МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З КУРСУ "КЕРУВАННЯ СКЛАДНИМИ СИСТЕМАМИ"

для студентів спеціальності 7.09.25.01
"Автоматизація технологічних процесів і виробництв"

Затверджено
на засіданні кафедри
автоматизації
хімічних виробництв

Протокол №3 від 14.12.94

Київ КПІ 1995

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з курсу "Керування складними системами" для студентів спеціальності 7.09.25.01 "Автоматизація технологічних процесів і виробництв" / Укл.: А. І. Жученко, М. В. Коржик, С. Д. Лутов. - Київ: КПІ, 1995. - 16 с.

Укладачі: А. І. Жученко
М. В. Коржик
С. Д. Лутов
Відповідальний редактор М. З. Кваско
Рецензент А. І. Кубрак

Вступ

З розвитком промисловості виникає необхідність створення систем високої точності та мінімальної складності. Такі автоматичні системи мають без участі оператора знаходити умови високоефективного ведення процесу за певних умов. У зв'язку з цим подальший розвиток автоматичних систем, пов'язаний з виявленням граничних можливостей систем і побудовою систем, найкращих (оптимальних) за будь-яким техніко-економічним показником.

Автоматичну систему, яка забезпечує найкращі технічні або техніко-економічні показники якості при заданих реальних умовах роботи та обмеженнях, називають оптимальною ситемою. Розробка найкращої системи, яка задовольняє поставлені умови, являє собою задачу синтезу оптимальної системи. Для розробки таких систем застосовують принцип оптимальності, який дозволяє забезпечити найкраще виконання цілі керування.

Застосування принципу оптимальності в техніці дозволяє здійснити оптимальне керування різними технічними пристроями, тобто для заданого об'єкта керування та умов його роботи забезпечити найкращі показники якості, які характеризують режим його роботи. Оптимальне керування широко застосовується для автоматизації технологічних процесів або складних технічних пристроїв. При цьому розглядається задача оптимізації режимів з урахуванням обмежень, які визначаються умовами роботи об'єкта керування для детермінованих і випадкових сигналів як при незмінних параметрах, так і при параметрах і характеристиках об'єкта керування, які змінюються, та сигналів зовнішніх збурень.

Об'єктом дослідження в даних роботах є одновимірна система, динаміка якої описується такими рівняннями:

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k), \qquad (B.1)$$

$$y(k) = C\,x(k), \qquad (B.2)$$

де $x(k) = [x_1(k) \;\; x_2(k)]^T$ - вектор змінних стану; $u(k)$, $y(k)$ - відповідно вхід та вихід ситеми; $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$ - перехідна матриця стану; $B = [\,0 \;\; 1\,]^T$ - матриця управлінь; $C = [\,0 \;\; 1\,]$ - матриця виходу. Варіанти завдань наведені в табл. 1.

Таблиця 1

№ варіанта	a	b	№ варіанта	a	b	№ варіанта	a	b
1	-0.09	-0.8	11	-0.08	0.9	21	-0.24	-1.0
2	0.16	-0.6	12	-0.14	0.9	22	-0.08	-0.9
3	0.21	-0.4	13	-0.18	0.9	23	-0.32	-1.2
4	0.24	-0.2	14	-0.2	0.9	24	-0.28	-1.1
5	0.15	0.2	15	-0.16	1.0	25	-0.18	-1.1
6	0.24	0.2	16	-0.24	1.1	26	-0.27	-1.2
7	0.21	0.4	17	-0.35	1.2	27	-0.36	-1.3
8	0.16	0.6	18	-0.09	-1.0	28	-0.48	-1.4
9	0.09	0.8	19	-0.16	-1.0	29	-0.07	-0.8
10	-0.72	1.7	20	-0.21	-1.0	30	-0.56	-1.5

При динамічній оптимізації систем часто застосовується критерій оптимальності вигляду:

$$I = \sum_{k=0}^{N} [x^T(k)\ Q\ x(k) + u^T(k)\ R\ u(k)], \qquad (B.3)$$

де матриці Q та R додатно визначені та симетричні.

Для одновимірного об'єкта 2-го порядку, який досліджується в даних лабораторних роботах, задано $R = r$, $Q = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$, тобто критерій оптимальності (В.3) буде:

$$I = \sum_{k=0}^{N} [q(x_1^2(k) + x_2^2(k)) + ru^2(k)]. \qquad (B.3)$$

Задача синтезу системи полягає в побудові регулятора, який формує такий вектор управлінь $u(k)$ з вектора змінних стану $x(k)$, що переводить систему в кінцевий стан $x(N) = 0$ та мінімізує квадратичний критерій якості (В.3).

