 5

Часто при синтезі автоматичних систем потрібно забезпечити аперіодичний або коливальний характер перехідних процесів. Це залежить від розташування полюсів системи. Якщо система має комплексно спряжені полюси, то перехідний процес в автоматичній системі коливальний. Якщо всі полюси - дійсні числа, то перехідний процес буде аперіодичним.

<u>Порядок виконання роботи</u>

1. Обчислити матриці A та B у виразі (1.1), задавшись періодом квантування T = 1.
2. Розрахувати матриці A_1 та B_1 з виразу (1.2).
3. Задати полюси замкненої системи таким чином, щоб її запас стійкості $\varphi \geq 0.8$, а перехідний процес був
   а) аперіодичним;
   б) коливальним зі ступенем коливальності $\gamma \geq 1$.
4. Визначити матрицю K зворотного зв'язку для обох випадків по п.3.
5. Розрахувати змінні стану $x(k)$ для k = 1, 2,...., 10, якщо $x(0) = [\,5\ 5\ 5\,]^T$ для обох випадків по п.3.
6. Повторити обчислення по пп.1-5, якщо T = 0.5; T = 2.

<u>Оформлення результатів роботи</u>

1. Записати у чисельному вигляді матриці A і B з виразу (1.1)

та матриці A_1 і B_1 з виразу (1.2) для всіх значень періоду квантування T, які використані в лабораторній роботі.

2. Побудувати графіки зміни змінних стану для кожного з визначених режимів роботи системи та записати відповідні значення полюсів, матриці зворотного зв'язу K та періоду квантування.

Контрольні запитання

1. Що таке регулятор стану?

2. Що називається полюсом системи?

3. Як математично представляється ТОК в просторі станів для безперервної та дискретної системи керування?

4. В чому полягає синтез регуляторів стану?

5. Що таке канонічна форма математичної моделі ТОК в просторі станів?

6. Як перетворити модель ТОК в просторі станів на канонічну форму?

7. Що таке характеристичне рівняння матриці?

8. Чому для синтезу регулятору стану по розташуванню полюсів замкненої системи потрібно перетворювати рівняння стану ТОК на канонічну форму?

9. Доведіть, що полюси замкненої системи з моделями ТОК (1.1) та (1.2) збігаються.

10. Що таке ступінь стійкості та коливальності автоматичної системи?

11. Чи впливає період квантування дискретної системи на її ступінь стійкості та коливальності? Доведіть.

12. Як впливає розташування полюсів системи на характер динамічних процесів в ній (аперіодичний, коливальний)?

Лабораторна робота № 2

СИНТЕЗ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА СТАНУ

Мета роботи – Оволодіти теоретичними знаннями та надбати практичних навичок по синтезу модальних регуляторів стану.

Теоретичні відомості : Розглянемо лінійний стаціонарний об'єкт з 3 входами $u = [\,u_1\ u_2\ u_3\,]^T$:

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k). \qquad (2.1)$$

Якщо всі власні значення матриці A різні, перетворимо рівняння (2.1):

$$\upsilon(k+1) = \Lambda\,\upsilon(k) + \Gamma\,u(k), \qquad (2.2)$$

де

$$\upsilon(k) = P^{-1}x(k), \qquad (2.3)$$

$$\Lambda = P^{-1}A\,P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \qquad (2.4)$$

$$\Gamma = P^{-1}B, \qquad (2.5)$$

$$P = [\,p_1\ p_2\ p_3\,]. \qquad (2.6)$$

Тут p_i, λ_i ($i = 1, 2, 3$) - власні вектори та власні значення матриці A.

Оскільки в цьому випадку коефіцієнти k_i ($i = 1, 2, 3$) діагональної матриці зворотного зв'язку K замкненої системи безпосередньо впливають на власні значення (моди) λ_i ($i = 1, 2, 3$), таке керування автоматичною системою називають модальним, а регулятор, що синтезується, - модальним регулятором стану.

