МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

СУЧАСНА ТЕОРІЯ УПРАВЛІННЯ

КЕРУВАННЯ СКЛАДНИМИ ДЕТЕРМІНОВАНИМИ СИСТЕМАМИ

ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів, які навчаються
за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,
освітньою програмою «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології хімічних виробництв»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Сучасна теорія управління. Керування складними детермінованими системами: Лабораторний практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: А. І. Жученко, М. В. Коржик, А. О. Данькевич, В. І. Бородін. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,28 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 43 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 25.04.2019 р.) за поданням Вченої ради Інженерно-хімічного факультету (протокол № 2 від 25.02.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

СУЧАСНА ТЕОРІЯ УПРАВЛІННЯ
КЕРУВАННЯ СКЛАДНИМИ ДЕТЕРМІНОВАНИМИ СИСТЕМАМИ

ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Укладачі *Жученко Анатолій Іванович,* доктор технічних наук, професор
Коржик Михайло Володимирович, канд. техн. наук, доцент
Данькевич Андрій Олександрович, асистент
Бородін Валерій Іванович, асистент

Відповідальний редактор *Жученко А. І.*, завідувач кафедри «Автоматизація хімічних виробництв», доктор технічних наук, професор

Рецензент *Шилович Тетяна Борисівна* , к.т.н., доцент кафедри «Хімічного, полімерного і силікатного машинобудування» інженерно-хімічного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського

Запропонований навчальний посібник містить матеріал для проведення лабораторного практикуму з сучасної теорії управління в задачах керування технологічними об’єктами. Розглянуто особливості представлення математичних моделей динамічних об’єктів у просторі станів. Наведені методи синтезу систем керування з регуляторами стану в умовах дії детермінованих та випадкових збурень та досліджена якість даних систем при різних параметрах налаштування. Також розглянуті особливості синтезу систем керування із спостерігачами різного типу.

Призначений для студентів спеціальності «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології» усіх форм навчання.

Перша частина

Вступ до першої частини

У сучасних умовах виробництва виникає необхідність створення систем високої точності та мінімальної складності. Такі автоматичні системи мають без участі оператора знаходити умови високоефективного ведення процесу за певних умов виробництва. У зв'язку з цим постає задача створення автоматичних систем, пов'язаних з побудовою оптимальних систем за певним техніко-економічним показником.

Автоматичну систему, яка забезпечує найкращі технічні або техніко-економічні показники якості при заданих реальних умовах роботи та обмеженнях, називають оптимальною системою. Розроблення системи, яка задовольняє поставлені умови, являє собою задачу синтезу оптимальної системи. Для побудови таких систем застосовують принцип оптимальності, який дозволяє забезпечити виконання оптимальної мети керування.

Застосування принципу оптимальності в техніці дозволяє здійснити оптимальне керування різними технічними пристроями, тобто для заданого об'єкта керування та умов його роботи забезпечити найкращі показники якості, які характеризують режим його роботи при усіх можливих обмеженнях, що накладаються на систему. Оптимальне керування широко застосовується для автоматизації технологічних процесів або складних технічних пристроїв. При цьому розглядається задача оптимізації режимів з урахуванням обмежень, які визначаються умовами роботи об'єкта керування для детермінованих і випадкових сигналів як при незмінних параметрах, так і при параметрах і характеристиках об'єкта керування, які змінюються, та сигналів зовнішніх збурень.

Об'єктом дослідження в лабораторних роботах 1-4 є одновимірна система, динаміка якої описується рівняннями:

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}\cdot u(k); \tag{B.1}$$

$$y(t)=\mathbf{C}\cdot\mathbf{x}(t), \tag{B.2}$$

де $\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \quad x_2(k)]^T$ – вектор змінних стану; $u(k)$, $y(k)$ – відповідно вхід та вихід системи; $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$ – перехідна матриця стану; $\mathbf{B} = [0 \quad 1]^T$ – матриця керувань; $\mathbf{C} = [0 \quad 1]$ – матриця виходу. Варіанти завдань до робіт 1 – 4 наведені в табл. 1.

Таблиця 1

№ варіанта	*a*	*b*	№ варіанта	*a*	*b*	№ варіанта	*a*	*b*
1	–0.09	–0.8	11	–0.08	0.9	21	–0.24	–1.0
2	0.16	–0.6	12	–0.14	0.9	22	–0.08	–0.9
3	0.21	–0.4	13	–0.18	0.9	23	–0.32	–1.2
4	0.24	–0.2	14	–0.2	0.9	24	–0.28	–1.1
5	0.15	0.2	15	–0.16	1.0	25	–0.18	–1.1
6	0.24	0.2	16	–0.24	1.1	26	–0.27	–1.2
7	0.21	0.4	17	–0.35	1.2	27	–0.36	–1.3
8	0.16	0.6	18	–0.09	–1.0	28	–0.48	–1.4
9	0.09	0.8	19	–0.16	–1.0	29	–0.07	–0.8
10	–0.72	1.7	20	–0.21	–1.0	30	–0.56	–1.5

При динамічній оптимізації систем часто застосовується критерій оптимальності вигляду:

$$I=\sum_{k=0}^{N}[\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k)+\mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)], \qquad \text{(В.3)}$$

де матриці **Q** та **R** додатньо визначені та симетричні.

Для одновимірного об’єкта 2-го порядку, який досліджується в даних лабораторних роботах, задано $\mathbf{R} = r$, $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$, тобто критерій оптимальності (В.3) буде:

$$I=\sum_{k=0}^{N}\left[q\left(x_1^2(k)+x_2^2(k)\right)+ru^2(k)\right] \qquad \text{(В.4)}$$

Задача синтезу системи полягає у побудові регулятора, який формує такий вектор керувань $\mathbf{u}(k)$ з вектора змінних стану $\mathbf{x}(k)$, що переводить систему в кінцевий стан $\mathbf{x}(N) = 0$ та мінімізує квадратичний критерій якості (В.3).

Лабораторна робота № 1

РЕКУРЕНТНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ РІККАТІ

Мета роботи. Вивчити рекурентний метод розв'язку рівняння Ріккаті, набути практичних вмінь у його використанні та дослідити вплив параметрів критерію оптимальності на коефіцієнт Ріккаті.

Теоретичні відомості. При синтезі оптимальних систем за критерієм

$$I = \mathbf{x}^T(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \sum_{k=0}^{N-1}\left[\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)\right] \quad (1.1)$$

з лінійним стаціонарним об'єктом з рівнянням стану

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\cdot u(k), \quad (1.2)$$

матриця $\mathbf{K}(j)$ коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку визначається за формулою

$$\mathbf{K}(j) = \left[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}(j+1)\mathbf{B}\right]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(j+1)\mathbf{A}. \quad (1.3)$$

При цьому оптимальне керування обчислюється так:

$$u_0(j) = -\mathbf{K}(j)x_0(j). \quad (1.4)$$

Коефіцієнт Ріккаті $\mathbf{P}(j)$ розраховується згідно з рівнянням

$$\mathbf{P}(j) = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}(j+1)[\mathbf{I} - \mathbf{B}\left(\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}(j+1)\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(j+1)]\mathbf{A}. \quad (1.5)$$

З урахуванням (1.3) маємо:

$$\mathbf{P}(j) = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}(j+1)\left[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}(j)\right]^{-1}. \quad (1.6)$$

Рівняння (1.3) та (1.6) рекурентно розв'язуються у зворотному напрямку, починаючи з граничної умови $\mathbf{P}(N) = \mathbf{S}$.

Порядок виконання роботи

1. Задати $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $q = 1$, $r = 1$, $N = 10$.

2. Розрахувати $\mathbf{K}(j)$ за формулою (1.3) для $j = N-1, N-2, \ldots, 0$.

3. Обчислити $\mathbf{P}(j)$ ($j = N-1, N-2, \ldots, 0$) згідно з виразом (1.6).

4. Внести зміни в параметри критерію оптимальності (1.1):

а) q = 1, r = 10;

б) q = 10, r = 1,

і повторити розрахунки згідно з пп. 2, 3.

Оформлення результатів роботи

1. Навести фактичні дані виконаних розрахунків.
2. Для всіх варіантів розрахунків побудувати графіки зміни:

а) коефіцієнтів Ріккаті; б) елементів матриці зворотного зв'язку.