Лабораторна робота № 1

РЕКУРЕНТНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ РІКАТТІ

Мета роботи. Вивчити рекурентний метод розв'язку рівняння Рікатті, набути практичних навичок в його використовуванні та дослідити вплив параметрів критерію оптимальності на коефіцієнт Рікатті.

Теоретичні відомості. При синтезі оптимальних систем за критерієм

$$I = x^T(N)Sx(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)]; \qquad (1.1)$$

з лінійним стаціонарним об'єктом з рівнянням стану

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k); \qquad (1.2)$$

матриця $K(j)$ коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку визначається за формулою

$$K(j) = [R + B^TP(j + 1)B]^{-1}B^TP(j + 1)A. \qquad (1.3)$$

При цьому оптимальне управління обчислюється так:

$$u_o(j) = -K(j)x_o(j). \qquad (1.4)$$

Коефіцієнт Рікатті $P(j)$ розраховується згідно з рівнянням

$$P(j) = Q + A^TP(j + 1)[I - B(R + B^TP(j + 1)B)^{-1}B^TP(j + 1)]A. \qquad (1.5)$$

З урахуванням (1.3) маємо:

$$P(j) = Q + A^TP(j + 1)[A - BK(j)]^{-1}. \qquad (1.6)$$

Рівняння (1.3) та (1.6) рекурентно розв'язуються в зворотному напрямку, починаючи з граничної умови $P(N) = S$.

Порядок виконання роботи

1. Задати $S = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $q = 1$, $r = 1$, $N = 10$.
2. Розрахувати $K(j)$ за формулою (1.3) для $j = N-1, N-2, \ldots, 0$.
3. Обчислити $P(j)$ ($j = N - 1, N - 2, \ldots, 0$) згідно з виразом (1.6).

2-5-1618

4. Внести зміни в параметри критерію оптимальності (1.1):

а) $q = 1$; $r = 10$;

б) $q = 10$; $r = 1$.

і повторити розрахунки згідно з пп. 2, 3.

Оформлення результатів роботи

1. Привести фактичні дані виконаних розрахунків.

2. Для всіх варіантів розрахунків побудувати графіки зміни: а) коефіцієнтів Рікатті; б) елементів матриці зворотного зв'язку.

Контрольні запитання

1. Запишіть рівняння Рікатті і поясніть його використання.
2. В чому полягає рекурентний метод розв'язку рівняння Рікатті?
3. Що таке коефіцієнт Рікатті і як він обчислюється?
4. Як визначається оптимальне управління?
5. Проаналізуйте результати роботи при різних варіантах початкових даних.

Лабораторна робота № 2

МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ РІКАТТІ ЗА ДОПОМОГОЮ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ

Мета роботи. Вивчити метод розв'зку рівняння Рікатті за допомогою власних значень та власних векторів, набути практичних навичок в його використанні та дослідити вплив параметрів критерію оптимальності на коефіцієнт Рікатті.

Теоретичні відомості. При синтезі системи керування лінійного стаціонарного об'єкта з рівнянням стану

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k); \qquad (2.1)$$

за критерієм

$$I = x^T(N)Sx(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)]; \qquad (2.2)$$

згідно з принципом мінімуму канонічні рівняння стану записуються у вигляді:

$$x(k + 1) = Ax(k) - BR^{-1}B^T\psi(k + 1); \qquad (2.3)$$

$$\psi(k) = Qx(k) + A^T\psi(k + 1). \qquad (2.4)$$

Визначаючи x(k) з рівняння (2.3) та записуючи канонічні рівняння стану у векторно-матричній формі, дістанемо:

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \psi(k) \end{bmatrix} = V\begin{bmatrix} x(k + 1) \\ \psi(k + 1) \end{bmatrix}, \qquad (2.5)$$

де

$$V = \begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}BR^{-1}B^T \\ QA^{-1} & A^T + QA^{-1}BR^{-1}B^T \end{bmatrix}. \qquad (2.6)$$

Рівняння (2.5) являє собою 2n різницевих рівнянь у зворотному часі з граничними умовами $x(0) = x_0$ та $\psi(N) = Sx(N)$.

Важлива властивість матриці V полягає в тому, що величини, зворотні кожному власному значенню, також є власними значеннями, причому n власних значень V розташовані в середині одиничного кола і n - поза ним.