Позначимо $u_\upsilon(k) = \Gamma\,u(k)$, (2.7)

тоді рівняння (2.2) можна переписати так:

$$\upsilon(k+1) = \Lambda\,\upsilon(k) + u_\upsilon(k). \qquad (2.8)$$

Тепер сформуємо управління у вигляді зворотного зв'язку по вектору стану :

$$u_v(k) = -K_v \upsilon(k), \qquad (2.9)$$

де матриця зворотного зв'язку $K_v = \mathrm{diag}[\ k_{11} \quad k_{22} \quad k_{33}\ ]$ також діагональна. Після підстановки (2.9) у вираз (2.8) маємо :

$$\upsilon(k + 1) = [\Lambda - K_v]\ \upsilon(k). \qquad (2.10)$$

Тоді з урахуванням діагонального вигляду матриці K_v характеристичне рівняння замкненої системи набере вигляду

$$\det[\lambda I - (\Lambda - K_v)] =$$
$$= [\lambda - (\lambda_1 - k_{11})][\lambda - (\lambda_2 - k_{22})][\lambda - (\lambda_3 - k_{33})] = 0. \qquad (2.11)$$

Отже, власні значення λ_i ($i = 1, 2, 3$) об'єкта керування можуть бути змінені незалежно один від одного з допомогою відповідного вибору значень k_{ii} ($i = 1, 2, 3$) матриці зворотного зв'язку K_v.

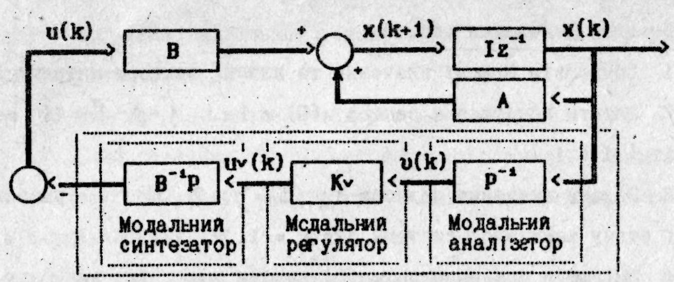
Таким чином, синтез регулятора стану в даному випадку полягає в заданні полюсів λ_{0i} ($i = 1, 2, 3$) замкненої системи, після чого за формулою :

$$k_{ii} = \lambda_i - \lambda_{0i};\ i = 1, 2, 3, \qquad (2.12)$$

визначають коефіцієнти матриці зворотного зв'язку K_v. Тепер з рівнянь (2.7) та (2.5) може бути обчислений реальний вектор управлінь :

$$u(k) = \Gamma^{-1} u_v(k) = B^{-1}P\ u_v(k). \qquad (2.13)$$

Структурна схема автоматичної системи з модальним регулятором стану зображена на мал.6. Змінні стану "розв'язані" з допомогою перетворення $\upsilon(k) = P^{-1}x(k)$ в блоці, який називається модальним аналізатором. Формування перетвореного вектора $u_v(k)$ здійснюється в модальному регуляторі K_v. Реальний вектор $u(k)$ відновлюється шляхом зворотного перетворення в модальному синтезаторі.



Малюнок 6

Враховуючи те, що регулярні матриці управлінь B (тобто квадратні матриці з ненульовим визначником) зустрічаються досить рідко, метод модального керування не знаходить широкого застосування.

Як вказувалось вище, для синтезу модального регулятора треба вибрати значення λ_{0i} полюсів замкненої системи. Цей вибір здійснюється з метою досягнення системою потрібних показників якості. В данім лабораторній роботі таким показником є швидкодія t_k системи, яка визначається як час, після якого змінні стану замкненої системи будуть менше $e = [\ e_1 e_2 \ldots e_n]^T$ де $e_i = \pm\ 0.01$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Розрахунок динамічної характеристики замкненої системи керування, тобто обчислення змінних стану $x(k)$ при $k = 1, 2, \ldots$, здійснюється за формулою (2.1), якщо замість $u(k)$ записати

$$u(k) = -K\ x(k), \qquad (2.14)$$

де $K = P^{-1}K_v B^{-1}P$ – матриця зворотного зв'язку системи. Тоді вираз (2.1) можна переписати так :

$$x(k + 1) = (A - P\ K_v P^{-1})\ x(k). \qquad (2.15)$$

Для початку розрахунків треба задати x(0).