Контрольні запитання

1. Запишіть рівняння Ріккаті і поясніть його використання.
2. В чому полягає рекурентний метод розв'язку рівняння Ріккаті?
3. Що таке коефіцієнт Ріккаті і як він обчислюється?
4. Як визначається оптимальне керування?
5. Проаналізуйте результати роботи при різних варіантах початкових даних.

Лабораторна робота № 2

МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ РІККАТІ ЗА ДОПОМОГОЮ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ

Мета роботи. Вивчити метод розв'язку рівняння Ріккаті за допомогою власних значень та власних векторів, набути практичних вмінь у його використанні та дослідити вплив параметрів критерію оптимальності на коефіцієнт Ріккаті.

Теоретичні відомості. При синтезі системи керування лінійного стаціонарного об'єкта з рівнянням стану

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\cdot u(k), \tag{2.1}$$

за критерієм

$$I = \mathbf{x}^T(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \sum_{k=0}^{N-1}\left[\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)\right], \tag{2.2}$$

згідно з принципом мінімуму канонічні рівняння стану записуються у вигляді:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\psi}(k+1); \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\psi}(k) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\psi}(k+1) \tag{2.4}$$

Визначаючи $\mathbf{x}(k)$ з рівняння (2.3) та записуючи канонічні рівняння стану у векторно-матричній формі, дістанемо:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ \boldsymbol{\psi}(k)\end{bmatrix} = \mathbf{V}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k+1)\\ \boldsymbol{\psi}(k+1)\end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

де

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\\ \mathbf{Q}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Рівняння (2.5) являє собою $2n$ різницевих рівнянь у зворотному часі з граничними умовами $\mathbf{x}(0) = x_0$ та $\boldsymbol{\psi}(N) = \mathbf{S}\mathbf{x}(N)$.

Важлива властивість матриці $\mathbf{V}$ полягає в тому, що величини, зворотні кожному власному значенню, також є власними значеннями, причому n власних значень $\mathbf{V}$ розташовані в середині одиничного кола і n – поза ним.

Коефіцієнт Ріккаті визначається:

$$\mathbf{P}(N-k) = \left[\mathbf{W}_{21} - \mathbf{W}_{22}\mathbf{H}(k)\right]\left[\mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{12}\mathbf{H}(k)\right]^{-1}, \tag{2.7}$$

при $k = 1, 2, \ldots, N$.

У цьому виразі

$$\mathbf{H}(k) = \mathbf{\Lambda}^{-k}\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}^{-k} , \tag{2.8}$$

де

$$\mathbf{F} = -\left(\mathbf{W}_{22} - \mathbf{S}\mathbf{W}_{12}\right)^{-1}\left(\mathbf{W}_{21} - \mathbf{S}\mathbf{W}_{11}\right) . \tag{2.9}$$

Матриці $\mathbf{W}_{11}$, $\mathbf{W}_{12}$, $\mathbf{W}_{21}$, $\mathbf{W}_{22}$ складають матрицю $\mathbf{W}$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W_{11}} & \mathbf{W_{12}} \\ \mathbf{W_{21}} & \mathbf{W_{22}} \end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

яка має таку властивість

$$\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

При різних власних значеннях матриця $\mathbf{\Lambda}$ має вигляд діагональної матриці з елементами λ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) по головній діагоналі, де λ_i – власні значення матриці V, розташовані поза одиничним колом:

$$\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{W} = \left[\begin{array}{cc:cc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\lambda_2 \end{array}\right]. \tag{2.12}$$

Якщо матриця $\mathbf{V}$ має комплексно-спряжені власні значення $\sigma_1 + j\omega_1$ та $\sigma_1 - j\omega_1$, розташовані поза одиничним колом, тоді матриця $\mathbf{\Lambda}$ подається в модальній формі, тобто

$$\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{W} = \left[\begin{array}{cc:cc} \sigma_1 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \sigma_2 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_2 & \sigma_2 \end{array}\right], \tag{2.13}$$

де $\sigma_2 - j\omega_2 = \dfrac{1}{\sigma_1 + j\omega_1}$. Якщо матриця $\mathbf{V}$ має і дійсні і комплексні власні значення, треба використовувати комбінацію співвідношень (2.12) та (2.13). з цих співвідношень можна визначити матрицю $\mathbf{W}$, яку потім розкласти на підматриці $\mathbf{W}_{11}$, $\mathbf{W}_{12}$, $\mathbf{W}_{21}$, $\mathbf{W}_{22}$, які необхідні для обчислення коефіцієнтів Ріккаті.

Однак можна скористатися й іншим методом, враховуючи те, що перетворення $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{W}$ є перетворенням подібності, а отже, матрицю $\mathbf{W}$ можна скласти з власних векторів матриці $\mathbf{V}$.

Вводячи заміну змінних $j = N - k$ ($k = 1, 2, \ldots, N$), можна ввести розрахунок $\mathbf{P}(j)$ ($j = N - 1, N - 2, \ldots, 0$) так, як і в попередній лабораторній роботі.

Порядок виконання роботи

1. Задати $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $q = 1$, $r = 1$, $N = 10$.
2. Сформувати матрицю $\mathbf{V}$ за формулою (2.6).
3. Визначити власні значення та власні вектори матриці $\mathbf{V}$.
4. Сформувати матрицю $\mathbf{W}$ з власних векторів матриці $\mathbf{V}$.
5. За допомогою виразів (2.7) – (2.9) розрахувати коефіцієнти Ріккаті.
6. Внести зміни в параметри критерію оптимальності (2.2):

   а) $q = 1$, $r = 10$;

   б) $q = 10$, $r = 1$,

і повторити розрахунки згідно з пп. 2 – 5.

Оформлення результатів роботи

1. Навести фактичні дані виконаних розрахунків.
2. Для всіх варіантів розрахунків побудувати графіки зміни коефіцієнтів Ріккаті.

Контрольні запитання

1. Що називається власним значенням та власним вектором матриці?
2. Виведіть рівняння (2.3) та (2.4).
3. Доведіть справедливість виразу (2.6).
4. Яка основна властивість матриці $\mathbf{V}$?

5. Які способи визначення матриці **W** Ви знаєте?

6. Порівняйте результати даної і попередньої лабораторних робіт.

7. Викладіть послідовність обчислення коефіцієнтів Ріккаті.

Лабораторна робота № 3

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ З ЛК-РЕГУЛЯТОРОМ

Мета роботи. Вивчити теоретичні основи синтезу ЛК-регуляторів та дослідити вплив параметрів критерію оптимальності на оптимальне керування та оптимальні системи з ЛК-регулятором.

Теоретичні відомості. Якщо вирішується задача керування лінійним стаціонарним об'єктом з рівняння стану

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \qquad (3.1)$$

по критерію оптимальності

$$I = \mathbf{x}^T(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \sum_{k=0}^{N-1}\left[\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)\right], \qquad (3.2)$$

то визначене в регуляторі керування називається ЛК-керуванням, а регулятор, який формує таке керування – лінійним квадратичним регулятором (ЛК-регулятором).

Матриці, які входять в критерій (3.2), мають такі властивості: **S** і **Q** – додатньо напіввизначені та симетричні, **R** – додатньо визначена та симетрична, так, що виконуються умови $\mathbf{x}^T\mathbf{S}\mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{x} > 0$.

Структурна схема системи з ЛК-регулятором подана на рис.1. Як видно з рисунка, ЛК-регулятор формує пропорційний від'ємний зворотний зв'язок за станом на виході об'єкта за допомогою матриці коефіцієнтів передачі $\mathbf{K}(N-j)$, що змінюються. Ці коефіцієнти і є параметрами ЛК-регулятора, які визначаються з рекурентного рівняння

$$\mathbf{K}(N-j) = [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}(N-j+1)\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(N-j+1)]\mathbf{A}\ , \qquad (3.3)$$

$j = 1, 2, \ldots, N$,

де $\mathbf{P}(N-j)$ є розв'язком рівняння Ріккаті.

$$\mathbf{K}(N-j) = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}(N-j+1)[I - \mathbf{B}(\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}(N-j+1)\big]\mathbf{B}\big]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(N-j+1)]\mathbf{A} \qquad (3.4)$$

$j = 1, 2, \ldots, N$,

з початковою матрицею $\mathbf{P}(N) = S$.