Коефіцієнт Рікатті визначається:

$$P(N - k) = [W_{21} - W_{22}H(k)][W_{11} + W_{12}H(k)]^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \qquad (2.7)$$

В цьому виразі

$$H(k) = \Lambda^{-k}F\Lambda^{-k}, \qquad (2.8)$$

де

$$F = -(W_{22}-SW_{12})^{-1}(W_{21} - SW_{11}). \qquad (2.9)$$

Матриці W_{11}, W_{12}, W_{21}, W_{22} складають матрицю W :

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}, \qquad (2.10)$$

яка має таку властивість:

$$W^{-1}VW = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{bmatrix}. \qquad (2.11)$$

При різних власних значеннях матриця Λ має вигляд діагональної матриці з елементами λ_i (i = 1, 2,..., n) по головній діагона-

2*

лі, де λ_i - власні значення матриці V, розташовані поза одиничним колом:

$$W^{-1}VW = \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\lambda_2 \end{array}\right]. \qquad (2.12)$$

Якщо матриця V має комплексно-спряжені власні значення $\sigma_1+j\omega_1$ та $\sigma_1-j\omega_1$, розташовані поза одиничним колом, тоді матриця Λ подається в модальній формі, тобто

$$W^{-1}VW = \left[\begin{array}{cc|cc} \sigma_1 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sigma_2 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_2 & \sigma_2 \end{array}\right]. \qquad (2.13)$$

де $\sigma_2 - j\omega_2 = \dfrac{1}{\sigma_1 + j\omega_1}$. Якщо матриця V має і дійсні, і комплексні власні значення, треба використовувати комбінацію співвідношень (2.12) та (2.13). З цих співвідношень можна визначити матрицю W, яку потім розкласти на підматриці W_{11}, W_{12}, W_{21}, W_{22}, які необхідні для обчислення коефіцієнта Рікатті.

Однак можна скористатися й іншим методом, враховуючи те, що перетворення $W^{-1}VW$ є перетворенням подібності, а отже, матрицю W можна скласти з власних векторів матриці V.

Вводячи зміну змінних $j = N - k$ ($k = 1, 2, \ldots, N$), можна вести розрахунок $P(j)$ ($j = N - 1, N - 2, \ldots, 0$) так, як і в попередній лабораторній роботі.

Порядок виконання роботи

1. Задати $S = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $q = 1$, $r = 1$, $N = 10$.
2. Сформувати матрицю V за формулою (2.6).
3. Визначити власні значення та власні вектори матриці V.
4. Сформувати матрицю W з власних векторів матриці V.
5. За допомогою виразів (2.7) - (2.9) розрахувати коефіцієнти Рікатті.
6. Внести зміни в параметри критерію оптимальності (2.2):

а) $q = 1$, $r = 10$;
б) $q = 10$, $r = 1$

і повторити розрахунки згідно з пп. 2 – 5.

Оформлення результатів роботи

1. Привести фактичні дані виконаних розрахунків.
2. Для всіх варіантів розрахунків побудувати графіки зміни коефіцієнтів Рікатті.

Контрольні запитання

1. Що називається власним значенням та власним вектором матриці?
2. Виведіть рівняння (2.3) та (2.4).
3. Доведіть справедливість виразу (2.6).
4. Яка основна властивість матриці V?
5. Які способи визначення матриці W Ви знаєте?
6. Порівняйте результати даної і попередньої лабораторних робоіт.
7. Викладіть послідовність обчислення коефіцієнтів Рікатті.

Лабораторна робота № 3

ДОСЛІДЖЕННЯ ЛК-РЕГУЛЯТОРА

Мета роботи. Вивчити теоретичні основи синтезу ЛК-регуляторів та дослідити вплив параметрів критерію оптимальності на оптимальне управління та оптимальні системи з ЛК-регулятором.

Теоретичні дані. Якщо вирішується задача керування лінійним стаціонарним об'єктом з рівняння стану

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); \qquad (3.1)$$

по критерію оптимальності

$$I = x^T(N)Sx(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)], \qquad (3.2)$$

то визначене в регуляторі управління називається ЛК-управлінням, а регулятор, який формує таке управління – <u>лінійним квадратичним регуляторм (ЛК-регулятором).</u>

Матриці, які входять в критерій (3.2), мають такі властивості : S і Q – позитивно навпіввизначені та симетричні, R – позитивно визначена та симетрична, так, що виповнюються умови $x^T Sx \geq 0$, $x^T Rx > 0$.