4*

Порядок виконання роботи

1. Обчислити власні значення та власні вектори матриці A.

2. Задати початковий вектор $x(0) = [\ 1\ \ 1\ \ 1\ ]^T$ та матрицю $B = diag[\ 1\ 1\ 1\ ]$.

3. Задати значення полюсів λ_{oi} $(i = 1,\ 2,\ 3)$ та розрахувати змінні стану замкненої системи для $k = 1,\ 2, \ldots,\ 10$.

4. Змінюючи значення полюсів, знайти такі їх значення, за яких швидкодія системи керування буде 5 с, 10 с, 20 с (період квантування T = 1 с). Записати відповідні значення K_v та розрахунки характеристики стану системи.

5. Задати період квантування в системі T = 0.2 с та повторити розрахунки за пп. 1-4.

Оформлення результатів роботи

Побудувати графіки зміни змінних стану замкненої системи по всіх варіантах розрахунків, вказавши відповідні числові значення показника якості, полюсів системи, матриці K_v зворотного зв'язку та періоду квантування.

Контрольні запитання

1. Який регулятор називається модальним регулятором стану?

2. Як перетворити перехідну матрицю стану до діагонального вигляду? Навіщо це робити?

3. Які обмеження існують щодо застосування модальних регуляторів стану?

4. Доведіть, що при синтезі модального регулятора стану полюси замкненої системи можуть бути задані незалежно один від одного.

5. Що таке модальний аналізатор, модальний регулятор та модальний синтезатор?

6. Яка матриця називається регулярною?

7. Який показник якості автоматичної системи використовується при синтезі модального регулятора в даній лабораторній роботі? Як він визначається?

8. Як пов'язане розташування полюсів автоматичної системи з такими її властивостями, як аперіодичність та коливальність?

9. Чи в рівній мірі всі полюси автоматичної системи впливають на її швидкодію?

10. Чи впливає період квантування дискретних систем на синтез модального регулятора? Доведіть.

11. Яким чином здійснюється розрахунок змінних стану замкненої системи?

Лабораторна робота № 3
СИНТЕЗ АПЕРІОДИЧНОГО РЕГУЛЯТОРА СТАНУ

Мета робори – Оволодіти теоретичними відомостями та здобути практичних навичок по синтезу аперіодичного регулятора стану.

Теоретичні відомості. Розглянемо одновимірний ТОК порядку n:

$$x(k + 1) = A\,x(k) + B\,u(k). \tag{3.1}$$

Цей об'єкт може бути переведений з довільного початкового стану x(0) в нульовий кінцевий стан x(N) = 0 за N = n кроків. Регулятор стану, який реалізує такий перевод, називається аперіодичним. Необхідна для цього послідовність управлінь може бути сформована через зворотний зв'язок по стану :

$$u(k) = - K\, x(k), \qquad (3.2)$$

де $K = [\, k_0\ k_1 \ldots k_n\,]$ - матриця зворотного зв'язку. В результаті отримуємо

$$x(k + 1) = (A - B\,K)\ x(k) = F\ x(k), \qquad (3.3)$$

де $F = A - B\,K$. Тоді $x(1) = F\,x(0)$; $x(2) = F^2 x(0)$;... та

$$x(N) = F^N x(0). \qquad (3.4)$$

З умови $x(N) = 0$ виходить, що

$$F^N = 0. \qquad (3.5)$$

Запишемо характеристичне рівняння замкненої системи :

$$\det(\lambda\, I - F) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0. \qquad (3.6)$$