Оптимальне керування розраховується за формулою:

$$u_0(N-j) = -\mathbf{K}(N-j)\mathbf{x}(N-j). \tag{3.5}$$

З урахуванням (3.3) можна спростити обчислення $P(N-j)$:

$$\mathbf{P}(N-j) = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}(N-j+1)\left[\mathbf{A} - \mathbf{BK}(N-j)\right]^{-1}. \tag{3.6}$$

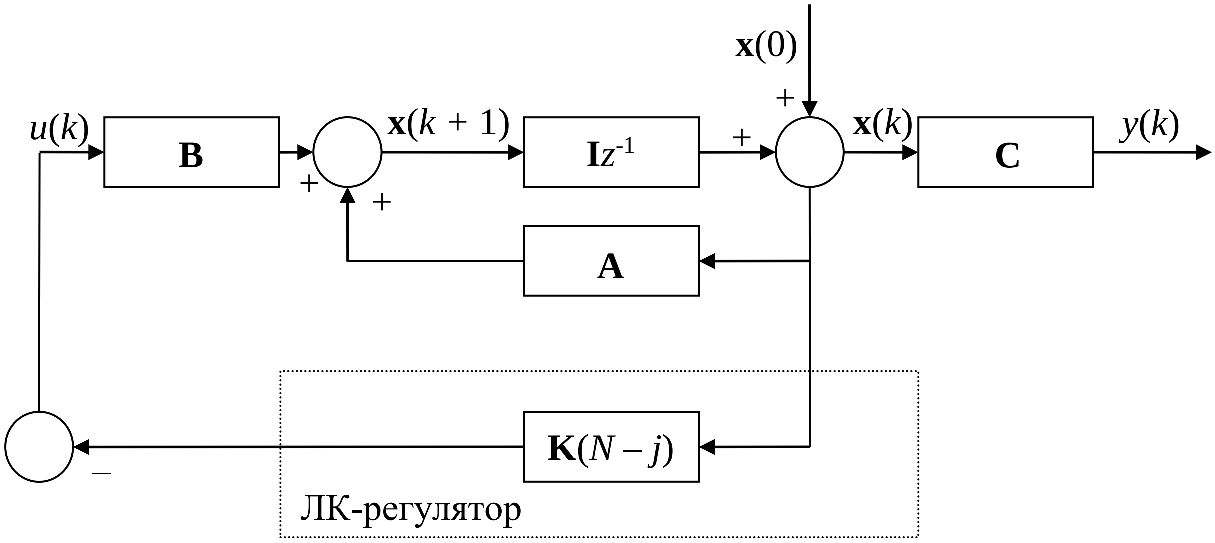

Рис. 1 Структурна схема системи з ЛК-регулятором

Зазначимо, що якщо критерієм оптимальності є (В.4), то **S** = **Q**.

Тоді **P**(N) = **Q**.

<u>Порядок виконання роботи</u>

1. Задати $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = [1 \quad 1]^T$, $q = 1$, $r = 1$, $N = 10$.
2. Розрахувати $\mathbf{K}(N-j)$ за формулою (3.3) для $j = 1, 2, \ldots, N$.
3. Обчислити $\mathbf{P}(N-j)$ ($j = 1, 2, \ldots, N$) згідно з виразом (3.6).
4. Визначити оптимальне керування $u(k)$ ($k = 0, 1, \ldots, N-1$) з рівняння (3.5).
5. Знайти змінні стану з рівняння стану (3.1).
6. Обчислити критерій оптимальності (3.2).
7. Внести зміни в параметри критерію оптимальності:

   а) $q = 1$, $r = 10$;

   б) $q = 10$, $r = 1$,

і повторити розрахунки згідно з пп. 2 – 6.

8. Задати $N = 5$ і повторити обчислення згідно з пп. 2 – 7.

Оформлення результатів роботи

1. Навести фактичні дані виконаних розрахунків (також надати значення критерію оптимальності для всіх варіантів розрахунку).
2. Для всіх варіантів розрахунків побудувати графіки зміни:
а) оптимального керування; б) змінних стану.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачу оптимального керування, яка вирішується за допомогою ЛК-регуляторів.
2. Що являє собою ЛК-регулятор?
3. Які обмеження накладаються на матриці **S**, **Q** та **R** і чому?
4. Як визначаються параметри ЛК-регулятора?
5. Яка послідовність дій при розрахунку оптимального ЛК-керування?
6. Проаналізуйте вплив параметрів критерію оптимальності на ЛК-керування за результатами виконаної роботи.
7. Порівняйте значення критеріїв оптимальності при $N = 5$ та $N = 10$. Чим Ви пояснюєте різницю між ними?
8. Запишіть рівняння Ріккаті. Що воно визначає?

Лабораторна робота № 4

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ З ЛКГ-РЕГУЛЯТОРОМ

Мета роботи. Вивчити теоретичні основи синтезу ЛКГ-регуляторів та дослідити вплив характеристик шуму на оптимальне керування та змінні стану системи з ЛКГ-регулятором.

Теоретичні відомості. Розглянемо стохастичний об’єкт керування, модель якого має випадкову складову, яка описується векторним сигналом $\upsilon(k)$:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}\boldsymbol{\upsilon}(k). \tag{4.1}$$

Шум $\boldsymbol{\upsilon}(k)$ розподілений за нормальним законом з математичним сподіванням:

$$E\left\{\boldsymbol{\upsilon}(k)\right\} = 0 \tag{4.2}$$

та коваріаційною матрицею

$$\operatorname{cov}[\boldsymbol{\upsilon}(k),\ \tau = i - j] = E\left\{\boldsymbol{\upsilon}(i)\boldsymbol{\upsilon}^T(j)\right\} = \mathbf{V}_0\delta_{ij}, \tag{4.3}$$

де δ_{ij} – функція Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{при}\, i = j; \\ 0, \text{при}\, i \neq j. \end{cases} \tag{4.4}$$

Отже, $\boldsymbol{\upsilon}(k)$ – білий шум.

Крім того, будемо вважати, що сигнал шуму $\boldsymbol{\upsilon}(k)$ не залежить від вектора стану $\mathbf{x}(k)$, а початковий стан $\mathbf{x}(0)$ також випадковий і розподілений за нормальним законом зі статистиками:

$$E\left\{\mathbf{x}(0)\right\} = 0;$$

$$\operatorname{cov}[\mathbf{x}(0)] = E\left\{\mathbf{x}(0)\,\mathbf{x}^T(0)\right\} \tag{4.5}$$

Матриці коваріацій $\mathbf{V}_0$ та $\mathbf{X}_0$ позитивно напіввизначені.

Задачею синтезу оптимальної системи є побудова регулятора, який виробляє послідовність вхідних сигналів $u(k)$, яка формується на основі векторів стану $\mathbf{x}(k)$. Ця послідовність сигналів повинна забезпечувати досягнення кінцевого стану $\mathbf{x}(N) = 0$, мінімізуючи однозначно квадратичні критерії оптимальності

$$\mathbf{E}(I) = \mathbf{E}\{\mathbf{x}^T(N)\mathbf{S}\mathbf{x}(N) + \sum_{k=0}^{N-1}\left[\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)\right]\}. \tag{4.6}$$

Регулятор, який формує таку послідовність оптимальних сигналів керування, називається лінійним квадратичним Гаусовим (ЛКГ-регулятором).

Вважається, що матриці **S**, **Q** та **R** відповідають тим же вимогам, що й в ЛК-регуляторі.

В літературі доводиться, що формули, які застосовувались для ЛК-регулятора, повністю справедливі й для ЛКГ-регулятора.

Порядок виконання роботи

1. Задати $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = [5 \quad 5]^T$, $q = 1$, $r = 1$, $N = 10$.

2. Розрахувати $\mathbf{K}(N - j)$ за формулою (3.3) для $j = 1, 2, ..., N$.

3. Обчислити $\mathbf{P}(N - j)$ ($j = 1, 2, \ldots, N$) згідно з виразом (3.6).

4. Визначити оптимальне керування $u(k)$ ($k = 0, 1, \ldots, N - 1$) з рівняння (3.5).