Структурна схема системи з ЛК-регулятором подана на рис. 1. Як видно з рисунка, ЛК-регулятор формує пропорційний нега-тивний зворотний зв'язок по стану на виході об'єкта за допомогою матриці коефіцієнтів передачі K(N – j), що змінюються. Ці коефіцієнти і є параметрами ЛК-регулятора, які визначаються з рекурентного рівняння

$$K(N - j) = [R + B^T P(N - j + 1)B]^{-1} B^T P(N - j + 1)]A, \quad j = 1, 2, \ldots, N; \qquad (3.3)$$

де P(N – j) є розв'язком рівняння Рікатті

$$K(N - j) = Q + A^T P(N - j + 1)[I - B(R + B^T P(N - j + 1)B]^{-1} \times$$
$$\times B^T P(N - j + 1)]A, \quad j = 1, 2, \ldots, N \qquad (3.4)$$

з початковою матрицею P(N) = S.

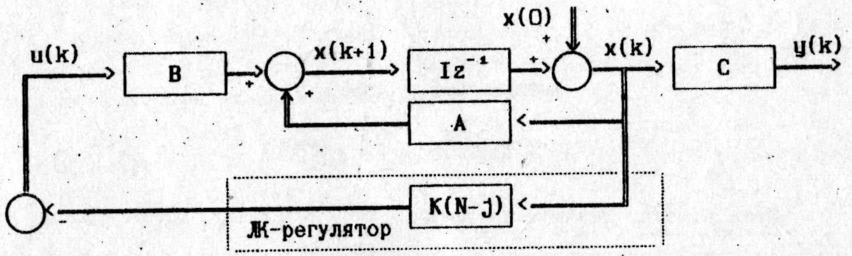

Рис. 1

Оптимальне управління розраховується за формулою:

$$u_o(N - j) = -K(N - j)x(N - j). \qquad (3.5)$$

З урахуванням (3.3) можна спростити обчислення P(N – j):

$$P(N - j) = Q + A^T P(N - j + 1)[A - BK(N - j)]^{-1}. \qquad (3.6)$$

Зазначимо, що якщо критерієм оптимальності є (В.3), то S = Q.

Тоді P(N) = Q.

<u>Порядок виконання роботи</u>

1. Задати $S = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $x(0) = [\,1\ 1\,]^T$, q = 1, r = 1, N=10.
2. Розрахувати K(N – j) за формулою (3.3) для j = 1,2,...,N.
3. Обчислити P(N – j) (j = 1, 2,..., N) згідно з виразом (3.6).
4. Визначити оптимальне управління u(k) (k = 0, 1,..., N – 1) з рівняння (3.5).
5. Знайти змінні стану з рівняння стану (3.1).
6. Обчислити критерій оптимальності (3.2).
7. Внести зміни в параметри критерію оптимальності:
   а) q = 1; r = 10,
   б) q = 10; r = 1

і повторити розрахунки по пп. 2 – 6.

8. Задати N = 5 і повторити обчислення згідно з пп. 2 – 7.

<u>Оформлення результатів роботи</u>

1. Навести фактичні дані виконаних розрахунків.
2. Для всіх варіантів розрахунків побудувати графіки зміни:
   а) оптимального управління;
   б) змінних стану.

<u>Контрольні запитання</u>

1. Сформулюйте задачу оптимального керування, яка вирішується за допомогою ЛК-регуляторів.
2. Що являє собою ЛК-регулятор?
3. Які обмеження накладаються на матриці S, Q та R і чому?
4. Як визначаються параметри ЛК-регулятора?
5. Яка послідовність дій при розрахунку оптимального ЛК-управління?
6. Проаналізуйте вплив параметрів критерію оптимальності на ЛК-управління за результатами виконаної роботи.
7. Порівняйте значення критеріїв оптимальності при N = 5 та N = 10. Чим Ви пояснюєте різницю між ними?

8. Запишіть рівняння Рікатті. Що воно визначає?

Лабораторна робота № 4

ДОСЛІДЖЕННЯ ЛКГ-РЕГУЛЯТОРА

Мета роботи. Вивчити теоретичні основи синтезу ЛКГ-регуляторів та дослідити вплив характеристик шуму на оптимальне управління та змінні стану системи з ЛКГ-регулятором.

Теоретичні відомості. Розглянемо стохастичний об'єкт керування, модель якого має випадкову складову, яка описується векторним сигналом $\upsilon(k)$:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + F\upsilon(k). \tag{4.1}$$

Шум $\upsilon(k)$ розподілений за нормальним законом з математичним сподіванням:

$$E\{\upsilon(k)\} = 0 \tag{4.2}$$

та коваріаційною матрицею

$$\mathrm{cov}[\upsilon(k),\ \tau = i - j] = E\{\upsilon(i)\upsilon^T(j)\} = V_o\delta_{ij}, \tag{4.3}$$

де δ_{ij} – функція Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j; \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases} \tag{4.4}$$

Отже, $\upsilon(k)$ – білий шум.