Коефіцієнти α_i цього рівняння розраховуються за формулою

$$\alpha_i = a_i + k_i\,, \quad i = 0,\ 1, \ldots,\ n-1, \qquad (3.7)$$

якщо модель ТОК представлена в канонічній формі, тобто матриці А і В мають вигляд :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (3.8)$$

Якщо матриці А і В мають інший вигляд, модель ТОК може бути перетворена на канонічну форму

$$\upsilon(k + 1) = A_1 \upsilon(k) + B_1 u(k) \qquad (3.9)$$

з допомогою перетворення $\upsilon(k) = P\ x(k)$, де матриця Р буде

$$P = \begin{bmatrix} S \\ S\,A \\ \vdots \\ S\,A^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (3.10)$$

а

$$S = [\,0\ 0 \ldots\ 1\,][\,B\ AB\ A^2B \ldots\ A^{n-1}B\,]^{-1}. \qquad (3.11)$$

В цьому випадку

$$K = G\ P, \qquad (3.12)$$

де $G = [\, g_1 g_2 \ldots\ g_n]$ - матриця зворотного зв'язку системи, що представлена в канонічній формі. У виразі (3.9) матриці A_1 та B_1 мають такий же вигляд, як і матриці А та В в формулі (3.8).

Представлення моделі ТОК в канонічній формі дає змогу отримати перехідну матрицю стану замкненої системи F у вигляді

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0-g_0 & -a_1-g_1 & -a_2-g_2 & \ldots & -a_{n-1}-g_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad (3.13)$$

що і зумовлює розрахунок коефіцієнтів α_i рівняння (3.6) за формулою (3.7).

Згідно з теоремою Келі-Гамільтона рівняння (3.6) перепишемо:

$$F^n + \alpha_{n-1}F^{n-1} + \ldots + \alpha_1 F + \alpha_0 I = 0. \qquad (3.14)$$

Вводячи заміну n = N, маємо

$$F^N + \alpha_{n-1}F^{N-1} + \ldots + \alpha_1 F + \alpha_0 I = 0. \qquad (3.15)$$

Враховуючи (3.5), а також те, що $F^{N-i} \neq 0$ (і = 1, 2,..., N), з рівняння (3.15) виходить, що

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0. \qquad (3.16)$$

Тоді, враховуючи (3.7), отримуємо

$$g_i = -a_i \quad (i = 0,\ 1, \ldots,\ n-1), \qquad (3.17)$$

а величини управлінь розраховуються за формулою

$$u(k) = -\,G\ P\ x(k). \qquad (3.18)$$

Зважаючи на (3.16), характеристичне рівняння (3.6) набирає вигляду:

$$\lambda^n = 0. \qquad (3.19)$$

Наявність кратного полюсу порядку n в точці $\lambda = 0$ є ознакою системи керування з аперіодичним характером перехідних процесів.

Розрахунок динамічних характеристик замкненої системи ведеться так, як в лабораторній роботі № 1.

Порядок виконання роботи

1. Розрахувати коефіцієнти a_i ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) характеристичного рівняння матриці A (3.8) при періоді квантування T = 1.

2. Обчислити матрицю P за формулою (3.10).

3. Задати $g_i = -a_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) та розрахувати матрицю K за формулою (3.12).

4. Обчислити змінні стану x(k) замкненої системи з аперіодичним регулятором стану при k = 1, 2,....10, якщо $x(0) = [\,1\ 1\ 1\,]^T$.

5. Повторити розрахунок за пп. 1-4 при а) T = 0.2;

б) T = 2.

Оформлення результатів роботи

Побудувати графіки зміни змінних стану замкненої системи з аперіодичним регулятором стану для різних періодів квантування T.

Контрольні запитання

1. Який регулятор називається аперіодичним регулятором стану?

2. Що таке канонічна форма моделі ТОК?

3. Як перетворити модель ТОК на канонічну форму?

4. Навіщо при синтезі аперіодичного регулятора стану перетворювати модель ТОК на канонічну форму?

5. Як визначити матрицю зворотного зв'язку для аперіодичного регулятора стану?