5. Знайти змінні стану з рівняння стану (4.1).

6. Обчислити критерій оптимальності (3.2).

7. Задати $\mathbf{V_0} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ і повторити розрахунки згідно пп. 2 – 6.

8. Задати $N = 5$ і повторити обчислення згідно з пп. 2 – 7.

Оформлення результатів роботи

1. Навести фактичні дані виконаних розрахунків (також надати значення критерію оптимальності для всіх варіантів розрахунку).

2. Для всіх варіантів розрахунків побудувати графіки зміни:

а) оптимального керування; б) змінних стану.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачу оптимального керування, яка вирішується за допомогою ЛКГ-регулятора.

2. Що являє собою ЛКГ-регулятор?

3. Які обмеження накладаються на матриці S, Q та R і чому?

4. Як визначаються параметри ЛКГ-регулятора?

5. Яка послідовність дій при розрахунку оптимального ЛКГ-керування?

6. Що таке коваріаційна матриця і що вона характеризує?

7. Що таке сигнал «білий шум»?

8. Проаналізуйте вплив характеристик шуму на ЛКГ-керування за результатами виконаної роботи.

9. Запишіть рівняння Ріккаті. Що воно характеризує?

10. Порівняйте результати даної роботи з відповідними результатами попередньої.

Друга частина

Вступ до другої частини

Багато сучасних методів синтезу систем керування потребує застосування синтезу систем керування у просторі стану, зокрема регуляторів стану. Даній тематиці приділено увагу у другій частині лабораторних робіт.

Структурна схема автоматичної системи керування з регулятором стану зображена на рисунку 2.

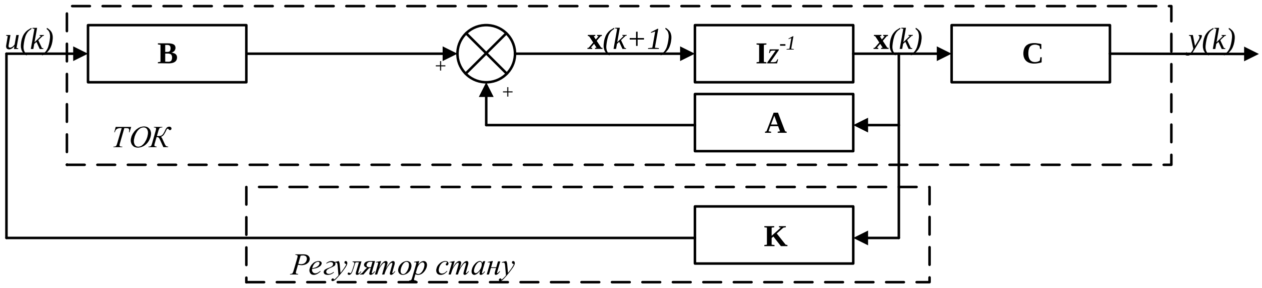

Рис. 2 Структурна схема автоматичної системи керування з регулятором стану

Якщо технологічний об'єкт керування (ТОК) є лінійним стаціонарним об'єктом, його математична модель в просторі станів представляється у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t), \end{cases} \tag{В.5}$$

де $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ та $\mathbf{u}(t)$ – відповідно вектори змінних стану розміром $n\times i$, виходів $(r\times i)$ та управлінь $(m\times i)$; **A**, **B** та **C** – матриці розміром відповідно $n\times n$, $n\times m$ та $r\times n$.

Синтез автоматичних систем здійснюється для досягнення наперед заданих показників якості. Такими показниками можуть бути запас стійкості, ступінь коливності, швидкодія, інтегральні та квадратичні показники якості тощо.

Під час виконання лабораторних робіт студенти повинні синтезувати різні типи регуляторів стану згідно із заданими показниками якості для детермінованих систем. Об'єктом дослідження, є одновимірна замкнена система керування з ТОК, передатна функція якого має вигляд:

$$W(s) = \frac{k}{(s+a)(s+b)(s+c)}, \qquad (\text{В.6})$$

де s – змінна Лапласа; a, b, c – сталі, значення яких вибираються з табл. 2 згідно з варіантом завдання.

Для синтезу регуляторів стану математична модель (В.6) повинна бути представлена у вигляді (В.5). Для цього треба обчислити матриці:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & q & f \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

де $p = -abc$; $q = -(ab + bc + ac)$; $f = -(a + b + c)$. Параметри системи вибираються у відповідності до варіанту з табл. 2.

Таблиця 2

Номер варіанта	a	b	c	k	Номер варіанта	a	b	c	k
1	1	2	3	1	16	3	4	7	4
2	1	2	4	1	17	4	5	6	4
3	1	2	5	1	18	4	5	7	4
4	1	2	6	1	19	5	6	7	4
5	1	2	7	1	20	1	2	8	4
6	2	3	4	2	21	1	3	8	5
7	2	3	5	2	22	1	4	8	5
8	2	3	6	2	23	1	5	8	5
9	2	3	7	2	24	2	3	8	5
10	1	3	4	2	25	2	4	8	5
11	1	3	5	3	26	2	5	8	1
12	1	3	6	3	27	3	4	8	1
13	1	3	7	3	28	3	5	8	1
14	3	4	5	3	29	4	5	8	1
15	3	4	6	3	30	4	5	8	1

Розв'язок рівняння (В.5) має вигляд:

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0)+\left[\int_0^t \mathbf{\Phi}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau\right]\mathbf{B}, \tag{В.7}$$

де $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$.

У разі дискретної системи вираз набирає вигляду:

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{\Phi}(T)\mathbf{x}(k)+\mathbf{\Theta}(T)\mathbf{u}(k), \tag{В.8}$$

де $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$; $\mathbf{\Theta}(T)=(\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}d\tau)\mathbf{B}$ (T – період квантування, $t = kT$).

Після синтезу регулятора стану якість автоматичної системи будемо аналізувати по вигляду її динамічних характеристик. Для розрахунку цих характеристик рівняння стану (В.8) треба доповнити рівнянням зворотного зв'язку:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k), \tag{В.9}$$

де $\mathbf{K}$ – матриця зворотного зв’язку регулятора стану. Тоді рівняння стану замкненої системи набере вигляду:

$$\mathbf{x}(k + 1) = (\boldsymbol{\Phi} - \mathbf{\Theta}\mathbf{K})\mathbf{x}(k). \tag{В.10}$$

Задаючи $\mathbf{x}(0)$ при $k = 0$, можна послідовно обчислити $\mathbf{x}(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, а потім і $\mathbf{y}(k)$ згідно з рівняннями виходу $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$.

Лабораторна робота № 5

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА СТАНУ ЗА ЗАДАНИМ РОЗТАШУВАННЯМ ПОЛЮСІВ СИСТЕМИ

Мета роботи. Оволодіти теоретичними знаннями та здобути практичних навичок з синтезу регуляторів стану за заданим розташуванням полюсів автоматичної системи.

Теоретичні відомості. Об'єктом дослідження є замкнена система, структурна схема якої зображена на рис. 3.