Крім того, будемо вважати, що сигнал шуму $\upsilon(k)$ не залежить від вектора стану $x(k)$, а початковий стан $x(0)$ також випадковий і розподілений за нормальним законом зі статистиками:

$$\begin{gathered} E\{x(0)\} = 0; \\ \mathrm{cov}[x(0)] = E\{x(0)x^T(0)\} \end{gathered} \tag{4.5}$$

Матриці коваріація V_o та X_o позитивно напіввизначені.

Задачею синтезу оптимальної ситеми є побудова регулятора, який виробляє послідовність вхідних сигналів $u(k)$, яка формується на основі векторів стану $x(k)$. Ця послідовність сигналів повинна забезпечувати досягнення кінцевого стану $x(N) = 0$, мінімізуючи однозначно квадратичні критерії оптимальності

$$E\{I\} = E\{x^T(N)Sx(N) + \sum_{k=0}^{N-1}[x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)]\}. \tag{4.6}$$

Регулятор, який формує таку послідовність оптимальних сигналів управління, називається лінійним квадратичним гаусовим (ЛКГ-регулятором).

Вважається, що матриці S, Q та R відповідають тим же вимогам, що й ЛК-регулятор.

В літературі доводиться, що формули, які застосовувались для ЛК-регулятора, повністю справедливі і для ЛКГ-регулятора.

Порядок виконання роботи

1. Задати $S = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $V_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x(0) = [\,5\ 5\,]^T$, $q = 1$, $r = 1$, $N = 10$.
2. Розрахувати $K(N - j)$ за формулою (3.3) для $j = 1, 2, \ldots, N$.
3. Обчислити $P(N - j)$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ згідно з виразом (3.6).
4. Визначити оптимальне управління $u(k)$ $(k = 0, 1, \ldots, N - 1)$ з рівняння (3.5).
5. Знайти змінні стану з рівняння стану (4.1).
6. Обчислити критерій оптимальності (3.2).
7. Задати $V_o = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ і повторити розрахунки згідно з пп. 2 - 6.
8. Задати $N = 5$ і повторити обчислення згідно з пп. 2 - 7.

Оформлення результатів роботи

1. Подати фактичні дані виконаних розрахунків.
2. Для всіх варіантів розрахунків побудувати графіки зміни:
   а) оптимального управління;
   б) змінних стану.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачу оптимального керування, яка вирішується за допомогою ЛКГ-регулятора.
2. Що являє собою ЛКГ-регулятор?
3. Які обмеження накладаються на матриці S, Q та R і чому?
4. Як визначаються параметри ЛКГ-регулятора?
5. Яка послідовність дії при розрахунку оптимального ЛКГ-управління?
6. Що таке коваріаційна матриця і що вона характеризує?
7. Що таке сигнал "білий шум"?
8. Проаналізуйте вплив характеристик шуму на ЛКГ-управління за результатами виконаної роботи.
9. Запишіть рівняння Рікатті. Що воно характеризує?
10. Порівняйте результати даної роботи з відповідними результатами попередньої.

~~Кова~~ 6. Матриця - складена з попарних коваріацій одного випадкового вектора коваріацій. - ~~[illegible]~~ випад. век. X = [illegible]

7. Постійний шум, спектральні складові якого рівномірно розподілені по всьому діапазону частот.

Список рекомендованої літератури

1. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автоматического управления. - М.: Наука, 1981. - 336 с.
2. Изерман Р. Цифровые ситемы управления. - М.: Мир, 1984. - 541 с.
3. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. - М.: Машиностроение, 1986. - 448 с.
4. Куропаткин П.В. Оптимальные и адаптивные системы. - М.: Высшая школа, 1980. - 287 с.
5. Ципкин Я.З. Основы теории автоматических ситем. - М.: Наука, 1977. - 560 с.

Зміст

		Стор.
Вступ		3
Лабораторна робота № 1.	РЕКУРЕНТНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ РІКАТТІ	5
Лабораторна робота № 2.	МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ РІКАТТІ ЗА ДОПОМОГОЮ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ	6
Лабораторна робота № 3.	ДОСЛІДЖЕННЯ ЛК-РЕГУЛЯТОРА	10
Лабораторна робота № 4.	ДОСЛІДЖЕННЯ ЛКГ-РЕГУЛЯТОРА	12
Список рекомендованої літератури		15