6. За якою формулою обчислюються управління в системі з аперіодичним регулятором стану?

7. Що можна сказати про власні значення замкненої системи з аперіодичним регулятором стану?

8. Як розраховуються характеристики стану замкненої системи з аперіодичним регулятором стану?

9. Порівняйте результати даної лабораторної роботи з результатами лабораторної роботи № 1 в тій її частині, де йдеться про аперіодичні перехідні процеси в системі.

Лабораторна робота № 4

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ З РЕГУЛЯТОРОМ СТАНУ ТА СПОСТЕРІГАЧЕМ ПОВНОГО ПОРЯДКУ

Мета роботи — Ознайомитись зі структурою та принципом дії систем керування з регулятором стану та асимптотичним спостерігачем повного порядку; дослідити систему залежно від динамічних властивостей спостерігача.

Теоретичні відомості. При синтезі регуляторів стану всі змінні стану повинні бути відомі. Для цього вони мають бути або виміряні (що практично досить складно або навіть неможливо), або визначені спеціальними розрахунками. Інструментом, який реалізує такі розрахунки, маючи інформацію про входи та виходи ТОК, є спостерігач, виходом якого є оцінки змінних стану ТОК. Отже, для формування закону керування доводиться замість справжніх змінних стану $x(k)$ використовувати їх оцінки $\hat{x}(k)$, які відновлюються з допомогою спостерігача (мал. 7). Згідно з мал. 7 рівняння стану замкненої системи має вигляд

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ HC & A-BK-HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$y(k) = C\,x(k), \quad (4.2)$$

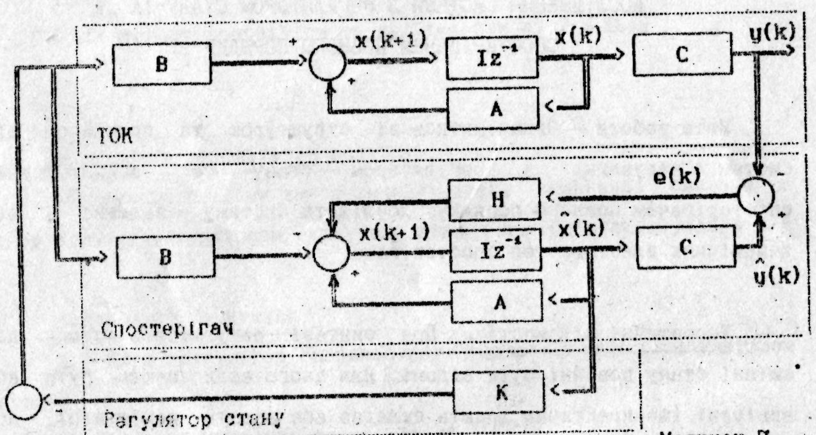
де вектори стану $x(k)$ та $\hat{x}(k)$ виявляються взаємозв'язаними.

Вільний рух спостерігача будемо характеризувати вектором $d(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1)$. Тоді

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ d(k+1) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

де

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} = P^{-1}. \quad (4.4)$$



Малюнок 7

Враховуючи (4.4), рівняння (4.1) та (4.2) перепишемо так:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ d(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$y(k) = [\,C\;0\,] \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Власний рух цієї системи визначається характеристичним рівнянням

$$\det(\lambda I - A^*) = \det(\lambda I - A + BK)\,\det(\lambda I - A + HC) = 0, \quad (4.7)$$

де

$$A^* = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-HC \end{bmatrix}.$$

Отже, повний набір полюсів системи керування з регулятором стану та спостерігачем буде складатися з полюсів замкненої системи без спостерігача та полюсів спостерігача. Таким чином, полюси системи та полюси спостерігача можуть бути визначені незалежно, оскільки вони не впливають один на одний. При цьому треба враховувати, що поведінка змінних стану $x(k)$ в часі залежить від властивостей спостерігача, що ясно видно з рівняння (4.5). Спостерігач має власну динаміку і тому вносить додаткові затримки в систему керування.