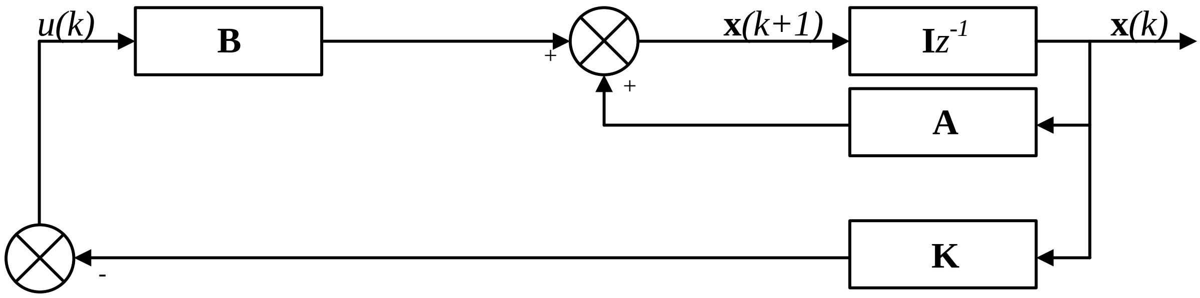

Рис. 3 Структурна схема об’єкту керування з регулятором стану

Регулятор стану має матрицю коефіцієнтів $\mathbf{K} = [k_0 \quad k_1 \quad k_2]$. Об’єкт керування описується рівнянням стану

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \tag{5.1}$$

За допомогою перетворення $\boldsymbol{\upsilon}(k) = \mathbf{P}\mathbf{x}(k)$, це рівняння може бути представлене в канонічній формі:

$$\boldsymbol{\upsilon}(k+1) = \mathbf{A}_1\boldsymbol{\upsilon}(k) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(k), \tag{5.2}$$

де

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{5.4}$$

а матриця перетворення:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{SA} \\ \mathbf{SA}^2 \end{bmatrix}, \tag{5.5}$$

де

$$\mathbf{S} = [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}]^{-1}. \tag{5.6}$$

Рівняння зворотного зв’язку по стану (див. рис. 3) має вигляд

$$u(k) = -\mathbf{Kx}(k) = -[k_0 \quad k_1 \quad k_2]\mathbf{x}(k) = -[k_0 \quad k_1 \quad k_2]\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\upsilon}(k) = -\mathbf{G}\boldsymbol{\upsilon}(k), \tag{5.7}$$

де

$$\mathbf{G} = \mathbf{KP}^{-1} = [g_0 \quad g_1 \quad g_2]. \tag{5.8}$$

Підставляючи вираз (5.7) в рівняння стану (5.2), маємо:

$$\boldsymbol{\upsilon}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\upsilon}(k) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\upsilon}(k) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(a_0 + g_0) & -(a_1 + g_1) & -(a_2 + g_2) \end{bmatrix} \boldsymbol{\upsilon}(k) \tag{5.9}$$

Таким чином, відповідне характеристичне рівняння замкненої системи:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{G}) = \lambda^3 + (a_2 + g_2)\lambda^2 + (a_1 + g_1)\lambda + (a_0 + g_0) =$$

$$= \lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3), \tag{5.10}$$

де $\alpha_i = a_i + g_i$, $i = 0, 1, 2$.

Тепер, якщо розташувати якимсь чином полюси замкненої системи, тобто корені λ_1, λ_2, λ_3 характеристичного рівняння (5.10), можна обчислити шукані значення коефіцієнтів g_i ($i = 0, 1, 2$) зворотного зв’язку по стану:

$$g_i = \alpha_i - a_i, \tag{5.11}$$

Знайшовши g_i, легко обчислити реальні коефіцієнти k_i ($i = 0, 1, 2$) зворотного зв’язку:

$$\mathbf{K} = \mathbf{GP}. \tag{5.12}$$

Вище проводилось розташування полюсів замкненої системи з ТОК, рівняння стану якого має вигляд (5.2) в той час, як реальною є система з математичним описом ТОК (5.1). Покажемо, що полюси цих двох систем збігаються. Розглянемо характеристичне рівняння замкненої системи (рис. 3):

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = 0. \qquad (5.13)$$

Якщо модель ТОК представити в канонічній формі (5.2), то характеристичне рівняння замкненої системи набере вигляду:

$$\mathbf{F}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{K}) = 0. \qquad (5.14)$$

В останнє рівняння підставимо вирази (5.3), (5.4) та (5.8):

$$\mathbf{F}(\lambda) = \det\left(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{PAP}^{-1} + \mathbf{PBKP}^{-1}\right) = \det\left(\lambda\mathbf{PP}^{-1} - \mathbf{PAP}^{-1} + \mathbf{PBKP}^{-1}\right) =$$

$$= \det\left[\mathbf{P}\left(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}\right)\mathbf{P}^{-1}\right] = \det\left(\mathbf{P}\right)\det\left(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}\right)\det\left(\mathbf{P}^{-1}\right) = \det\left(\lambda I - \mathbf{A} + \mathbf{BK}\right).$$

Тобто вирази (5.13) та (5.14) збігаються, що і треба було довести.

В даній лабораторній роботі розташування полюсів замкненої системи здійснюється виходячи із заданих запасу стійкості, ступеня коливальності, а також згідно з потрібним характером перехідних процесів. Поняття запасу стійкості $\varphi = -\eta$ та ступеня коливальності $\gamma = \beta/\varphi$ системи зрозуміло з рис.4, де «*» позначені полюси системи.

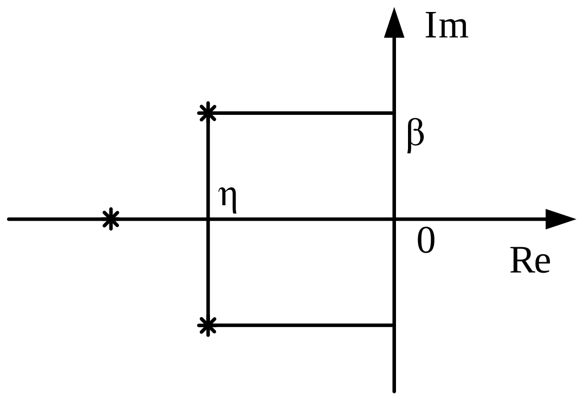

Рис. 4 Графічне представлення розрахунку запасу стійкості та коливальності на комплексній площині

Часто при синтезі автоматичних систем потрібно забезпечити аперіодичний або коливальний характер перехідних процесів. Це залежить від розташування полюсів системи. Якщо система має комплексно спряжені полюси, то перехідний процес в автоматичній системі коливальний. Якщо всі полюси – дійсні числа, то перехідний процес буде аперіодичним.

Порядок виконання роботи

1. Обчислити матриці **A** та **B** у виразі (5.1), задавшись періодом квантування $T = 1$.

2. Розрахувати матриці $\mathbf{A}_1$ та $\mathbf{B}_1$ з виразу (5.2).

3. Задати полюси замкненої системи таким чином, щоб її запас стійкості $\varphi \geq 0.8$, а перехідний процес був:

а) аперіодичним;

б) коливальним зі ступенем коливальності $\gamma \geq 1$.

4. Визначити матрицю **K** зворотного зв’язку для обох випадків по п.3.

5. Розрахувати змінні стану $\mathbf{x}(k)$ для $k = 1, 2, \ldots, 10$, якщо $\mathbf{x}(0) = [5 \quad 5 \quad 5]^T$ для обох випадків по п.3.

6. Повторити обчислення по пп. 1 – 5, якщо $T = 0.5$; $T = 2$.

Оформлення результатів роботи

1. Записати у чисельному вигляді матриці **A** і **B** з виразу (5.1) та матриці $\mathbf{A}_1$ і $\mathbf{B}_1$ з виразу (5.2) для всіх значень періоду квантування T, які використані в лабораторній роботі.

2. Побудувати графіки зміни змінних стану для кожного з визначених режимів роботи системи та записати відповідні значення полюсів, матриці зворотного зв'язку **K** та періоду квантування.

Контрольні запитання

1. Що таке регулятор стану?

2. Що називається полюсом системи?

3. Як математично представляється ТОК в просторі станів для безперервної та дискретної системи керування?

4. В чому полягає синтез регуляторів стану?

5. Що таке канонічна форма математичної моделі ТОК в просторі станів?

6. Як перетворити модель ТОК в просторі станів на канонічну форму?

7. Що таке характеристичне рівняння матриці?

8. Чому для синтезу регулятору стану по розташуванню полюсів замкненої системи потрібно перетворювати рівняння стану ТОК на канонічну форму?

9. Доведіть, що полюси замкненої системи з моделями ТОК (5.1) та (5.2) збігаються.

10. Що таке ступінь стійкості та коливності автоматичної системи?

11. Чи впливає період квантування дискретної системи на її ступінь стійкості та коливності? Доведіть.

12. Як впливає розташування полюсів системи на характер динамічних процесів в ній (аперіодичний, коливальний)?

Лабораторна робота № 6

СИНТЕЗ АПЕРІОДИЧНОГО РЕГУЛЯТОРА СТАНУ

Мета роботи. Оволодіти теоретичними відомостями та здобути практичних навичок по синтезу аперіодичного регулятора стану.

Теоретичні відомості. Розглянемо одновимірний ТОК порядку n:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k). \tag{6.1}$$

Цей об'єкт може бути переведений з довільного початкового стану $\mathbf{x}(0)$ в нульовий кінцевий стан $\mathbf{x}(N) = 0$ за $N = n$ кроків. Регулятор стану, який реалізує такий перехід, називається аперіодичним. Необхідна для цього послідовність управлінь може бути сформована через зворотний зв'язок по стану:

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k). \tag{6.2}$$

де $\mathbf{K} = [k_0 \;\; k_1 \ldots k_n]$ – матриця зворотного зв’язку. В результаті отримуємо

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k), \tag{6.3}$$

де $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$. Тоді $\mathbf{x}(1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(0)$; $\mathbf{x}(2) = \mathbf{F}^2\mathbf{x}(0)$; та

$$\mathbf{x}(N)=\mathbf{F}^N\mathbf{x}(0). \tag{6.4}$$

З умови $\mathbf{x}(N) = 0$ виходить, що

$$\mathbf{F}^N = 0. \tag{6.5}$$

Запишемо характеристичне рівняння замкненої системи:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{F}) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0. \tag{6.6}$$

Коефіцієнти α_i цього рівняння розраховуються за формулою:

$$\alpha_i = a_i + k_i,\; i = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{6.7}$$

якщо модель ТОК представлена в канонічній формі, тобто матриці **A** і **B** мають вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix};\; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6.8}$$

Якщо матриці **A** і **B** мають інший вигляд, модель ТОК може бути перетворена на канонічну форму

$$\mathbf{\upsilon}(k+1) = \mathbf{A}_1\mathbf{\upsilon}(k) + \mathbf{B}_1u(k) \qquad (6.9)$$

з допомогою перетворення $\mathbf{\upsilon}(k) = \mathbf{Px}(k)$, де матриця $\mathbf{P}$ буде

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{SA} \\ \vdots \\ \mathbf{SA}^{n-1} \end{bmatrix}, \qquad (6.10)$$

а

$$\mathbf{S} = [0 \quad 0 \ \dots \ 1][\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1}. \qquad (6.11)$$

В цьому випадку

$$\mathbf{K} = \mathbf{GP}, \qquad (6.12)$$

де $\mathbf{G} = [g_1 \quad g_2 \ \dots \ g_n]$ – матриця зворотного зв’язку системи, що представлена в канонічній формі. У виразі (6.9) матриця $\mathbf{A}_1$ та $\mathbf{B}_1$ мають такий же вигляд, як і матриці $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ в формулі (6.8).

Представлена модель ТОК в канонічній формі дає змогу отримати перехідну матрицю стану замкненої системи $\mathbf{F}$ у вигляді

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 - g_0 & -a_1 - g_1 & -a_2 - g_2 & \dots & -a_{n-1} - g_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad (6.13)$$

що і зумовлює розрахунок коефіцієнтів α_i рівняння (6.6) за формулою (6.7).

Згідно з теоремою Келі-Гамільтона рівняння (6.6) перепишемо:

$$\mathbf{F}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{F}^{n-1} + \dots + \alpha_1\mathbf{F} + \alpha_0\mathbf{I} = 0. \qquad (6.14)$$

Вводячи заміну $n = N$, маємо:

$$\mathbf{F}^N + \alpha_{N-1}\mathbf{F}^{N-1} + \dots + \alpha_1\mathbf{F} + \alpha_0\mathbf{I} = 0. \qquad (6.15)$$

Враховуючи (6.5), а також те, що $\mathbf{F}^{N-i} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$), з рівняння (6.15) виходить, що:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0. \qquad (6.16)$$

Тоді, враховуючи (6.7), отримуємо:

$$g_i = -a_i \ (i = 0, 1, \dots, n-1), \qquad (6.17)$$

а величини управлінь розраховуються за формулою

$$u(k) = -\mathbf{GPx}(k). \tag{6.18}$$

Зважаючи на (6.16), характеристичне рівняння (6.6) набирає вигляду:

$$\lambda^n = 0. \tag{6.19}$$

Наявність кратного полюсу порядку n в точці $\lambda = 0$ є ознакою системи керування з аперіодичним характером перехідних процесів.

Розрахунок динамічних характеристик замкненої системи ведеться так, як у лабораторній роботі № 5.

Порядок виконання роботи

1. Розрахувати коефіцієнти a_i ($i = 0, 1, \ldots, n - 1$) характеристичного рівняння матриці **A** (6.8) при періоді квантування $T = 1$.

2. Обчислити матрицю **P** за формулою (6.10).

3. Задати $g_i = -a_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n - 1$) та розрахувати матрицю **K** за формулою (6.12).

4. Обчислити змінні стану $\mathbf{x}(k)$ замкненої системи з аперіодичним регулятором стану при $k = 1, 2, ..., 10$, якщо $\mathbf{x}(0) = [1 \quad 1 \quad 1]^T$.

5. Повторити розрахунок за пп. 1 – 4 при: а) $T = 0.2$;
б) $T = 2$.

Оформлення результатів роботи

Побудувати графіки зміни змінних стану замкненої системи з аперіодичним регулятором стану для різних періодів квантування T.

Контрольні запитання

1. Який регулятор називається аперіодичним регулятором стану?

2. Що таке канонічна форма моделі ТОК?

3. Як перетворити модель ТОК на канонічну форму?

4. Навіщо при синтезі аперіодичного регулятора стану перетворювати модель ТОК на канонічну форму?

5. Як визначити матрицю зворотного зв'язку для аперіодичного регулятора стану?

6. За якою формулою обчислюються управління в системі з аперіодичним регулятором стану?

7. Що можна сказати про власні значення замкненої системи з аперіодичним регулятором стану?

8. Як розраховуються характеристики стану замкненої системи з аперіодичним регулятором стану?

9. Порівняйте результати даної лабораторної роботи з результатами лабораторної роботи № 5 в тій її частині, де йдеться про аперіодичні перехідні процеси в системі.

Лабораторна робота № 7

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ З РЕГУЛЯТОРОМ СТАНУ ТА СПОСТЕРІГАЧЕМ ПОВНОГО ПОРЯДКУ

Мета роботи – Ознайомитись зі структурою та принципом дії системи керування з регулятором стану та асимптотичним спостерігачем повного порядку; дослідити систему залежно від динамічних властивостей спостерігача.

Теоретичні відомості. При синтезі регуляторів стану всі змінні стану повинні бути відомі. Для цього вони мають бути або виміряні (що практично складно або навіть неможливо), або визначені спеціальними розрахунками. Інструментом, який реалізує такі розрахунки, маючи інформацію про входи та виходи ТОК, є спостерігач, виходом якого є оцінки змінних стану ТОК. Отже, для формування закону керування доводиться замість справжніх змінних стану $\mathbf{x}(k)$ використовувати їх оцінки $\mathbf{x}(k)$, які відновлюються з допомогою спостерігача (рис. 5). Згідно з рис. 5 рівняння стану замкненої системи має вигляд:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{-BK} \\ \mathbf{HC} & \mathbf{A-BK-HC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix}, \tag{7.1}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{Cx}(k), \tag{7.2}$$

де вектори стану $\mathbf{x}(k)$ та $\mathbf{x}(k)$ виявляються взаємозв'язаними.