Для дослідження впливу динаміки спостерігача на якість системи керування спочатку треба розв"язати задачу синтезу спостерігача. Щодо асимптотичного спостерігача повного порядку, ця задача полягає у визначенні матриці $H = [\,h_0\;h_1\;\ldots\;h_{n-1}]^T$ зворотного зв'язку. Розрахунок цієї матриці ведеться за формулою

$$H = P^{-1}F, \quad (4.8)$$

де елементи матриці $F = [\,f_0\;f_1\;\ldots\;f_{n-1}]^T$ обчислюються так:

$$f_i = \alpha_i - a_i, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \quad (4.9)$$

а матриця P має вигляд

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ C\,A \\ C\,A^2 \\ \dots \\ C\,A^{n-2} \\ C\,A^{n-1} \end{bmatrix}. \qquad (4.10)$$

Коефіцієнти a_i $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ є коефіцієнтами характеристичного рівняння матриці A

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0. \qquad (4.11)$$

а коефіцієнти α_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ - коефіцієнтами рівняння:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n) = $$
$$= \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0. \qquad (4.12)$$

в якому полюси спостерігача λ_i $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ задаються згідно з прийнятим показником його якості. Таким показником в даній лабораторній роботі є швидкодія спостерігача та характер наближення оцінок $\hat{x}(k)$ до змінних стану $x(k)$.

Порядок виконання роботи

1. Задати елементи матриці K зворотного зв'язку системи такими, які вони були в лабораторній роботі № 1 для аперіодичного перехідного процесу в замкненій системі.

2. Задати початкові значення $x(0) = [\,1\ 1\ 1\ 1\,]^T$ та $\hat{x}(0) = [\,5\ 5\ 5\,]^T$.

3. Задати полюси спостерігача :

а) $\lambda_1 = 0.3$, $\lambda_2 = 0.2$, $\lambda_3 = 0.1$;

б) $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 0.4$, $\lambda_3 = 0.1$;

в) $\lambda_1 = 0.2 + j0.3$, $\lambda_2 = 0.2 - j0.3$, $\lambda_3 = 0.1$.

4. Визначити матрицю настройки H спостерігача для кожного варіанта п.3.

5. Розрахувати $x(k)$ та $\hat{x}(k)$ при $k = 0, 1, 2, \dots$, поки $d(k)$ не буде менше e для кожного варіанта п.3. Вектор e взяти таким, який він був у лабтаторній роботі № 2.

6. Обчислити змінні стану замкненої системи для всіх варіантів настройки спостерігача згідно з п.4.

Оформлення результатів роботи

1. Для кожної змінної стану побудувати графіки наближення $\hat{x}(k)$ до $x(k)$ відповідно до розрахунків за п.5.

2. В одній координатній системі побудувати динамічні характеристики, розраховані в п.6, а також відповідні характеристики з лабораторної роботи № 1.

Контрольні запитання

1. Дайте характеристику асимптотичного спостерігача повного порядку.

2. Чим відрізняється спостерігач повного порядку від спостерігача зниженого порядку?

3. Запишіть рівняння стану замкненої системи зі спостерігачем.

4. Чи можна визначити полюси замкненої системи керування та полюси спостерігача незалежно один від одного? Доведіть.

5. Яким чином здійснюється синтез спостерігача?

6. Що впливає на характер наближення оцінок змінних стану до їх справжніх значень і чи впливає це на динаміку системи?

7. Від чого залежить швидкодія спостерігача і чи впливає вона на динаміку системи?

8. Доведіть справедливість рівняння (4.2).

9. Доведіть справедливість рівняння (4.5).

10. Порівняйте результати даної роботи з результатами лабораторної роботи № 1.

Лабораторна робота № 5

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ З РЕГУЛЯТОРОМ СТАНУ ТА СПОСТЕРІГАЧЕМ ЗНИЖЕНОГО ПОРЯДКУ

Мета тоботи - Ознайомитись зі структурою та принципом дії системи керування з регулятором стану та спостерігачем зниженого порядку; дослідити динаміку такої системи.

Теоретичні відомості . У загальному випадку, оскільки r вихідних змінних є лінійними комбінаціями n змінних стану, необхідно відновлювати не більше n-r станів. Спостерігачі, які реалізують цю ідею, називаються спостерігачами зниженого порядку, або спостерігачами Люенбергера.

Структурна схема замкненої системи зі спостерігачем зниженого порядку показана на мал. 8.

Для ТОК з одним входом та одним виходом, який описується рівняннями

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k), \tag{5.1}$$

$$y(k) = C\,x(k), \tag{5.2}$$

застосовується такий порядок визначення оцінок $\hat{x}(k)$ змінних стану. Спочатку формуються матриці A_1 виміром $(n-1)\times(n-1)$ та E виміром $(n-1)\times 1$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -q_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -q_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -q_{n-2} \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

$$E = \begin{bmatrix} -q_{n-2}q_0 - a_0 + a_{n-1}q_0 \\ -q_{n-2}q_1 - a_1 + a_{n-1}q_1 \\ \dots \\ -q_{n-2}^2 - a_{n-2} + a_{n-1}q_{n-2} \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

У цих матрицях елементи a_i та q_i $(i = 0,\ 1,\dots,\ n-1)$ є коефіцієнтами характеристичних рівнянь матриць A та A_1 відповідно :

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0, \tag{5.5}$$

$$\det(\lambda I - A_1) = \lambda^{n-1} + q_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + q_1\lambda + q_0 = 0. \tag{5.6}$$

Якщо коефіцієнти a_i $(i = 0,\ 2,\dots,\ n-1)$ легко обчислюються за відомою матрицею A, то у визначенні коефіцієнтів q_i $(i = 0,\ 1,\dots,\ n-2)$ фактично і полягає синтез спостерігача цього типу. Для їх розрахунку треба задати власні значення λ_i $(i = 1,\ 2,\dots,\ n-1)$ матриці A_1. Тоді маємо

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_{n-1}) = \lambda^{n-1} + q_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + q_0. \tag{5.7}$$

Знаючи A_1 та E, далі розраховуються оцінки $\hat{w}_1(k)$ за формулою

$$\hat{w}_1(k+1) = A_1\hat{w}_1(k) + E\,y(k) + B_1u(k), \tag{5.8}$$

де матриця B_1 - $[(n-1)\times 1]$-вимірна матриця, яка формується так :

$$G\,B = \begin{bmatrix} B_1 \\ b \end{bmatrix}, \tag{5.9}$$

де

$$G = Q\,P. \tag{5.10}$$

Матриці Q та P виміром n×n визначаються так:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -q_0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -q_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -q_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (5.11)$$

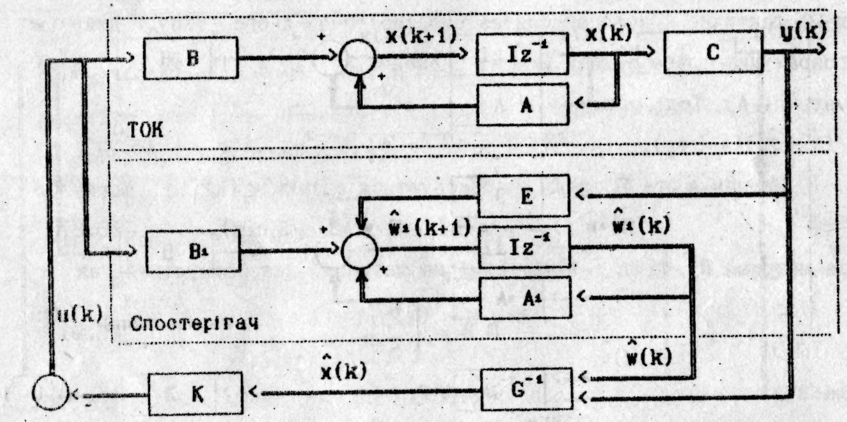
$$P = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C \\ C\,A \\ C\,A^2 \\ \dots \\ C\,A^{n-2} \\ C\,A^{n-1} \end{bmatrix}. \qquad (5.12)$$