Вільний рух спостерігача будемо характеризувати вектором $\mathbf{d}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k+1)$. Тоді

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{d}(k+1) \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix}, \tag{7.3}$$

де $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & \mathbf{-I} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1}$. (7.4)

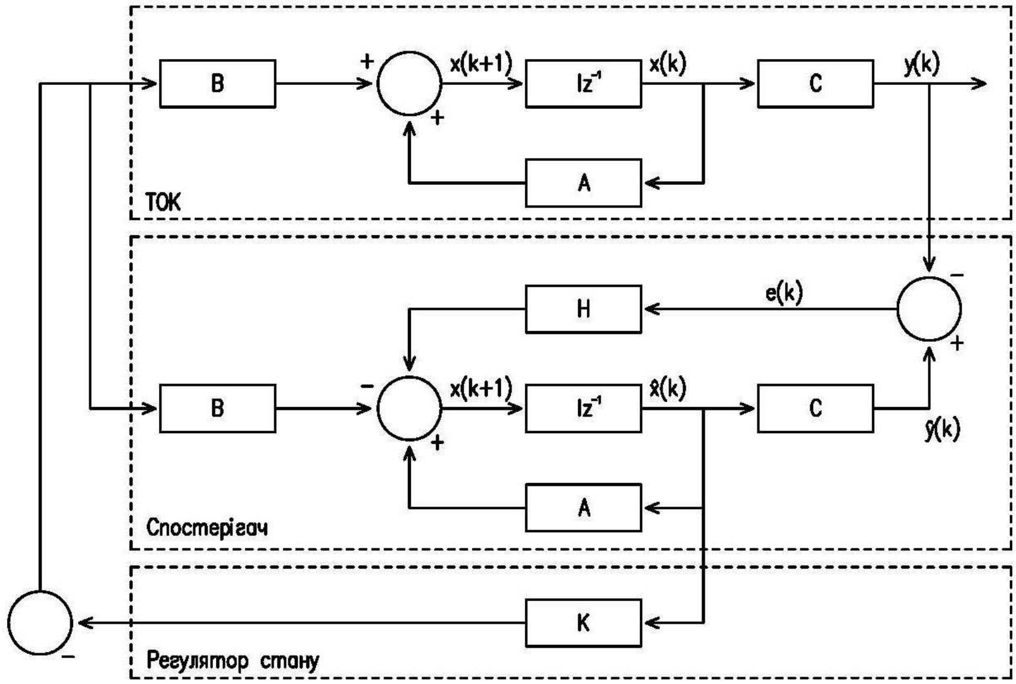

Рис. 5 Структурна схема регулятору стану та асимптотичного спостерігача повного порядку

Враховуючи (7.4), рівняння (7.1) та (7.2), перепишемо так:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{d}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{A}-\mathbf{HC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{d}(k) \end{bmatrix}, \tag{7.5}$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{d}(k) \end{bmatrix}. \tag{7.6}$$

Власний рух цієї системи визначається характеристичним рівнянням

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^*) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})\,\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{HC}) = 0, \tag{7.7}$$

де $\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{A}-\mathbf{HC} \end{bmatrix}$.

Отже, повний набір полюсів системи керування з регулятором стану та спостерігачем буде складатися з полюсів замкненої системи без спостерігача та полюсів спостерігача. Таким чином, полюси системи та полюси спостерігача можуть бути визначені незалежно, оскільки вони не впливають один на одного. При цьому треба враховувати, що поведінка зміни стану $\mathbf{x}(k)$ в часі залежить від властивостей спостерігача, що ясно видно з рівняння (7.5). Спостерігач має власну динаміку і тому вносить додаткові затримки в систему керування.

Для дослідження впливу динаміки спостерігача на якість системи керування спочатку треба розв'язати задачу синтезу спостерігача. Щодо асимптотичного спостерігача повного порядку, ця задача полягає у визначенні матриці $\mathbf{H} = [h_0 \quad h_1 \; ... \; h_{n-1}]^T$ зворотного зв'язку. Розрахунок цієї матриці ведеться за формулою:

$$\mathbf{H} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}, \tag{7.8}$$

де елемент матриці $\mathbf{F} = [f_0 \quad f_1 \; ... \; f_{n-1}]^T$ обчислюють так:

$$f_i = \alpha_i - a_i, \; (i = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{7.9}$$

а матриця **P** має вигляд:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.10}$$

Коефіцієнти a_i (i=0, 1, …, n – 1) є коефіцієнтами характеристичного рівняння матриці **A**:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + \mathrm{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a^1\lambda + a_0, \tag{7.11}$$

а коефіцієнти α_i (i=1, 2, …, n) – коефіцієнтами рівняння:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a^1\lambda + a_0, \tag{7.12}$$

в якому полюси спостерігача λ_i (i=0, 1, …, n – 1) задаються згідно з прийнятим показником його якості. Таким показником в даній лабораторній роботі є швидкодія спостерігача та характер наближення оцінок $\mathbf{x}(k)$ до зміни стану $\mathbf{x}(k)$.

<u>Порядок виконання роботи</u>

1. Задати елементи матриці **K** зворотного зв'язку системи такими, які вони були в лабораторній роботі № 5 для аперіодичного перехідного процесу в замкненій системі.

2. Задати початкові значення $\mathbf{x}(0) = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ та $\mathbf{x}(0) = [5 \quad 5 \quad 5]^T$.

3. Задати полюси спостерігача:

а) $\lambda_1 = 0{,}3$; $\lambda_2 = 0{,}2$; $\lambda_3 = 0{,}1$;

б) $\lambda_1 = 0{,}6$; $\lambda_2 = 0{,}4$; $\lambda_3 = 0{,}1$;

в) $\lambda_1 = 0{,}2 + j0{,}3$; $\lambda_2 = 0{,}2 - j0{,}3$; $\lambda_3 = 0{,}1$.

4. Визначити матрицю налаштувань **H** спостерігача для кожного варіанта п.3.

5. Розрахувати $\mathbf{x}(k)$ та $\mathbf{x}(k)$ при k = 0, 1, 2, ... поки $\mathbf{d}(k)$ не буде менше **e** для кожного варіанту п.3. Вектор $\mathbf{e} = [e_1 \quad e_2 \ldots e_n]^T$, де $\mathbf{e} = \pm 0{,}01$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

6. обчислити змінні стану замкненої системи для всіх варіантів налаштувань спостерігача згідно з п.4.

Оформлення результатів роботи

1. Для кожної змінної стану побудувати графік наближення $\mathbf{x}(k)$ до $\mathbf{x}(k)$ відповідно до розрахунків за п. 5.

2. В одній координатній системі побудувати динамічні характеристики, розраховані в п. 6, а також відповідні характеристики з лабораторної роботи №5.

Контрольні запитання

1. Дайте характеристику асимптотичного спостерігача повного порядку.

2. Чим відрізняється спостерігач повного порядку від спостерігача зниженого порядку?

3. Запишіть рівняння стану замкненої системи зі спостерігачем.

4. Чи можна визначити полюси замкненої системи керування та полюси спостерігача незалежно один від одного? Доведіть.

5. Яким чином здійснюється синтез спостерігача?

6. Що впливає на характер наближення оцінок змінних стану до їх справжніх значень і чи впливає це на динаміку системи?

7. Від чого залежить швидкодія спостерігача і чи впливає вона на динаміку системи?

8. Доведіть справедливість рівняння (7.2).

9. Доведіть справедливість рівняння (7.5).

10. Порівняйте результати даної роботи з результатами лабораторної роботи №5.

Лабораторна робота № 8

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ З РЕГУЛЯТОРОМ СТАНУ ТА СПОСТЕРІГАЧЕМ ЗНИЖЕНОГО ПОРЯДКУ

Мета роботи – Ознайомитись зі структурою та принципом дії системи керування з регулятором стану та спостерігачем зниженого порядку; дослідити динаміку такої системи.

Теоретичні відомості. У загальному випадку, оскільки r вихідних змінних є лінійними комбінаціями n змінних стану, необхідно відновлювати не більше $n - r$ станів. Спостерігачі, які реалізують цю ідею, називають спостерігачами зниженого порядку, або спостерігачами Люєнбергера.

Структурна схема замкненої системи зі спостерігачем зниженого порядку показана на рис. 6.