Потім формується вектор оцінок $\hat{w}(k)$

$$\hat{w}(k) = \begin{bmatrix} \hat{w}_1(k) \\ y(k) \end{bmatrix}, \qquad (5.13)$$

на основі якого розраховується вектор оцінок $\hat{x}(k)$ справжніх змінних стану :

$$\hat{x}(k) = G^{-1}\hat{w}(k). \qquad (5.14)$$



Малюнок 8

Ефективність спостерігача зниженого порядку може визначатися рівнянням

$$d(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1). \qquad (5.15)$$

Початкове значення вектора $\hat{w}_1(0)$ визначається з вектора $\hat{w}(0)$:

$$\hat{w}(0) = G\,\hat{x}(0). \qquad (5.16)$$

Таким чином, динаміка наближення $\hat{w}_1(k)$ до $w_1(k)$, а відтак і $\hat{x}(k)$ до $x(k)$, визначається власними значеннями матриці A_1.

Для дослідження впливу динаміки спостерігача на якість замкненої системи синтезується спостерігач з різними швидкодіями та характером наближення $\hat{w}(k)$ до $w(k)$. Якість системи оцінюється за її динамічними характеристиками.

Порядок виконання роботи

1. Задати елементи матриці K зворотного зв'язку системи такими, які вони були в лабораторній роботі № 1 для аперіодичного перехідного процесу в замкненій системі.

2. Задати початкові значення $x(0) = [\,1\ 1\ 1\,]^T$ та $\hat{x}(0) = [\,5\ 5\ 5\,]^T$.

3. Задати власні значення матриці A_1:

а) $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 0.1$;

б) $\lambda_1 = 0.41$, $\lambda_2 = 0.2$;

в) $\lambda_1 = -0.6 + j0.1$, $\lambda_2 = -0.6 - j0.1$.

4. Розрахувати $x(k)$ та $\hat{x}(k)$ при $k = 0, 1, 2, \dots$ поки $d(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ не буде менше e для кожного варіанта з п.3. Вектор e взяти таким, який він був у лабораторній роботі № 2.

5. Обчислити змінні стану замкненої системи для всіх варіантів настройки спостерігача згідно з п.3.

Оформлення результатів роботи

1. Для кожної змінної стану побудувати графіки наближення $\hat{x}(k)$ до $x(k)$ відповідно до розрахунків по п.4.

2. В одній координатній системі побудувати графіки зміни

змінних стану замкненої системи, розраховані в п.5, а також відповідні характеристики з лабораторної роботи № 1.

Контрольні запитання

1. Дайте характеристику спостерігачеві зниженого порядку.

2. Чим спостерігач зниженого порядку відрізняється від спостерігача повного порядку?

3. В чому полягає синтез спостерігача зниженого порядку?

4. Який порядок обчислення оцінок змінних стану в системі зі спостерігачем зниженого порядку?

5. Що впливає на характер наближення оцінок змінних стану $\hat{x}(k)$ до їх справжніх значень $x(k)$ і чи впливає це на динаміку замкненої системи?

6. Від чого залежить швидкодія спостерігача зниженого порядку і чи впливає вона на динаміку замкненої системи?

7. Яким рівнянням характеризується ефективність спостерігача зниженого порядку? Чому?

8. Порівняйте результати даної лабораторної роботи з результатами лабораторної роботи № 1.

Література

1. Изерман Р. Цифровые системы управления. -М.: Мир, 1984.- 541с.

2. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления.- М.: Машиностроение, 1986. -448с.

3. Куропаткин П.В. Оптимальные и адаптивные системы. -М.: Высшая школа, 1980. -287с.

4. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. -М.: Наука, 1989. -304 с.

ЗМІСТ