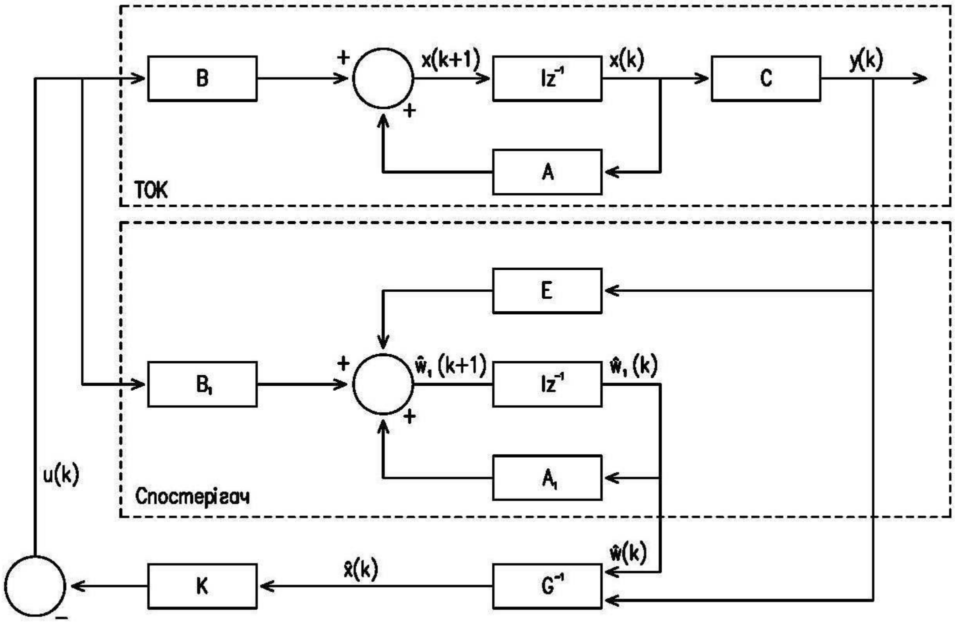

Рис. 6 Структурна схема регулятору стану та асимптотичного спостерігача зниженого порядку

Для ТОК з одним входом та одним виходом, який описується рівняннями:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k); \tag{8.1}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k), \tag{8.2}$$

застосовується наступний порядок визначення оцінок $\mathbf{x}(k)$ зміни стану.

Спочатку формуються матриці $\mathbf{A}_1$ виміром $(n-1)\times(n-1)$ та $\mathbf{E}$ виміром $(n-1)\times 1$:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -q_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -q_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -q_{n-2} \end{bmatrix}, \tag{8.3}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -q_{n-2}q_0 - a_0 + a_{n-1}q_0 \\ -q_{n-2}q_1 - a_1 + a_{n-1}q_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -q_{n-2}^2 - a_{n-2} + a_{n-1}q_{n-2} \end{bmatrix}. \tag{8.4}$$

У цих матрицях елементи a_i та q_i ($i=0, 1, \dots, n-1$) є коефіцієнтами характеристичних рівнянь матриць $\mathbf{A}$ та $\mathbf{A}_1$ відповідно:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + \mathrm{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a^1\lambda + a_0 = 0, \tag{8.5}$$

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}_1) = \lambda^n + q_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + q^1\lambda + q_0 = 0. \tag{8.6}$$

Якщо коефіцієнти a_i ($i=0, 2, \dots, n-1$) легко обчислюються за відомою матрицею $\mathbf{A}$, то у визначенні коефіцієнтів q_i ($i=0, 1, \dots, n-2$) фактично і полягає синтез спостерігача цього типу. Для їх розрахунку треба задати власні значення λ_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) матриці $\mathbf{A}_1$. Тоді маємо

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_{n-1}) = \lambda^{n-1} + q_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + q_0. \tag{8.7}$$

Знаючи $\mathbf{A}_1$ та $\mathbf{E}$, далі розраховуються оцінки $\hat{\mathbf{w}}_1(k)$ за формулою

$$\hat{\mathbf{w}}_1(k+1) = \mathbf{A}_1\hat{\mathbf{w}}_1(k) + \mathbf{E}\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}(k), \tag{8.8}$$

де $\mathbf{B}_1$ – $[(\mathrm{n}-1)\times 1]$ – вимірна матриця, яка формується так:

$$\mathbf{GB} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ b \end{bmatrix}, \tag{8.9}$$

де

$$\mathbf{G} = \mathbf{QP}. \tag{8.10}$$

Матриці $\mathbf{Q}$ та $\mathbf{P}$ виміром $n\times n$ визначаються так:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -q_0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -q_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -q_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (8.11)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (8.12)$$

Потім формується вектор оцінок $\hat{\mathbf{w}}_1(k)$

$$\hat{\mathbf{w}}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_1(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}, \qquad (8.13)$$

на основі якого розраховується вектор оцінок $\mathbf{x}(k)$ справжніх змін стану:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^{-1}\hat{\mathbf{w}}(k). \qquad (8.14)$$

Ефективність спостерігача зниженого порядку може визначатись рівнянням:

$$\mathbf{d}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k+1). \qquad (8.15)$$

Початкове значення вектора $\hat{\mathbf{w}}_1(0)$ визначається з вектора $\hat{\mathbf{w}}(0)$:

$$\hat{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{G}\mathbf{x}(0). \qquad (8.16)$$

Таким чином, динаміка наближення $\hat{\mathbf{w}}_1(0)$ до $\mathbf{w}_1(k)$, а відтак і $\mathbf{x}(k)$ до $\mathbf{x}(k)$, визначається власним значенням матриці $\mathbf{A}_1$.

Для дослідження впливу динаміки спостерігача на якість замкненої системи синтезується спостерігач з різними швидкодіями та характером наближення $\hat{\mathbf{w}}(k)$ до $\mathbf{w}(k)$. Якість системи оцінюється за її динамічними характеристиками.

Порядок виконання роботи

1. Задати елементи матриці **K** зворотного зв’язку системи такими, які вони були в лабораторній роботі № 5 для аперіодичного перехідного процесу в замкненій системі.

2. Задати початкові значення $\mathbf{x}(0) = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ та $\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}5 & 5 & 5\end{bmatrix}^T$.

3. Задати власні значення матриці $\mathbf{A}_1$:

а) $\lambda_1 = 0{,}6$; $\lambda_2 = 0{,}1$;

б) $\lambda_1 = 0{,}41$; $\lambda_2 = 0{,}2$;

в) $\lambda_1 = -0{,}6 + j0{,}1$; $\lambda_2 = -0{,}6 - j0{,}1$.

4. Розрахувати $\mathbf{x}(k)$ та $\mathbf{x}(k)$ при k = 0, 1, 2, … поки $\mathbf{d}(k)=\mathbf{x}(k)-\mathbf{x}(k)$ не буде менше **e** для кожного варіанта з п. 3. Вектор **e** взяти таким, який він був у лабораторній роботі № 7.

5. Обчислити змінні стану замкненої системи для всіх варіантів настройки спостерігача згідно з п. 3.

Оформлення результатів роботи

1. Для кожної змінної стану побудувати графік наближення $\mathbf{x}(k)$ до $\mathbf{x}(k)$ відповідно до розрахунків за п. 4.

2. В одній координатній системі побудувати графіки зміни змінних стану замкненої системи, розраховані в п. 5, а також відповідні характеристики з лабораторної роботи № 5.

Контрольні запитання

1. Дайте характеристику спостерігачеві зниженого порядку.

2. Чим спостерігач зниженого порядку відрізняється від спостерігача повного порядку?

3. В чому полягає синтез спостерігача зниженого порядку?

4. Який порядок обчислення оцінок змінних стану в системі зі спостерігачем зниженого порядку?

5. Що впливає на характер наближення оцінок змінних стану $\mathbf{x}(k)$ до їх справжніх значень $\mathbf{x}(k)$ і чи впливає це на динаміку замкненої системи?

6. Від чого залежить швидкість спостерігача зниженого порядку і чи впливає вона на динаміку замкненої системи?

7. Яким рівнянням характеризується ефективність спостерігача зниженого порядку замкненої системи?

8. Порівняйте результати даної роботи з результатами лабораторної роботи № 5.

Список рекомендованої літератури

1. Иванов В. А., Фалдин Н. В. Теория оптимальных систем автоматического управления. – Москва : Наука, 1981. – 336 с.
2. Изерман Р. Цифровые системы управления. – Москва.: Мир, 1984. – 641 с.
3. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. – Москва : Машиностроение, 1986. – 448 с.
4. Куропаткин П. В. Оптимальные и адаптивные системы. – Москва : Высшая школа, 1980. – 287 с.
5. Ципкин Я. 3. Основы теории автоматических систем. – Москва : Наука, 1977. – 560 с.
6. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. – Москва : Наука, 1989. – 304с.
7. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з курсу "Керування складними системами" / А. І. Жученко, М. В. Коржик. – Київ : КПІ, 1994. – 32 с.
8. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з курсу "Керування складними системами" / А. І. Жученко, М. В. Коржик, С. Д. Лутов. – Київ : КПІ, 1995. – 16 с.

Зміст

Стор.